

Σχεδιασμός σθεναρών συστημάτων ελεγχόμενων από PID

(The design of robust PID-controlled systems)

Ορισμός

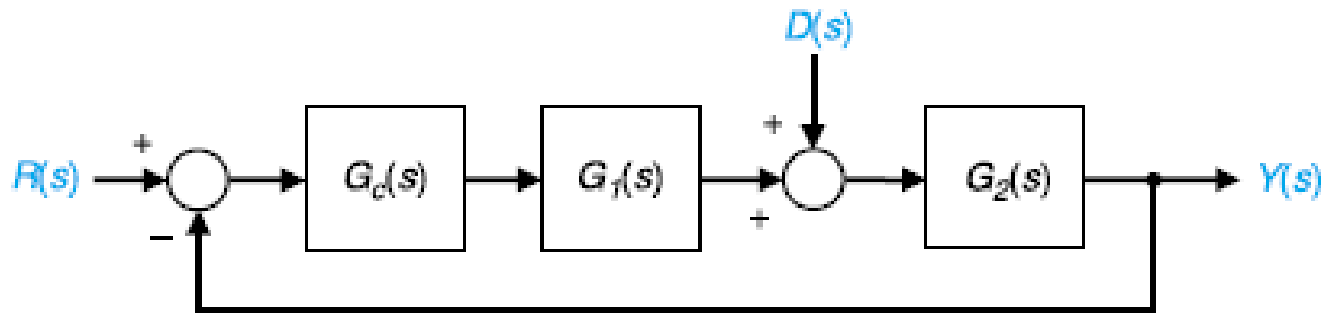
Σύστημα σθεναρό (robust) όταν έχει:

1. Περιορισμένη ευαισθησία
2. Ευσταθές σε μεταβολές παραμέτρων
3. Απόδοση καλύπτει τις προδιαγραφές για μεταβολές παραμέτρων

Στόχοι σχεδίασης

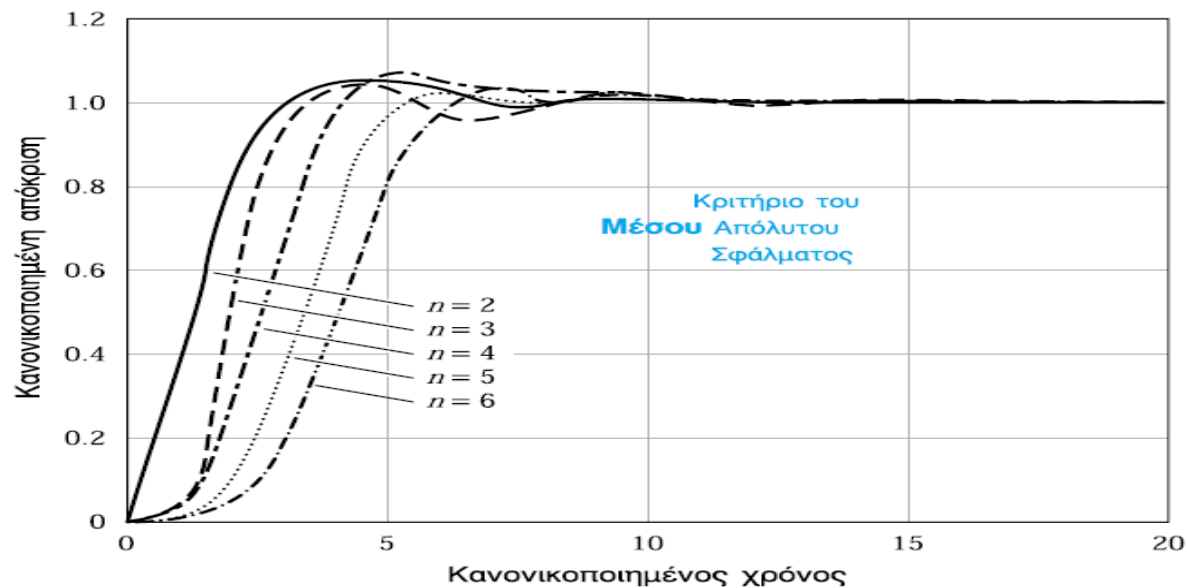
1. $T(s)$ με μεγάλο εύρος ζώνης (wide bandwidth) και πιστή αναπαραγωγή (faithful reproduction) της $R(s)$.
2. Μεγάλο κέρδος βρόχου (loop gain) $L(s)$, ώστε να ελαχιστοποιηθεί η ευαισθησία (sensitivity) S .
3. Μεγάλο κέρδος βρόχου που διατηρείται κυρίως από την $G_c(s)G_1(s)$, αφού $Y(s)/D(s) \sim 1/G_c(s)G_1(s)$.

$$S_G^T = \frac{1}{1 + G_c G_1 G_2(s)}$$



Βέλτιστοι Συντελεστές (optimum coefficients) πολωνύμου $T(s)$ με βάση το κριτήριο ITAE (Integral Time Absolute Error)

$$ITAE = \int_0^T t |e(t)| dt \quad T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}$$



Βέλτιστοι Συντελεστές πολυωνύμου $T(s)$ με βάση το κριτήριο ITAE για είσοδο (input) βηματική (step) και ράμπας (ramp)

$$\begin{aligned}
 & s + \omega_n \\
 & s^2 + 1,4\omega_n s + \omega_n^2 \\
 & s^3 + 1,75\omega_n s^2 + 2,15\omega_n^2 s + \omega_n^3 \\
 & s^4 + 2,1\omega_n s^3 + 3,4\omega_n^2 s^2 + 2,7\omega_n^3 s + \omega_n^4 \\
 & s^5 + 2,8\omega_n s^4 + 5,0\omega_n^2 s^3 + 5,5\omega_n^3 s^2 + 3,4\omega_n^4 s + \omega_n^5 \\
 & s^6 + 3,25\omega_n s^5 + 6,60\omega_n^2 s^4 + 8,60\omega_n^3 s^3 + 7,45\omega_n^4 s^2 + 3,95\omega_n^5 s + \omega_n^6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & s^2 + 3,2\omega_n s + \omega_n^2 \\
 & s^3 + 1,75\omega_n s^2 + 3,25\omega_n^2 s + \omega_n^3 \\
 & s^4 + 2,41\omega_n s^3 + 4,93\omega_n^2 s^2 + 5,14\omega_n^3 s + \omega_n^4 \\
 & s^5 + 2,19\omega_n s^4 + 6,50\omega_n^2 s^3 + 6,30\omega_n^3 s^2 + 5,24\omega_n^4 s + \omega_n^5
 \end{aligned}$$

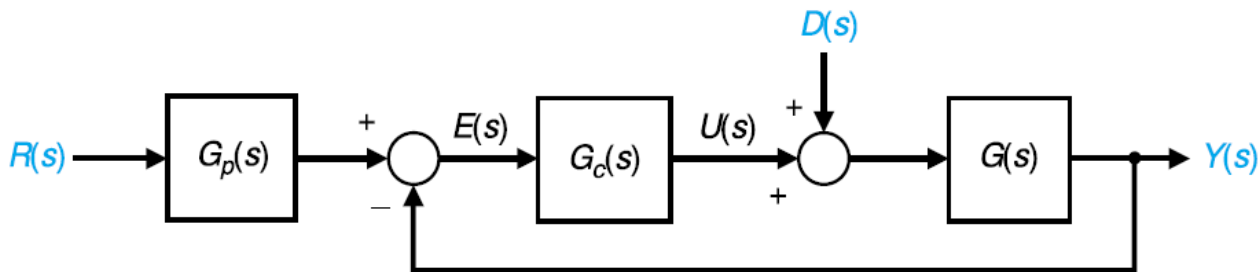
Μέθοδος σχεδιασμού που χρησιμοποιεί το δείκτη απόδοσης ITAE (ITAE performance index)

1. Επιλογή της ω_n του Σ.Κ.Β (closed-loop system) προσδιορίζοντας το χρόνο αποκατάστασης (settling time).
2. Προσδιορισμός των τριών συντελεστών (coefficients) χρησιμοποιώντας την κατάλληλη βέλτιστη (optimum) εξίσωση και την συχνότητα ω_n (βήμα 1), οπότε καταλήγουμε στην $G_c(s)$.
3. Προσδιορισμός ενός φίλτρου εισόδου (prefilter) $G_p(s)$, έτσι ώστε η Σ.Μ. $T(s)$ του Σ.Κ.Β. να μη παρουσιάζει κανένα μηδενικό (any zeros).

Παράδειγμα που χρησιμοποιεί το δείκτη απόδοσης ΙΤΑΕ (Δεδομένα)

Να βρεθεί βέλτιστος ελεγκτής με το κριτήριο ΙΤΑΕ και χρόνο αποκατάστασης μικρότερο των 0,5 sec

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$



Παράδειγμα που χρησιμοποιεί το δείκτη απόδοσης ITAE (Επίλυση)

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$G_c(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s = \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s}$$

$$T_1(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)} = \frac{\frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s} \cdot \frac{1}{(s+1)^2}}{1 + \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s} \cdot \frac{1}{(s+1)^2}} =$$

$$= \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s^3 + (2+k_d)s^2 + (1+k_p)s + k_i} \quad \text{"ITAE"}$$

$$\sim \frac{1}{s^3 + 1.4s\omega_n s^2 + 2.1s\omega_n^2 s + \omega_n^3}$$

για $\zeta = 0.8$ (πιθανό για γρήγορη υπερκρίσιμη)

$$T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} \leq 0.9 \text{ sec} \Rightarrow \omega_n \geq 10 \text{ rad/sec}$$

Παράδειγμα που χρησιμοποιεί το δείκτη απόδοσης ΙΤΑΕ (Επίλυση)

από
$$s^3 + 17,5 s^2 + 215 s + 1000 = s^3 + (2+k_d) s^2 + (1+k_p)$$

 οπότε $k_d = 15,5 \quad k_p = 214 \quad k_i = 1000$

$$T_1(s) = \frac{15,5 s^2 + 214 s + 1000}{s^3 + 17,5 s^2 + 215 s + 1000} = \frac{15,5 (s + 6,9 + j4,1)(s + 6,9 - j4,1)}{s^3 + 17,5 s^2 + 215 s + 1000} \quad (I)$$

προσέγγιση $\Rightarrow \text{r.o.} = 31,4^\circ \quad T_r = 0,9 \text{ sec} \quad |y(\omega)/d(\omega)| = 94\%$

Αν $G(s) = \frac{k}{(\tau s + 1)^2} \quad 1 \leq k \leq 2 \quad \text{και} \quad 0,5 \leq \tau \leq 1$

επιλέγω $\omega_n = 8 \text{ rad/sec}$ (απόλυτα όπως παραπάνω) για $k=1,5 \quad \tau=1$

$$T_1(s) = \frac{12 (s^2 + 11,38 s + 42,64)}{s^3 + 14 s^2 + 134,6 s + 512} \quad (II)$$

και $G_c(s) = \frac{12(s^2 + 11,38 s + 42,64)}{s^1}$

Παράδειγμα που χρησιμοποιεί το δείκτη απόδοσης ΙΤΑΕ (Επίλυση)

ΜΕ ΦΙΛΤΡΟ ΕΙΣΟΔΟΥ

$$\text{για την (I)} : T(s) = G_P(s) T_1(s) = G_P(s) \frac{15,5 (s^2 + 13,8s + 64,5)}{s^3 + 17,5 s^2 + 215 s + 1000}$$

$$\text{όρα } G_P(s) = \frac{64,5}{s^2 + 13,8 s + 64,5}$$

$$\text{και τέλεια } T(s) = \frac{1000}{s^3 + 17,5 s^2 + 215 s + 1000}$$

$$\text{για την (II)} : T(s) = G_P(s) T_1(s) = G_P(s) \frac{12 (s^2 + 11,38s + 42,64)}{s^3 + 14 s^2 + 134,6 s + 512}$$

$$\text{όρα } G_P(s) = \frac{42,64}{s^2 + 11,38 s + 42,64}$$

$$\text{και τέλεια } T(s) = \frac{512}{s^3 + 14 s^2 + 134,6 s + 512}$$

για $(\tau=1, k=1)$, $(\tau=0,5, k=1)$, $(\tau=1, k=2)$, $(\tau=0,5, k=2)$

Πίνακας

Παράδειγμα που χρησιμοποιεί το δείκτη απόδοσης ITAE (Αποτελέσματα)

Πίνακας 1 Αποτελέσματα του Παραδείγματος

Ελεγκτής	$G_c(s) = 1$	PID και $G_p(s) = 1$	PID με $G_p(s)$ Φίλτρο Εισόδου
Ποσοστό υπερύψωσης	0	31.7%	1.9%
Χρόνος μεγίστου (σε δευτερόλεπτα)	3.2	0.20	0.45
Σφάλμα στη μόνιμη κατάσταση ισορροπίας	50.1%	0.0%	0.0%
$ y(t)/d(t) _{\text{maximum}}$	52%	0.4%	0.4%

Πίνακας 2 Αποτελέσματα του Παραδείγματος με $\omega_n = 8$

Συνθήκες Ελεγχόμενης διεργασίας	$\tau = 1$ $K = 1$	$\tau = 0.5,$ $K = 1$	$\tau = 1,$ $K = 2$	$\tau = 0.5,$ $K = 2$
Ποσοστό υπερύψωσης	2%	0%	0%	1%
Χρόνος αποκατάστασης (σε δευτερόλεπτα)	1.25	0.8	0.8	0.9

Πίνακας 3 Μέγιστη Τιμή της Εισόδου της Ελεγχόμενης διεργασίας

ω_n	10	20	40
$u(t)$ μέγιστη για $R(s) = 1/s$	35	135	550
Χρόνος αποκατάστασης (σε δευτερόλεπτα)	0.9	0.5	0.3