

ΧΡΟΝΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ

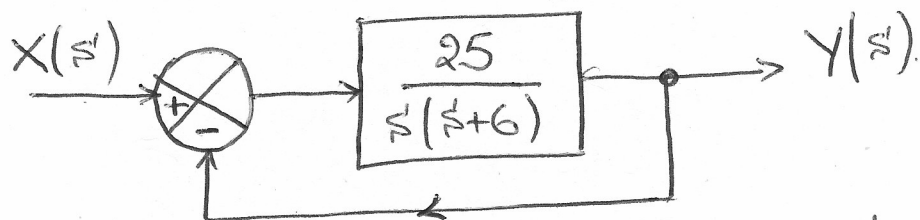
2ης ΤΑΞΗΣ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1:

-1-

Στο εικονιζόμενο σύστημα αυτομάτου ελέγχου, η είσοδος είναι η μοναδιαία βαθμίδα.

Υπολογίστε τα ω_d , t_r , t_p , M_p και t_s .



$$X(s') = \frac{1}{s'}$$

ΛΥΣΗ

$$F(s') = \frac{Y(s')}{X(s')} = \frac{G(s')}{1 + G(s')H(s')} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(s') = \frac{Y(s')}{X(s')} = \frac{\frac{25}{s'(s'+6)}}{1 + \frac{25}{s'(s'+6)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(s') = \frac{Y(s')}{X(s')} = \frac{\frac{25}{s'(s'+6)}}{\frac{s'(s'+6) + 25}{s'(s'+6)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(s') = \frac{Y(s')}{X(s')} = \frac{25}{s'^2 + 6s' + 25}$$

ΘΕΩΡΙΑ

$$F(s') = \frac{Y(s')}{X(s')} = \frac{\omega_n^2}{s'^2 + 2\zeta\omega_n s' + \omega_n^2} \quad \text{για } X(s') = \frac{1}{s'}$$

$$s'^2 + 2\zeta\omega_n s' + \omega_n^2 \equiv s'^2 + 6s' + 25$$

Εξισώνω τους συντελεστές των ομοίων όρων.

$$\omega_n^2 = 25 \quad (1)$$

$$2\zeta\omega_n = 6 \quad (2)$$

$$\sqrt{\omega_n^2} = \sqrt{25} \Rightarrow$$

$$\boxed{\omega_n = 5 \text{ rad/sec}}$$

$$\zeta = \frac{6}{2\omega_n} \Rightarrow \zeta = \frac{6}{2(5)} \Rightarrow \boxed{\zeta = 0,6}$$

$$\bullet \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \Rightarrow \omega_d = 5 \sqrt{1 - (0,6)^2} \Rightarrow \boxed{\omega_d = 4 \text{ rad/sec}}$$

$$\bullet t_r = \frac{\pi - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}\right)}{\omega_d} = \frac{3,14 - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1 - (0,6)^2}}{0,6}\right)}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{t_r = 0,553 \text{ sec}}$$

$$\bullet t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \Rightarrow t_p = \frac{3,14}{4} \Rightarrow \boxed{t_p = 0,785 \text{ sec}}$$

$$\bullet M_p = e^{-\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1 - \zeta^2}}} \Rightarrow M_p = e^{-\frac{(0,6)(3,14)}{\sqrt{1 - (0,6)^2}}} \Rightarrow \boxed{M_p = 0,095}$$

Αρα η επί τοις εκατό υπέρβωση είναι:

$$\bullet \boxed{M_p \% = 9,5 \%}$$

$$\bullet t_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} \Rightarrow t_s' = \frac{4}{(0,6)(5)} \Rightarrow \boxed{t_s' = 1,33 \text{ sec}} \left[\begin{array}{l} \text{για κριτήριο ζώνης} \\ 2\% \end{array} \right]$$

ή

$$\bullet t_s' = \frac{3}{\zeta \omega_n} \Rightarrow t_s' = \frac{3}{(0,6)(5)} \Rightarrow \boxed{t_s' = 1 \text{ sec}} \left[\begin{array}{l} \text{για κριτήριο ζώνης} \\ 5\% \end{array} \right]$$

Η συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος ελέγχου δίνεται:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s^2 + 10s + K}$$

όπου K = παράμετρος ενίσχυσης του συστήματος, το οποίο διεχειρίζεται από είσοδο της μορφής της μοναδιαίας βαθμίδας.

Για $K=10, 100$ ή 1000 ζητούνται:

- Η φυσική ιδιοσυχνότητα χωρίς απόσβεση, ω_n .
- Ο συντελεστής απόσβεσης, ζ .
- Η φυσική ιδιοσυχνότητα με απόσβεση, ω_d .
- Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης, $s_{1,2}$.
- Η μέγιστη τιμή της παραμέτρου K για ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης πραγματικές και άνισες.
- Το ποσοστό υπέρυψωσης $M_p\%$.
- Η χρονική απόκριση του συστήματος $y(t)$.
- Παρατηρήσεις για την επίδραση της παραμέτρου K στα χαρακτηριστικά του συστήματος.

ΛΥΣΗ

Από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s^2 + 10s + K}$$

συμπεραίνουμε ότι πρόκειται για σύστημα 2ης τάξης με μοναδιαία βηματική είσοδο οπότε έχουμε τα εξής:

$$a) \quad \omega_n^2 = K \Rightarrow \sqrt{\omega_n^2} = \sqrt{K} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{K} \Rightarrow$$

Για $K=10$, $\omega_n = 3,16 \text{ rad/sec}$
 Για $K=100$, $\omega_n = 10 \text{ rad/sec}$
 Για $K=1000$, $\omega_n = 31,6 \text{ rad/sec}$

$\beta) \quad \zeta = \frac{10}{2\omega_n} \Rightarrow \text{Για } K=10, \quad \zeta = \frac{10}{(2)(3,16)} \Rightarrow \zeta \approx 1,58.$
 $\zeta = \frac{10}{(2)(10)} \Rightarrow \zeta = 0,5$
 $\zeta = \frac{10}{(2)(31,6)} \Rightarrow \zeta = 0,158$

$\gamma) \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \Rightarrow \text{Για } K=10, \quad \omega_d \text{ δεν υπάρχει αφού } \zeta > 1$
 $\omega_d = 10 \sqrt{1-(0,5)^2} \Rightarrow \omega_d = 8,66 \text{ rad/sec}$
 $\omega_d = 31,6 \sqrt{1-(0,158)^2} \Rightarrow \omega_d \approx 31,2 \text{ rad/sec}$

$\delta) \quad s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \Rightarrow \text{Για } K=10, \quad s_1 = -1,125 \text{ ή } s_2 = -9,875$
 $s_{1,2} = -5 \pm j 8,66$
 $s_{1,2} = -5 \pm j 31,2$

$\epsilon) \quad \text{Απο τη χαρακτηριστική εξίσωση } s^2 + 10s + K = 0,$
 προκύπτει:

$$s_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4K}}{2}$$

Για ρίζες πραγματικές και άνιμες πρέπει:

η διακρίνουσα $\Delta \geq 0$ δηλαδή $100 - 4K > 0 \Rightarrow -4K > -100 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 4K < 100 \Rightarrow \boxed{K_{\max} = 25}$

6Τ)

Για $K=10$, δεν υπάρχει $M_p\%$

$$M_p\% = 100 \cdot e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$\Rightarrow \text{Για } K=100, M_p\% = 100e^{-\frac{(0,5)(3,14)}{\sqrt{1-(0,5)^2}}} \Rightarrow M_p\% \approx 16,3\%$$

$$\text{Για } K=1000, M_p\% = 100e^{-\frac{(0,158)(3,14)}{\sqrt{1-(0,158)^2}}} \Rightarrow M_p\% \approx 60\%$$

δ) Για $K=10$ επειδή $\zeta > 1$ η χρονική απόκριση είναι:

$$y(t) = 1 - e^{-st} (\cosh 3,88t + 1,29 \sinh 3,88t)$$

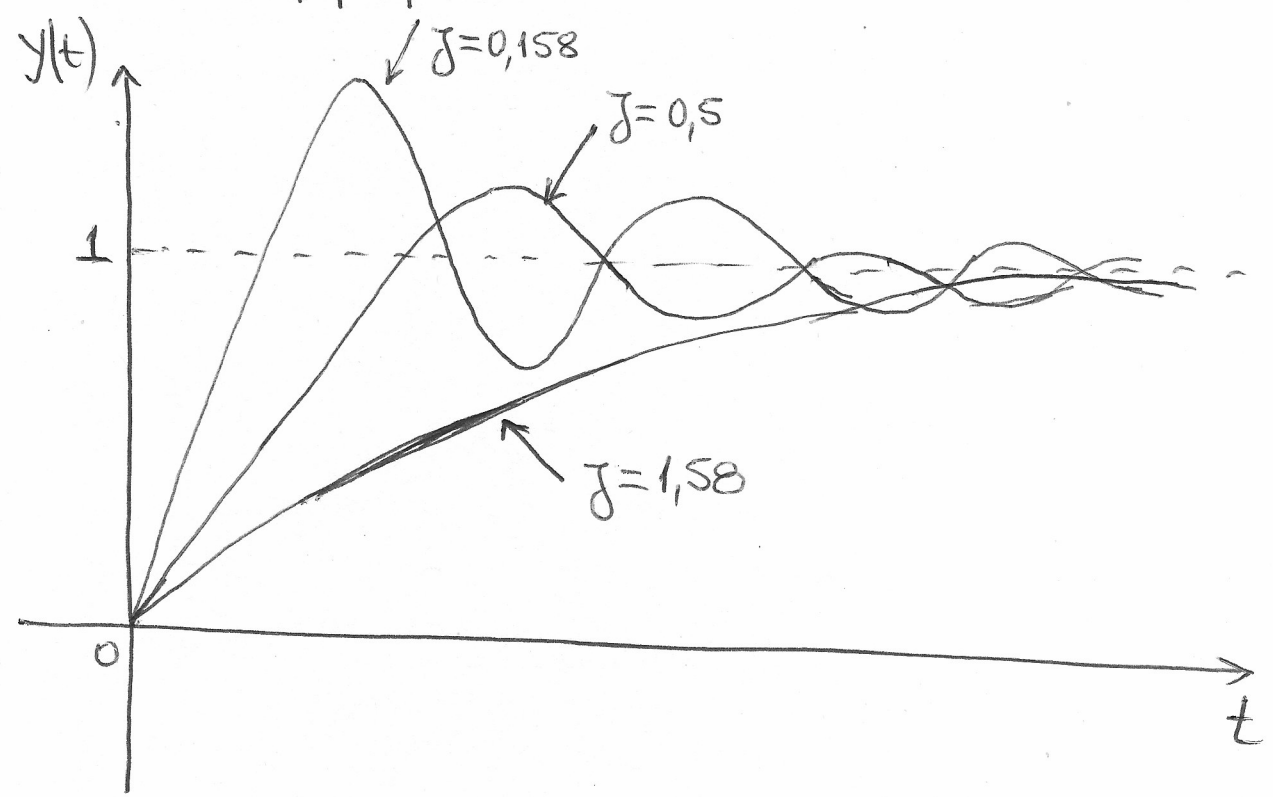
Για $K=100$ επειδή $0 < \zeta < 1$ η χρονική απόκριση είναι:

$$y(t) = 1 - 1,15e^{-st} \sin(8,66t + 60^\circ)$$

Ενώ για $K=1000$ είναι:

$$y(t) = 1 - 1,05e^{-st} \sin(31,2t + 80,24^\circ)$$

Προβλεχχιστικά η γραφική παράσταση $y(t)$ για τις τρεις περιπτώσεις.

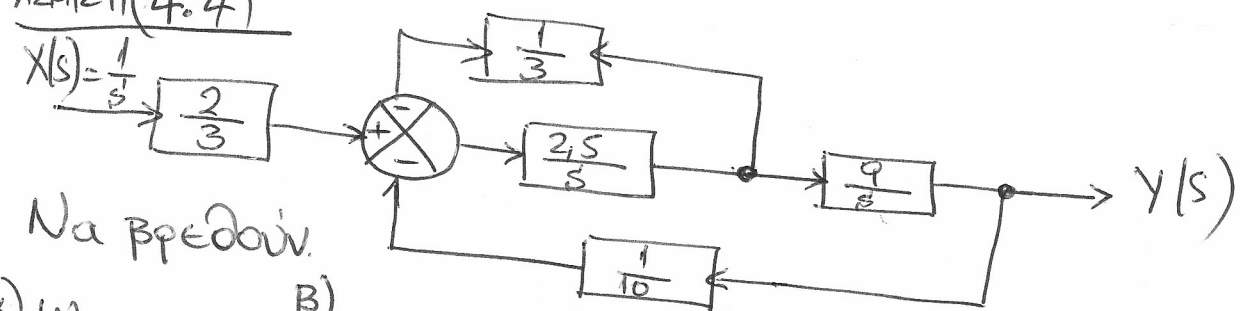


- η) i) Αυξανόμενη της τιμής της παραμέτρου K αυξάνεται το ποσοστό υπέρβλεψης λόγω ελάττωσης του συντελεστή απόβλεψης γ .
- ii) Ο χρόνος αποκατάστασης είναι για κριτήριο γ ώνης 2%:

$$T_s = \frac{4}{\gamma \omega_n} = \begin{cases} 0,80115 \text{ sec} & \text{για } K=10 \\ 0,8 \text{ sec} & \text{για } K=100 \\ 0,80115 \text{ sec} & \text{για } K=1000 \end{cases}$$

Δηλαδή είναι ελάχιστα μικρότερος για $K=100$

Γενικά ο χρόνος αποκατάστασης γίνεται ελάχιστος για $\boxed{\gamma = 0,707}$

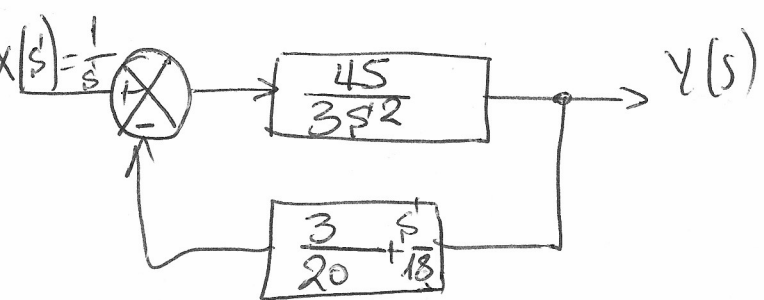
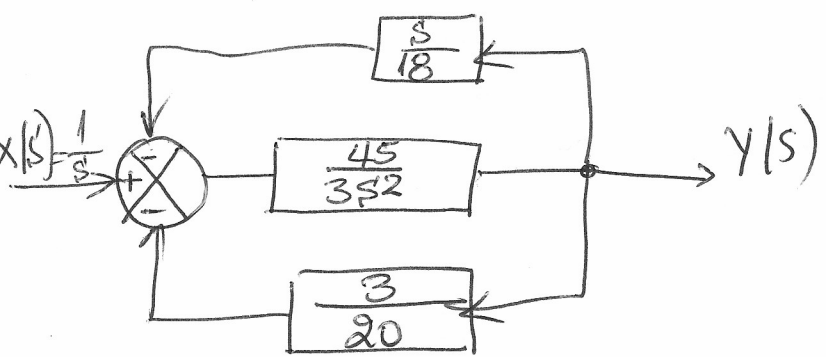
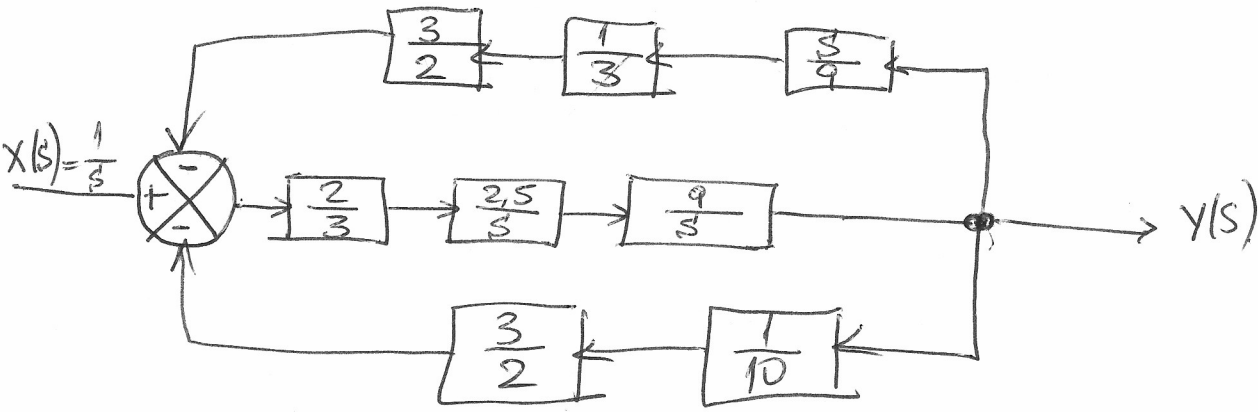


Να βρεθούν.

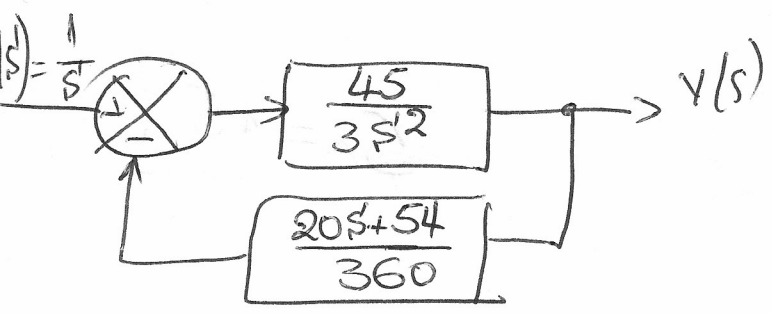
α) $\omega_n, J, \omega_d, y(t) = ?$

Να υπολογιστεί και σχεδιαστεί η χρονική απόκριση του συστήματος.

ΛΥΣΗ.



$$\frac{(3)(18) + 20s}{(20) \cdot (18)} = \frac{54 + 20s}{360}$$



$$F(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{45}{3s^2}}{1 + \frac{45(20s+54)}{(3s^2)(360)}} \Rightarrow \frac{45}{s^2}$$

$$F(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{45}{3s^2}}{\frac{1080s^2 + 900s + 2430}{1080s^2}} \Rightarrow \frac{45}{2430}$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{(45)(1080s^2)}{3s^2(1080s^2 + 900s + 2430)}$$

$$F(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{48600}{3240s^2 + 2700s + 7290} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{48600}{3240}}{s^2 + \frac{2700}{3240}s + \frac{7290}{3240}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{15}{s^2 + 0,84s + 2,25} \Rightarrow$$

$$2,25 \cdot x = 15 \quad x = \frac{15}{2,25}$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{(6,67)(2,25)}{s^2 + 0,84s + 2,25}$$

$$2,25x = 15$$

$$x = \frac{15}{2,25} \Rightarrow$$

$$F(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = (6,67) \frac{2,25}{s^2 + 0,84s + 2,25}$$

$$x = 6,67$$

$$F(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K \omega_n^2}{s'^2 + 2\zeta\omega_n s' + \omega_n^2}$$

$$\boxed{K = 6,67} \quad (1)$$

$$2) \omega_n^2 = 2,25 \quad (2) \Rightarrow \omega_n = \sqrt{2,25} \Rightarrow \boxed{\omega_n = 1,5 \text{ rad/sec}}$$

$$2\zeta\omega_n = 0,84 \quad (3) \Rightarrow \zeta = \frac{0,84}{2(\omega_n)} \Rightarrow \zeta = \frac{0,84}{2(1,5)} \Rightarrow \boxed{\zeta = 0,28 < 1}$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \Rightarrow \boxed{\omega_d = 1,44 \text{ rad/sec}}$$

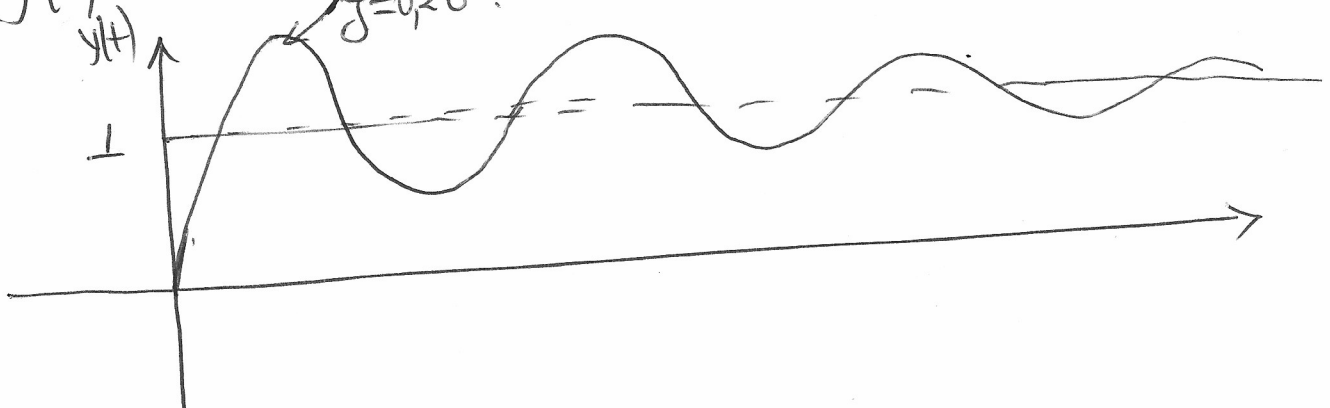
β) Η χρονική απόκριση αφού $0 < \zeta < 1$ δίνεται από το

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_d t + \varphi)$$

$$\text{όπου } \varphi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \Rightarrow \varphi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - (0,28)^2}}{0,28} \Rightarrow \varphi = \tan^{-1} \left(\frac{0,96}{0,28} \right) \Rightarrow$$

$$\varphi = \tan^{-1} 3,43 \Rightarrow \boxed{\varphi = 1,28 \text{ rad}} \quad \vee \quad \boxed{\varphi = 73,7^\circ}$$

$$y(t) = 1 - 1,085 e^{-0,42 t} \sin(1,44 t + 1,28)$$



8) $t_r = ?$, $t_p = ?$, $M_p / \sigma = ?$ and t_s' .