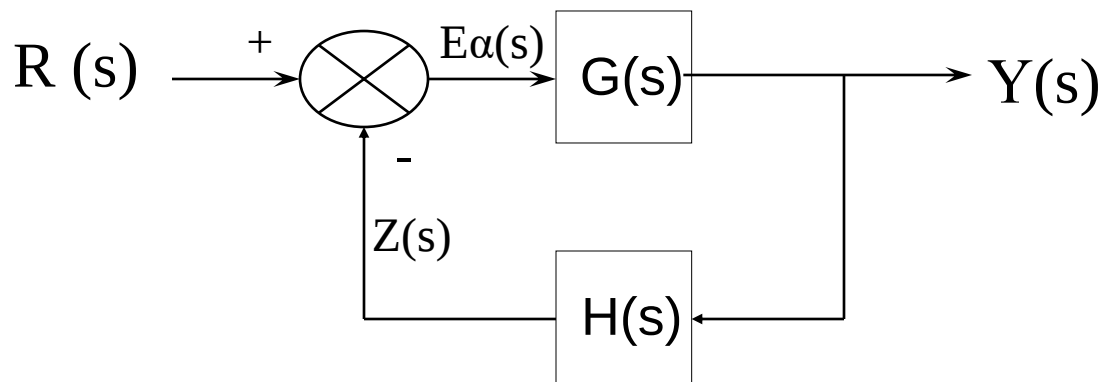


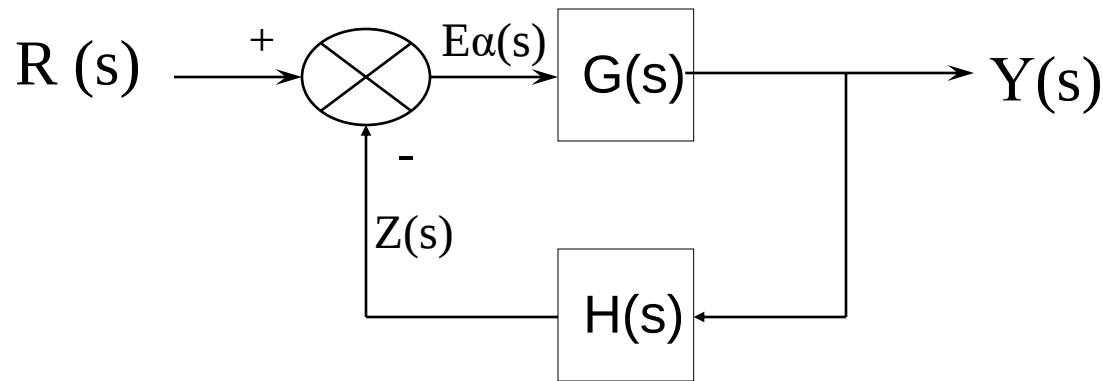
# Γεωμετρικός Τόπος Ριζών (Γ.Τ.Ρ.)

Ο Γ.Τ.Ρ. είναι μια γραφική απεικόνιση των θέσεων των πόλων του κλειστού συστήματος στο μιγαδικό επίπεδο- $s$  για όλες τις τιμές της παραμέτρου  $K$  (κέρδος) του συστήματος.

Είναι γνωστό ότι οι θέσεις των πόλων της συνάρτησης μεταφοράς στο μιγαδικό επίπεδο επηρεάζουν τη μεταβατική απόκριση του συστήματος καθώς και την ευστάθειά του.

Για το σύστημα κλειστού βρόγχου όπως αυτό εικονίζεται στο σχήμα που ακολουθεί ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:





Συνάρτηση Μεταφοράς (Σ.Μ.) του Πρόσω Κλάδου  $G(s)$

Σ.Μ. του Κλάδου Ανάδρασης  $H(s)$

Σ.Μ. του Ανοικτού Βρόγχου

$$G_o(s) = G(s)H(s)$$

Σ.Μ. του Σ.Κ.Β.

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο (Χ.Π.)

$$1 + G(s)H(s)$$

Χαρακτηριστική Εξίσωση (Χ.Ε.)

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

Αν η Σ.Μ. ανοικτού βρόγχου είναι της μορφής:

$$G(s)H(s) = K \frac{(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} = K \frac{N(s)}{D(s)}$$

τότε η Σ.Μ. του Σ.Κ.Β. θα είναι:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{G(s)}{1 + K \frac{N(s)}{D(s)}} = \frac{G(s)D(s)}{D(s) + KN(s)}$$

από την παραπάνω σχέση παρατηρούμε ότι η μεταβολή των τιμών της παραμέτρου  $K$  επηρεάζει τις τιμές των ριζών της Χ.Ε. του συστήματος με αποτέλεσμα τη μετατόπισή τους πάνω στο μιγαδικό επίπεδο.

Αυτό μας επιτρέπει να δημιουργήσουμε ένα διάγραμμα πάνω στο μιγαδικό επίπεδο που θα είναι το σύνολο των σημείων που θα είναι ρίζες της Χ.Ε. του συστήματος αν η παράμετρος  $K$  πάρει όλες τις τιμές από το 0 μέχρι το  $+\infty$ .

Το διάγραμμα που προκύπτει όταν το  $K$  πάρει τιμές μεταξύ του  $-\infty$  και του μηδενός ονομάζεται συμπληρωματικός Γ.Τ.Ρ..

Από την Χ.Ε. προκύπτουν τα παρακάτω:

$$1 + G(s)H(s) = 0 \Leftrightarrow G(s)H(s) = -1$$

$$|G(s)H(s)| = 1$$

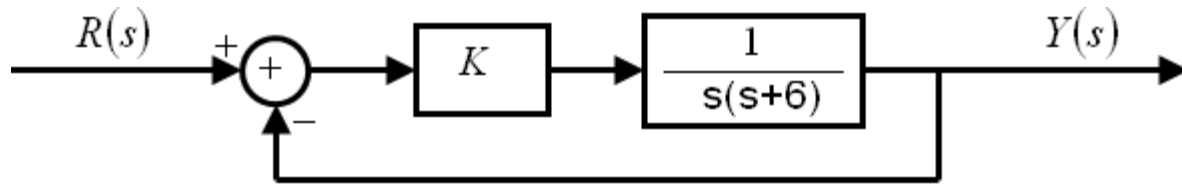
$$\angle(G(s)H(s)) = (2\rho + 1)\pi, \quad \rho = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \text{Συνθήκη φάσης για το Γ.Τ.Ρ.}$$

$$|K| \frac{\prod_{i=1}^m |s + z_i|}{\prod_{j=1}^n |s + p_j|} = 1$$

Συνθήκη μέτρου για το Γ.Τ.Ρ.

Η παραπάνω σχέση μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την τιμή του  $K$  πάνω στο διάγραμμα.

Να σχεδιαστεί ο Γ.Τ.Ρ του εικονιζόμενου συστήματος κλειστού βρόγχου.



$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+6)} \Rightarrow T(s) = \frac{KG(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{K}{s^2 + 6s + K}$$

$$s_1 = -3 + \sqrt{9-K} \text{ και } s_2 = -3 - \sqrt{9-K}$$

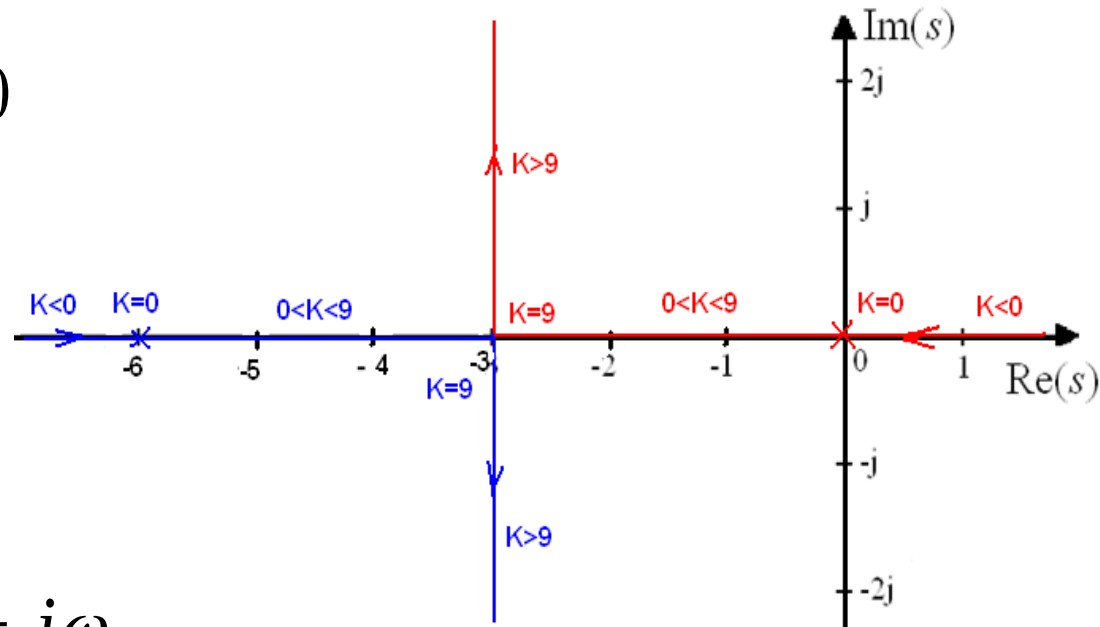
$$-\infty < K < 0 \Rightarrow s_1 > 0 \text{ και } s_2 < 0$$

$$K = 0 \Rightarrow s_1 = 0 \text{ και } s_2 = -6$$

$$0 < K < 9 \Rightarrow s_1 < 0 \text{ και } s_2 < 0$$

$$K = 9 \Rightarrow s_1 = s_2 = -3$$

$$9 < K < +\infty \Rightarrow s_1, s_2 = -3 \pm j\omega$$



# *Κανόνες Προσεγγιστικής Χάραξης του Γ.Τ.Ρ.*

1. Οι πόλοι της  $G(s)H(s)$  είναι τα σημεία εκκίνησης του Γ.Τ.Ρ.
2. Τα μηδενικά της  $G(s)H(s)$  και το άπειρο (όταν  $m < n$ ) είναι τα σημεία άφιξης των κλάδων του τύπου ριζών (ο αριθμός αυτών ισούται με το  $\max(m, n)$ , όπου  $m$  είναι το πλήθος των μηδενικών και  $n$  είναι το πλήθος των πόλων της).
3. Ο Γ.Τ.Ρ. είναι συμμετρικός ως προς τον άξονα των πραγματικών αριθμών.
4. Το σημείο τομής των ασύμπτωτων ευθειών (οι οποίες είναι  $n-m$ ) με τον άξονα των πραγματικών αριθμών δίδεται από την σχέση:

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^n (-p_i) - \sum_{j=1}^m (-z_j)}{n - m}$$

5. Οι γωνίες που σχηματίζουν οι ασύμπτωτες με τον πραγματικό άξονα δίνεται από τη σχέση:

$$\phi_{\alpha\rho} = \frac{(2\rho + 1)\pi}{n - m}, \quad \rho = 0, 1, 2, \dots, ((n - m) - 1) \quad K \geq 0$$

όπου  $((n-m)-1)$  είναι η τελευταία τιμή του  $\rho$ .

6. Ένα τμήμα του άξονα των πραγματικών αριθμών μπορεί να είναι τμήμα του Γ.Τ.Ρ. αν το πλήθος των πόλων και των μηδενικών που βρίσκονται δεξιά του τμήματος είναι περιττό (για  $K \geq 0$ ).

7. Τα σημεία αποχωρισμού και άφιξης των κλάδων από και προς τον οριζόντιο άξονα ονομάζονται σημεία θλάσης του Γ.Τ.Ρ. και υπολογίζονται από τις παρακάτω σχέσεις:
- $$K = -\frac{D(s)}{N(s)}$$

$$\frac{dK}{ds} = 0 \quad \text{ή} \quad D'(s)N(s) - N'(s)D(s) = 0$$

κάθε ρίζα της παραπάνω εξίσωσης αποτελεί ένα αποδεκτό σημείο θλάσης **αν είναι ταυτόχρονα** και ρίζα της Χ.Ε. του συστήματος για κάποια τιμή του  $K$ .

8. Οι γωνίες αναχώρησης του Γ.Τ.Ρ. από μιγαδικό πόλο ή άφιξης σε μιγαδικό μηδενικό υπολογίζονται από τη σχέση:

$$\angle \varphi_d = (2\rho + 1)\pi - \left( \sum_{i=1}^n \varphi_{p_i} - \sum_{j=1}^m \varphi_{z_j} \right)$$

όπου:  $\sum_{i=1}^n \varphi_{p_i}$  = το αλγεβρικό άθροισμα των γωνιών που

σχηματίζουν οι πόλοι ως προς τον αναφερόμενο μιγαδικό πόλο (μηδενικό).

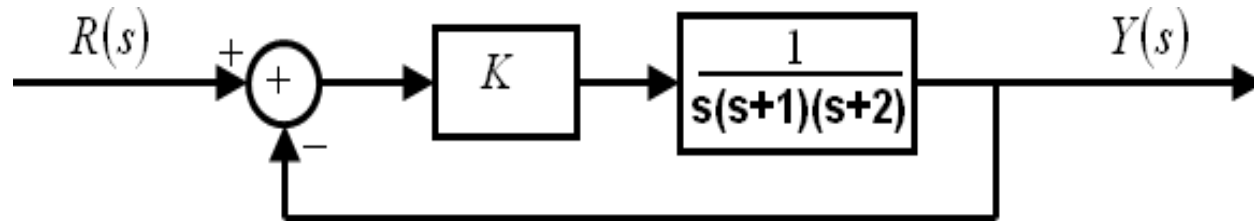
$\sum_{j=1}^m \varphi_{z_j}$  = το αλγεβρικό άθροισμα των γωνιών που

σχηματίζουν τα μηδενικά ως προς τον αναφερόμενο μιγαδικό πόλο (μηδενικό).

9. Τα σημεία τομής του Γ.Τ.Ρ. με τον άξονα των φανταστικών αριθμών είναι τα σημεία όπου το σύστημα μεταπίπτει από την ευστάθεια στην αστάθεια.

Οι τιμές του  $K$  και του  $\omega$  για τα σημεία αυτά, ονομάζονται κρίσιμο κέρδος ( $K_{cr}$ ) και κρίσιμη συχνότητα ( $\omega_{cr}$ ) αντίστοιχα.

Να σχεδιαστεί ο Γ.Τ.Ρ του εικονιζόμενου συστήματος κλειστού βρόγχου.

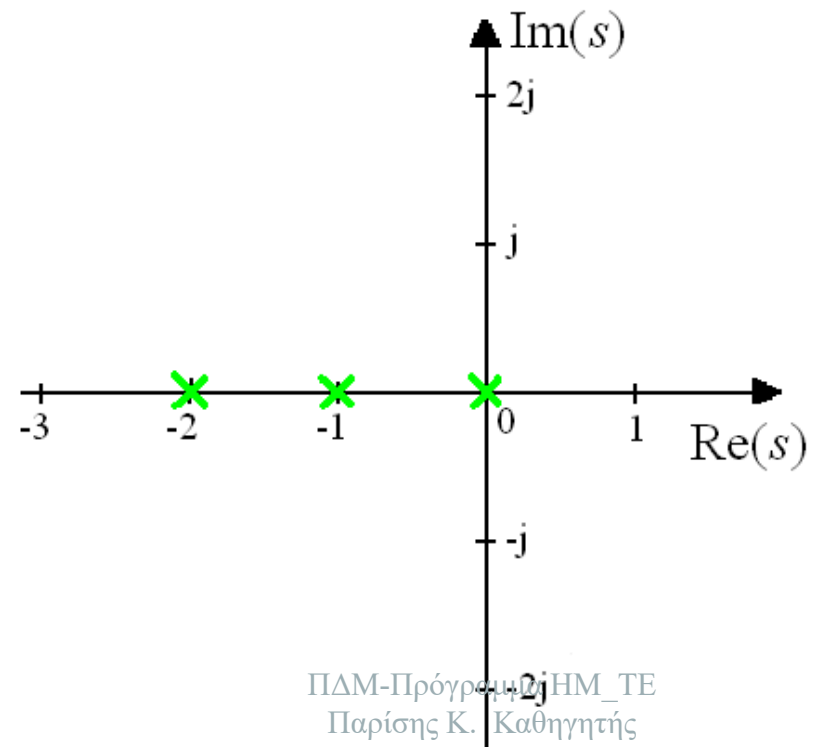


**ΒΗΜΑ 1<sup>ο</sup>** : ΑΦΟΥ ΒΡΩ ΤΟΥΣ ΠΟΛΟΥΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΗΔΕΝΙΚΑ ΤΗΣ  $G(s)H(s)$ , ΤΑ ΣΧΕΔΙΑΖΩ ΠΑΝΩ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ-S ΣΥΜΒΟΛΙΖΟΝΤΑΣ ΤΟΥΣ ΠΟΛΟΥΣ ΜΕ (x) ΚΑΙ ΤΑ ΜΗΔΕΝΙΚΑ ΜΕ (o).

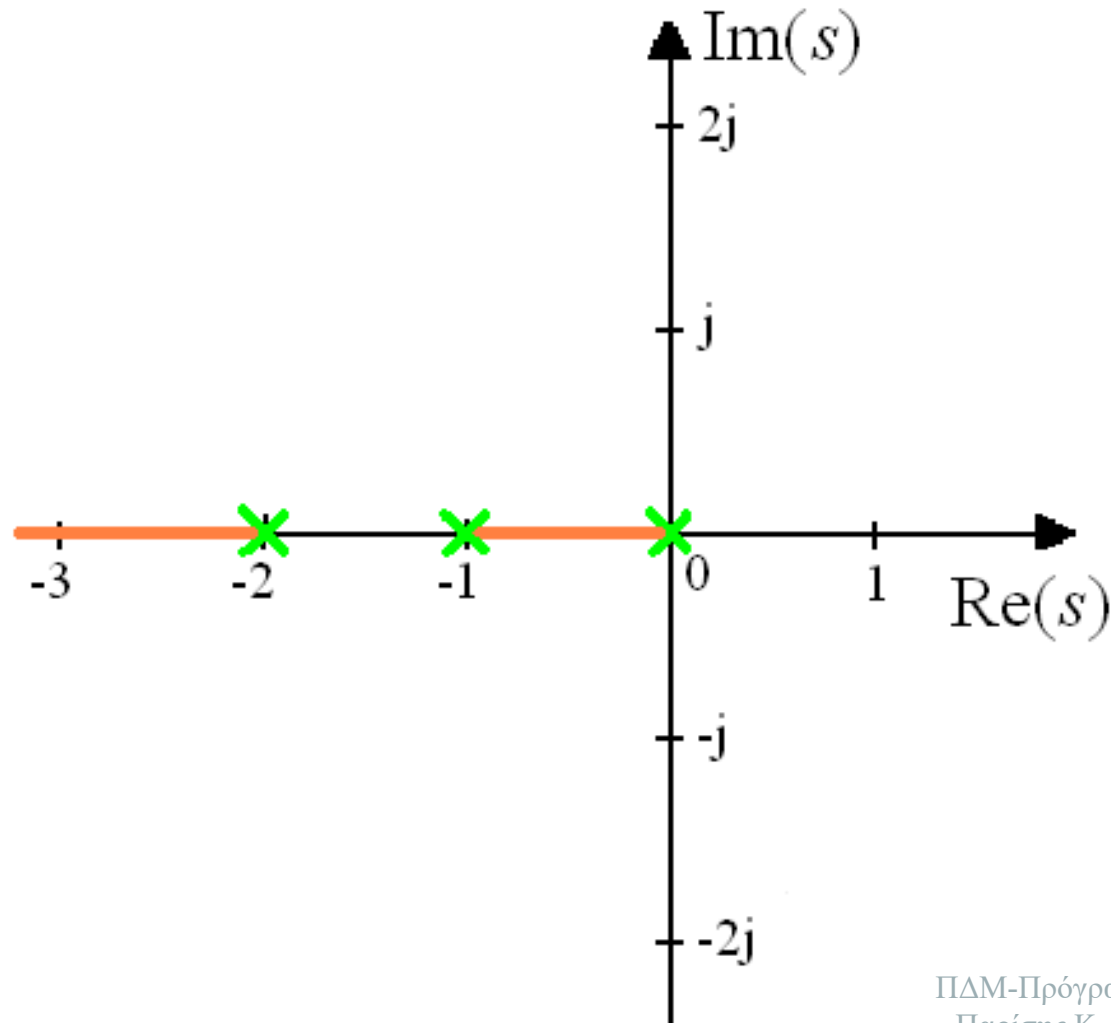
$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

n=3, πόλοι:  $p_1 = 0$ ;  $p_2 = -1$ ;  $p_3 = -2$

m=0, κανένα μηδενικό



**ΒΗΜΑ 2° :** Ένα τμήμα του άξονα των πραγματικών αριθμών μπορεί να είναι κλάδος του Γ.Τ.Ρ. αν το πλήθος των πόλων και των μηδενικών που βρίσκονται δεξιά του κλάδου είναι περιττό. (για  $K \geq 0$ ).



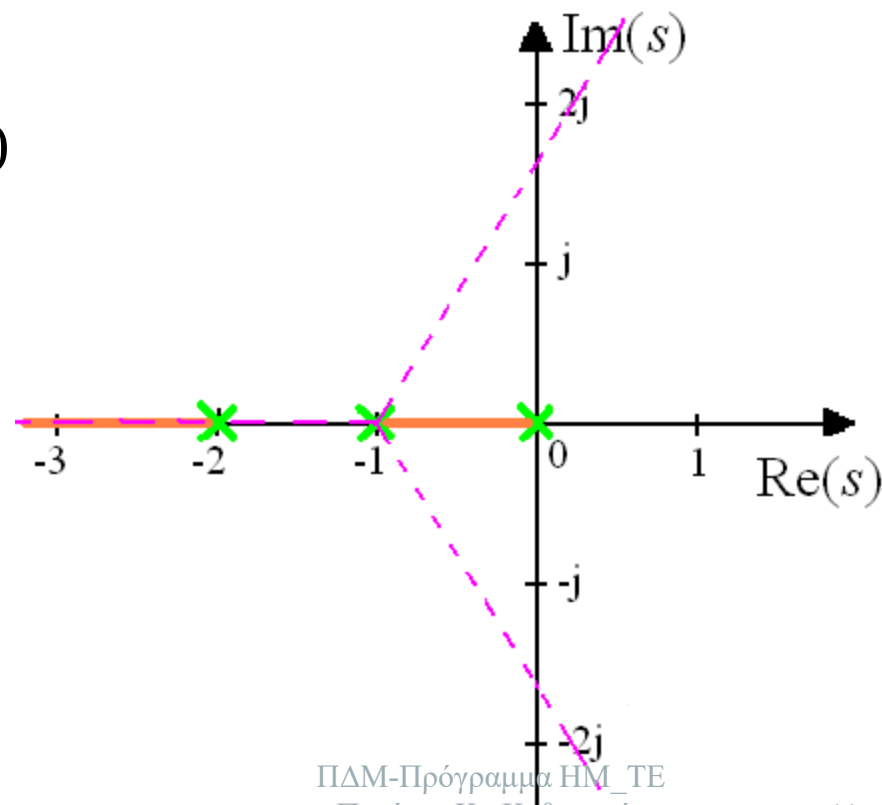
## ΒΗΜΑ 3ο: Υπολογισμός των ασύμπτωτων

$$\sigma_a = \frac{\sum_n (-p_i) - \sum_m (-z_i)}{n - m}$$

$$\sigma_a = \frac{(-p_1) + (-p_2) + (-p_3)}{3 - 0} = \frac{0 - 1 - 2}{3} = -1$$

$$\varphi_\rho = \frac{(2\rho + 1)180^\circ}{n - m} \quad \rho = 0, 1, 2, \dots, (n - m - 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi_0 = \frac{180^\circ (2 \times 0 + 1)}{3 - 0} = 60^\circ \\ \varphi_1 = \frac{180^\circ (2 \times 1 + 1)}{3 - 0} = 180^\circ \\ \varphi_2 = \frac{180^\circ (2 \times 2 + 1)}{3 - 0} = 300^\circ \end{cases}$$



# ΒΗΜΑ 4ο: Υπολογισμός σημείου αποχώρησης

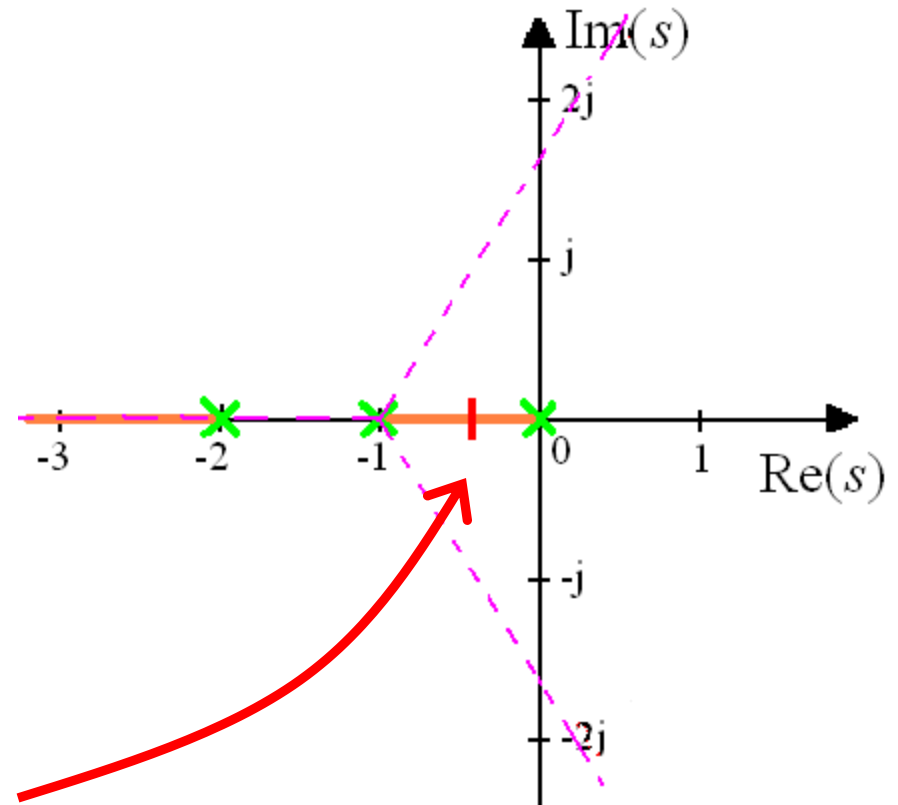
$$K = \frac{-1}{G(s)H(s)} = -s(s+1)(s+2)$$

$$K = -s^3 - 3s^2 - 2s$$

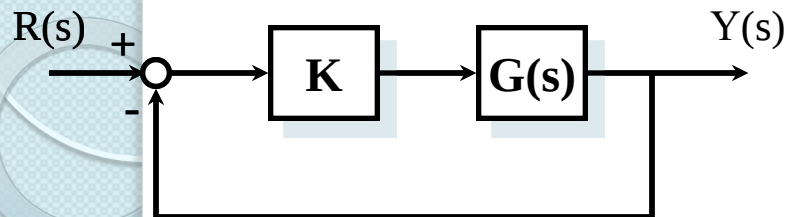
$$\frac{dK}{ds} = 0$$

$$-3s^2 - 6s - 2 = 0$$

$$s_1 = -1.5774, \quad s_2 = -0.4226$$

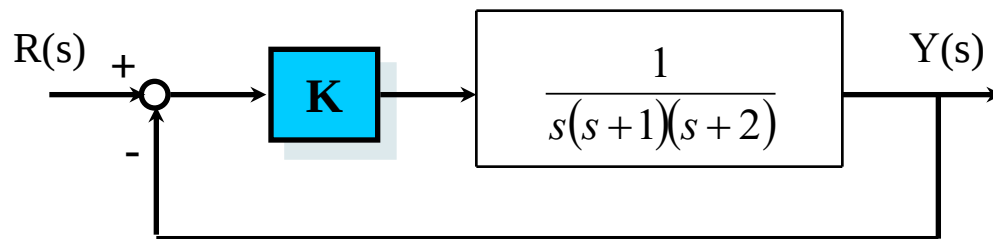


## ΒΗΜΑ 5ο: Υπολογισμός $K_{cr}$ και $\omega_{cr}$ με το κριτήριο Routh-Hurwitz

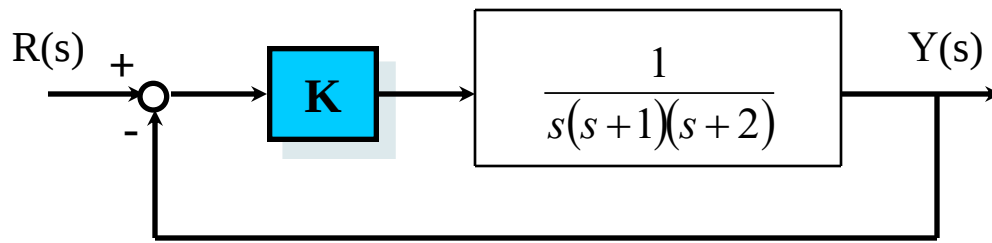


εάν  $K > 0$

Για ποιές τιμές του  $K$  το σύστημα είναι **ευσταθές** ?



### Υπολογισμός της Χαρακτηριστικής Εξίσωση



### Χαρακτηριστική εξίσωση

$$X.E. = 1 + G(s)H(s) = 0 \quad \text{επειδή} \quad G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \quad \text{και} \quad H(s) = 1 \Rightarrow$$

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

Πίνακας Routh-Hurwitz

$$s^3: \quad 1 \quad 2 \quad 0$$

$$s^2: \quad 3 \quad K \quad 0$$

$$s^1: \quad \frac{6-K}{3} \quad 0$$

$$s^0: \quad K \quad 0$$

$$\frac{6-K}{3} > 0 \Rightarrow 6-K > 0 \Rightarrow K < 6$$

$$K > 0$$

**Σύστημα ευσταθές για:  $0 < K < 6$**

$$3s^2 + K_{cr} = 0 \Rightarrow 3s^2 + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$3s^2 = -6 \Rightarrow s = \pm j\sqrt{2}$$

$$s = j\omega_{cr} \Rightarrow \omega_{cr} = \sqrt{2}$$

