

KPITHPIO.

ROUTH

ΑΣΚΗΣΗ.

Ποια τα ευημεράσματα για την ευστάθεια των συστημάτων για τα οποία δίνεται η χαρακτηριστική εξίσωση:

α) $s^4 + 2s^3 + 6s^2 + 7s + 5 = 0.$

β) $s^4 + 2s^3 + 6s^2 + 10s + 7 = 0.$

γ) $s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10 = 0$

ΛΥΣΗ.

α) ΠΙΝΑΚΑΣ ROUTH.

s^4	1	6	5
s^3	2	7	0
s^2	$b_1 = 2,5$	$b_2 = +5$	0
s^1	$c_1 = 3$	$c_2 = 0$	0
s^0	$d_1 = 5$		

Δεν παρατηρούνται αλλαγές προδήμου στην πρώτη στήλη του πίνακα Routh, οπότε το σύστημα είναι ευσταδές (σταθερό).

$$b_1 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}}{2} = -\frac{[(1)(7) - (2)(6)]}{2} = -\frac{(7-12)}{2} = -\frac{(-5)}{2} = +2,5$$

$$b_2 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}{2} = -\frac{[(1)(0) - (2)(5)]}{2} = -\frac{(-10)}{2} = +5$$

$$c_1 = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 2,5 & 5 \end{vmatrix}}{2,5} = -\frac{(10 - 17,5)}{2,5} = -\frac{(-7,5)}{2,5} = +3$$

$$c_2 = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2,5 & 0 \end{vmatrix}}{2,5} = -\frac{(0)}{2,5} = 0$$
$$d_1 = -\frac{\begin{vmatrix} 2,5 & 5 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = -\frac{(-5c_1)}{c_1} = +5$$

β) Πίνακας ROUTH

$$\begin{array}{l|lll}
 s^4 & 1 & 6 & 7 \\
 s^3 & 2 & 10 & 0 \\
 s^2 & b_1=+1 & b_2=7 & 0 \\
 s^1 & c_1=-4 & 0 & \\
 s^0 & d_1=+7 & &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 b_1 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 10 \end{vmatrix}}{2} = -\frac{(10-12)}{2} = -\frac{(-2)}{2} = +1 \\
 b_2 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}{2} = -\frac{(-14)}{2} = +7 \\
 c_1 = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}}{1} = -(14-10) = -4 \\
 d_1 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = -\frac{(-7c_1)}{c_1} = +7
 \end{array}$$

Επειδή υπάρχουν δύο εναλλαγές
 προβήμου στην πρώτη στήλη του
 πίνακα Routh ($1 \rightarrow -4 \rightarrow +7$)
 η Χ.Ε. έχει δύο ρίζες στο δεξιό
 ημιεπίπεδο s και το σύστημα
 είναι αβταδές.

8) Πίνακας Routh

s^5	1	2	11
s^4	2	4	10
s^3	$b_1 = \varepsilon$	b_2	0
s^2	c_1	c_2	0
s^1	d_1	0	
s^0	e_1		

$$b_1 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{2} = -\frac{(4-4)}{2} = 0 \rightarrow \varepsilon$$

* Όταν ένα μόνο στοιχείο της πρώτης στήλης είναι μηδέν, μπορούμε να το αντικαταστήσουμε με ένα μικρό θετικό αριθμό (ε) που επιτρέπεται να τείνει στο μηδέν, αφού συνηθισμένα τον πίνακα.

$$b_2 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 2 & 10 \end{vmatrix}}{2} = -\frac{(10-22)}{2} = -\frac{(-12)}{2} = +6$$

$$c_1 = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ \varepsilon & 6 \end{vmatrix}}{\varepsilon} = -\frac{(12-4\varepsilon)}{\varepsilon} = -\frac{12}{\varepsilon} + \frac{4\varepsilon}{\varepsilon} =$$

$$\approx -\frac{12}{\varepsilon}$$

$$c_2 = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ \varepsilon & 0 \end{vmatrix}}{\varepsilon} = -\frac{(-10\varepsilon)}{\varepsilon} = +10$$

$$d_1 = -\frac{\begin{vmatrix} \varepsilon & 6 \\ -\frac{12}{\varepsilon} & 10 \end{vmatrix}}{-\frac{12}{\varepsilon}} = -\frac{\left[10\varepsilon - \left[-\frac{12}{\varepsilon}\right] \cdot 6\right]}{-\frac{12}{\varepsilon}} =$$

$$= \frac{10\varepsilon}{\frac{12}{\varepsilon}} + \frac{\frac{72}{\varepsilon}}{\frac{12}{\varepsilon}} = \frac{10\varepsilon^2}{12} + \frac{72}{12}$$

$$\approx +6$$

$$e_1 = -\frac{\begin{vmatrix} c_1 & 10 \\ d_1 & 0 \end{vmatrix}}{d_1} = -\frac{(-10d_1)}{d_1} = +10$$

Επειδή υπάρχουν δύο εναλλαγές προσημίου στην πρώτη στήλη του πίνακα Routh

$$\left(\varepsilon \rightarrow \frac{12}{\varepsilon} \rightarrow \approx +6 \right)$$

η Χ.Ε. έχει δύο ρίζες στο δεξιό ημιεπίπεδο s και το σύστημα είναι ασταθές.

Να προσδιοριστεί η περιοχή τιμών της παραμέτρου K ώστε το σύστημα που έχει χαρακτηρίστική εξίσωση.

$$s^3 + 2s^2 + 4s + K = 0, \text{ να είναι σταθερό.}$$

Επίσης να βρεθεί η κρίσιμη συχνότητα ταχύνωσης ω_c .

ΛΥΣΗ

Πινakas Routh.

$$\begin{array}{c|ccc} s^3 & 1 & 4 & 0 \\ s^2 & 2 & K & 0 \\ s^1 & b_1 & 0 & \\ s^0 & c_1 & & \end{array}$$

$$b_1 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & K \end{vmatrix}}{2} = -\frac{(K-8)}{2} = \frac{8-K}{2}$$

$$c_1 = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & K \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = -\frac{(-Kb_1)}{b_1} = +K$$

Για να είναι το σύστημα σταθερό
θα πρέπει οι όροι της πρώτης
στήλης να είναι θετικοί
Δηλαδή.

$$\left. \begin{array}{l} b_1 > 0 \\ c_1 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{8-K}{2} > 0 \\ K > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 8-K > 0 \\ K > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -K > -8 \\ K > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} K < 8 \\ K > 0 \end{array} \right\}$$

Συνεπώς $\boxed{0 < K < 8}$

Για την εύρεση της κρίσιμης (οριακής) τιμής του K και ευτάδια αρκεί να μηδενιστεί ο όρος της βίρας s^1 δηλαδή

$$b_1 = 0 \Rightarrow \frac{8 - K_c}{2} = 0 \Rightarrow 8 - K_c = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -K_c = -8 \Rightarrow \boxed{K_c = 8}$$

Η κρίσιμη (γωνιακή) συχνότητα ταλάντωσης βρίσκεται ως εξής:

$$2s^2 + K_c = 0 \Rightarrow 2s^2 + 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2s^2 = -8 \Rightarrow s^2 = -4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{s^2} = \pm \sqrt{-4} \Rightarrow s = \pm j2 \text{ άρα}$$

$$\boxed{\omega_c = 2 \text{ rad/sec}}$$