

ΠΟΣΟΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ II

Όνομα : Βασιλική

Επώνυμο : Βαζελάνου

A.M. : LX31047

Τμήμα : Λογιστικής και Χρημ/κής.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση (1)

Εάν η τυχαία μεταβλητή X έχει $E(X) = \mu$, $V(X) = \sigma^2$, να βρείτε τη μέση τιμή και τη διαφορά της $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

Λύση:

$$E(Z) = E\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)$$

$$= E\left(\frac{1}{\sigma} X - \frac{\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \frac{1}{\sigma} E(X) - \frac{\mu}{\sigma}$$

$$= \frac{1}{\sigma} \mu - \frac{\mu}{\sigma} = 0$$

$$V(Z) = V\left(\frac{1}{\sigma} X - \frac{1}{\sigma} \mu\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma}\right)^2 V(X)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \sigma^2 = 1$$

Άσκηση (2)

Το ύψος των μαθητών ενός σχολείου είναι τ.μ. που ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 1.70 εκ. και τυπική απόκλιση 32 εκ. ($N(1.70, 3, 2^2)$). Να βρεθεί το ποσοστό απόκλισης των μαθητών με ύψος μεταξύ 1.65 και 1.80 εκ., καθώς και το ποσοστό των μαθητών με ύψος μεγαλύτερο του 1.80 εκ.

Λύση:

a) $P(165 < x < 175)$

$$P\left(\frac{165-170}{32} < \frac{x-170}{32} < \frac{175-170}{32}\right)$$

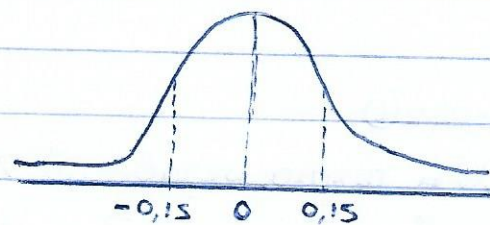
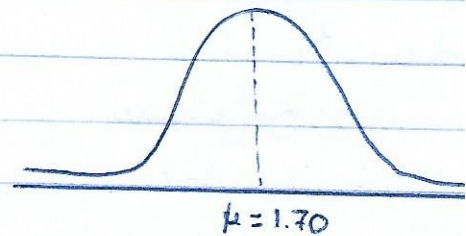
$$P(-0,15 < z < 0,15)$$

$$P(z < 0,15) - P(z < -0,15)$$

$$\Phi(0,15) - \Phi(-0,15)$$

$$\Phi(0,15) - (1 - \Phi(-0,15))$$

$$2\Phi(0,15) - 1 = 2 \cdot 0,55962 - 1 \approx 0,1$$



Άσκηση 3

Τυχαίο δείγμα 25 εταιριών και εξετάζουμε τους υπαλλήλους τους

35	6	12	11	23	32	18	22	5	17
11	44	14	9	55	15	29	12	60	18
61	38	45	28	10					

Να υπολογίσετε τη μέση τιμή ($\bar{x}$), τη διασπορά (s^2) και την τυπική απόκλιση (s) του δείγματος

Λύση:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{35+6+12+11+\dots+10}{25} = 28$$

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{(35-28)^2 + (1-28)^2 + \dots + (10-28)^2}{24} = 465, \dots$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{465, \dots} \approx 21,56$$

Άσκηση(4)

Έστω μία μεταβλητή X η οποία υποθέτουμε ότι ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ όπου $\mu = E(X)$ και $\sigma^2 = V(X)$

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) \text{ όπου } k = 1, 2, 3$$

Λύση:

$$k=1$$

$$P(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma) = P(\cancel{\mu - \sigma} - \cancel{\mu} < x - \mu < \cancel{\mu} + \sigma - \cancel{\mu})$$

$$= P(-1 < \frac{x - \mu}{\sigma} < 1)$$

$$= P(-1 \leq z \leq 1)$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-1)$$

$$= \Phi(1) - (1 - \Phi(1))$$

$$= 2\Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0,84 - 1$$

$$= 1,682 - 1 = 0,682 \text{ ή } 68,2\%$$

$$k=2$$

$$P(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma) = P(\cancel{\mu} - 2\cancel{\sigma} - \cancel{\mu} < x < \cancel{\mu} + 2\cancel{\sigma} - \cancel{\mu})$$

$$= P(-2\sigma < x - \mu < 2\sigma)$$

$$= P(-2 < \frac{x - \mu}{\sigma} < 2)$$

$$= P(-2 < z < 2) = \Phi(2) - \Phi(-2)$$

$$= \Phi(2) - (1 - \Phi(2))$$

$$= 2\Phi(2) - 1$$

$$= 2 \cdot 0,977 - 1$$

$$= 1,954 - 1$$

$$= 0,954 \text{ ή } 95,4\%$$

$$k=3$$

$$\text{όχιες με το παραπάνω} \dots = \Phi(3) - (1 - \Phi(3))$$

$$= 2\Phi(3) - 1$$

$$= 2 \cdot 0,998 - 1$$

$$= 1,996 - 1 = 0,996 \text{ ή } 99,6\%$$

Άσκηση 5

Η αντοχή ενός υφάγματος (σε χιλιόγραμμα δύναμης) έχει την κανονική κατανομή $N(\mu=50, \sigma^2=4)$. Ένα τόπι 25 μέτρων αυτού του υφάγματος αποφέρει κέρδος 200 € αν $x > 47$. Αν $x \leq 47$ το ύφασμα πωλείται ως δεύτερης διαλογής αποφέρει κέρδος 100 € / τόπι. Να υπολογιστεί το μέσο κέρδος ανά τόπι.

Λύση:

Η τυχαία μεταβλητή είναι η αντοχή

$$X \sim N(\mu=50, \sigma^2=4)$$

$$P(X > 47) \{P(\text{Αντοχή} < 47 \text{ κgr δύναμης})\}$$

$$= P\left(\frac{X-50}{2} > \frac{47-50}{2}\right)$$

$$= P(Z > -1,5)$$

$$= 1 - P(Z \leq -1,5)$$

$$= 1 - \Phi(-1,5) = \Phi(1,5)$$

$$= 0,933 \text{ ή } 93,3\%$$

Αν,

$$P(X < 47)$$

$$= P\left(\frac{X-50}{2} < \frac{47-50}{2}\right)$$

$$= P(Z < -1,5)$$

$$= \Phi(-1,5)$$

$$= 1 - 0,933 = 0,067 \text{ ή } 6,7\%$$

$$\text{Κέρδος} = \begin{cases} 200 & \text{αν } \pi > 47 \\ 100 & \text{αν } \pi < 47 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(\text{κέρδος}) &= \sum x_i \cdot P(\text{κέρδος} = x_i) \\ &= 200 \cdot 0,933 + 100 \cdot 0,067 \\ &= 186,6 + 6,7 \\ &= 193,3 \text{ € / τόνο} \end{aligned}$$

Άσκηση 6

Μια στρατιωτική μονάδα πρόκειται να δεχθεί για κατάταξη 2000 στρατεύσιμους και θέλει να κατασκευάσει τον απαιτούμενο αριθμό στοδίων. Οι στοδές κατατάσσονται σε 3 μεγέθη ανάλογα με το ύψος των στρατιωτικών ως εξής:

Μέγεθος A: 165 cm, B: 165 - 182 cm, Γ: 182 cm. Από παλαιότερες στατιστικές είναι γνωστό ότι το ύψος των στρατεύσιμων ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο 175 cm και τυπική απόκλιση 5 cm. Να βρεθεί ο αριθμός των στοδίων από κάθε κατηγορία που θα πρέπει να κατασκευασθεί η μονάδα.

Λύση:

$$\pi: \text{ύψος} \sim N(\mu = 175, \sigma = 5 \text{ cm})$$

$$P(X < 165)$$

$$= P\left(\frac{X-175}{5} < \frac{165-175}{5}\right)$$

$$= P(Z < -2)$$

$$= \Phi(-2)$$

$$= 1 - \Phi(2)$$

$$= 1 - 0,977 = 0,023 \text{ ή } 2,3\%$$

Αν,

$$P(165 < X < 182)$$

$$= P\left(\frac{165-175}{5} < X < \frac{182-175}{5}\right)$$

$$= P(-2 < X < 1,4)$$

$$= P(Z < 1,4) - P(Z < -2)$$

$$= \Phi(1,4) - \Phi(-2)$$

$$= \Phi(1,4) - (1 - \Phi(2)) = \Phi(1,4) - 1 + \Phi(2)$$

$$= 0,919 - 1 + 0,977 = 0,896 \text{ ή } 89,6\%$$

Άρα, οι εσόδους των Β $\rightarrow \frac{89,6}{100} \times 2000 = 1792$

$$\Gamma \rightarrow 2000 - (1792 + 46) = 2000 - 1838 = 162 \text{ στολές.}$$

Άσκηση 7

Από έναν πληθυσμό ο οποίος ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο μ και διασπορά 81, παίρνουμε τυχαίο δείγμα 36 παρατηρήσεων το οποίο έχει αριθμητικό μέσο $\bar{x} = 35$. Να βρεθεί το διάστημα εμπιστοσύνης μέσο στο οποίο βρίσκεται η μέση τιμή του πληθυσμού με πιθανότητα 95% και 99%.

Λύση:

$$\bullet \bar{x} - Z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + Z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 35 - 1,96 \cdot \frac{9}{6} < \mu < 35 + 1,96 \cdot \frac{9}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 32,06 < \mu < 37,94$$

$$P(32,06 < \mu < 37,94) = 95\%$$

$$\bullet \bar{x} - Z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + Z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

$$35 - 2,58 \cdot \frac{9}{6} < \mu < 35 + 2,58 \cdot \frac{9}{6} \Rightarrow$$

$$31,13 < \mu < 38,87$$

$$P(31,13 < \mu < 38,87) = 99\%$$