

• Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

- Ο αντίστροφος μετασχηματισμός είναι η διαδικασία υπολογισμού της συναρτήσεως $g(t)$ όταν γνωρίζουμε την συνάρτηση $G(s)$.

* *Περίπτωση Διακεκριμένων Πόλων*

Έστω η συνάρτηση $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}, m < n$

Γράφουμε τη συνάρτηση στην παρακάτω μορφή, αφού υπολογίσουμε τις ρίζες του παρονομαστή, που ονομάζονται και πόλοι της συνάρτησης.

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} = \frac{k_1}{s + p_1} + \frac{k_2}{s + p_2} + \dots + \frac{k_n}{s + p_n} \quad (1)$$

Υπολογίζουμε τις τιμές των συντελεστών k_i από τη σχέση:

$$k_i = \lim_{s \rightarrow -p_i} G(s) \cdot (s + p_i)$$

Χρησιμοποιώντας τους πίνακες η σχέση (1) γίνεται:

$$g(t) = k_1 e^{-p_1 t} + k_2 e^{-p_2 t} + \dots + k_n e^{-p_n t}$$

$p_1, p_2, \dots, p_n$ και $z_1, z_2, \dots, z_m$ είναι είτε πραγματικοί είτε μιγαδικοί αριθμοί.

* Περίπτωση πολλαπλών πόλων

- Εάν η συνάρτηση $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}$, $m < n$ έχει πολλαπλές ρίζες (πόλους),

τότε οι συντελεστές που αντιστοιχούν στην πολλαπλή ρίζα υπολογίζονται ως εξής :

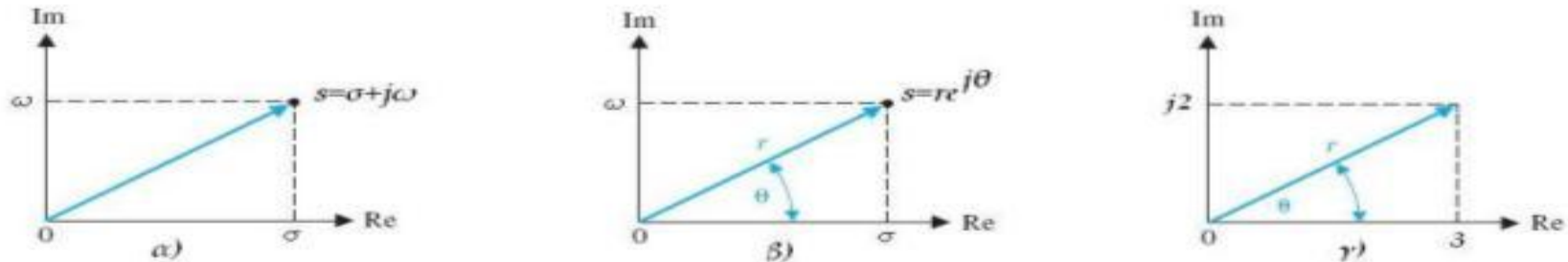
$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{(s + z_1) \cdot (s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)^r (s + p_2) \cdots (s + p_n)} =$$
$$= \frac{k_{11}}{s + p_1} + \frac{k_{12}}{(s + p_1)^2} + \dots + \frac{k_{1r}}{(s + p_1)^r} + \frac{k_2}{s + p_2} + \dots + \frac{k_n}{s + p_n}$$

$$k_{ij} = \frac{1}{(r - j)!} \lim_{s \rightarrow -p_i} \left[\frac{d^{(r-j)}}{ds^{(r-j)}} \left(G(s) \cdot (s + p_i)^r \right) \right]$$

όπου

- i εκφράζει την ρίζα (απλή ή πολλαπλή) της οποίας τον συντελεστή υπολογίζουμε.
- j εκφράζει την θέση του συντελεστή k της πολλαπλής ρίζας με τιμές από 1 μέχρι r .
- r ο αριθμός που εκφράζει την πολλαπλότητα της ρίζας.

• Ιδιότητες Μιγαδικών Αριθμών

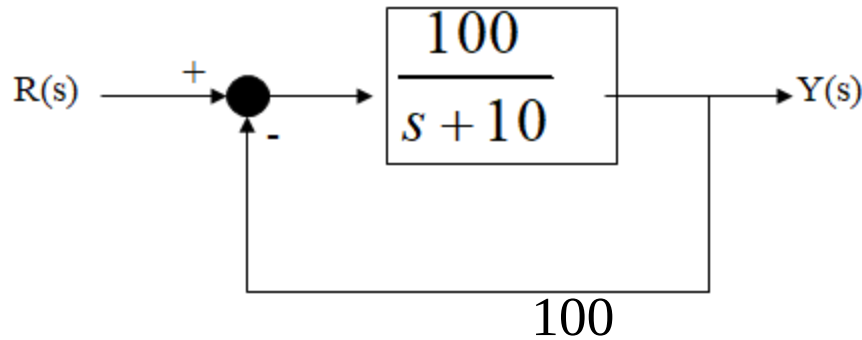


Εικόνα 1. α) Καρτεσιανή, β) Εκθετική γ) Πολική αναπαράσταση μιγαδικού αριθμού

α/α	$s = \sigma + j\omega = re^{j\theta} = r\angle\theta = r(\cos\theta + j\sin\theta)$
1	$r = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$, μέτρο μιγάδα
2	$\theta = \tan^{-1} \frac{\omega}{\sigma}, \quad \sigma, \omega > 0$ $\theta = -\tan^{-1} \frac{ \omega }{\sigma}, \quad \sigma > 0 \text{ και } \omega < 0$ $\theta = 180^\circ - \tan^{-1} \frac{\omega}{ \sigma }, \quad \sigma < 0 \text{ και } \omega > 0$ $\theta = 180^\circ + \tan^{-1} \frac{ \omega }{ \sigma }, \quad \sigma, \omega < 0$
3	$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos\theta$
4	$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\sin\theta$
5	$(\sigma_1 + j\omega_1) + (\sigma_2 + j\omega_2) = ((\sigma_1 + \sigma_2) + j(\omega_1 + \omega_2))$
6	$(\sigma_1 + j\omega_1) - (\sigma_2 + j\omega_2) = ((\sigma_1 - \sigma_2) + j(\omega_1 - \omega_2))$
7	$r_1 e^{j\theta_1} \cdot r_2 e^{j\theta_2} = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$
8	$\frac{r_1 e^{j\theta_1}}{r_2 e^{j\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$

Παραδείγματα

1. Να υπολογιστεί η χρονική απόκριση της εξόδου $y(t)$ του εικονιζόμενου συστήματος, όταν διεγείρεται με μοναδιαία βηματική είσοδο.

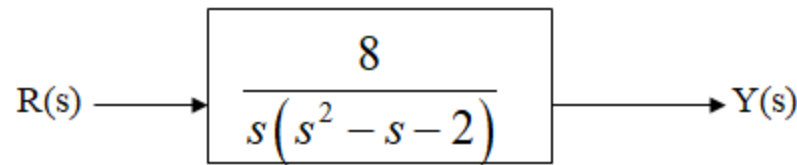


$$Y(s) = T(s)R(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} R(s) = \frac{\frac{100}{s+10}}{1 + \frac{100}{s+10}} \cdot \frac{1}{s} = \frac{100}{s+110} \cdot \frac{1}{s} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+110}$$

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{100}{s(s+110)} = \frac{100}{110} \\ K_2 &= \lim_{s \rightarrow -110} (s+110) \frac{100}{s(s+110)} = \frac{-100}{110} \end{aligned} \right\} \Rightarrow Y(s) = \frac{100}{110} \cdot \frac{1}{s} - \frac{100}{110} \cdot \frac{1}{s+110} \Rightarrow$$

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = \frac{100}{110} - \frac{100}{110} e^{-110t} \Rightarrow y(t) = \frac{100}{110} (1 - e^{-110t})$$

2. Να υπολογιστεί η χρονική απόκριση της εξόδου $y(t)$ με μοναδιαία βηματική είσοδο



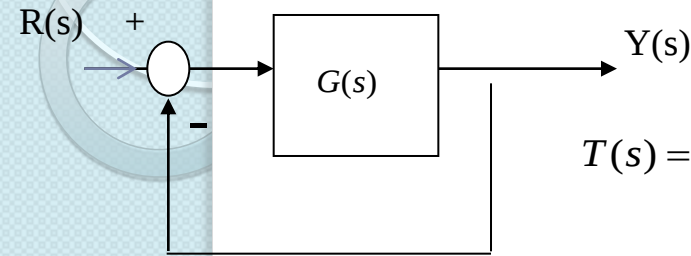
$$Y(s) = T(s)R(s) = \frac{8}{s(s^2 - s - 2)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{8}{s^2(s^2 - s - 2)} = \frac{8}{s^2(s+1)(s-2)} = \frac{K_{11}}{s} + \frac{K_{12}}{s^2} + \frac{K_3}{s+1} + \frac{K_4}{s-2}$$

$$\left. \begin{aligned} K_{11} &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left(\frac{8}{s^2(s+1)(s-2)} \cdot s^2 \right) = \frac{1}{1!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left(\frac{8}{(s+1)(s-2)} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-8(2s-1)}{((s+1)(s-2))^2} = \frac{8}{4} = 2 \\ K_{12} &= \frac{1}{(2-2)!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^0}{ds^0} \left(\frac{8}{s^2(s+1)(s-2)} \cdot s^2 \right) = \frac{1}{0!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{8}{(s+1)(s-2)} = \frac{8}{-2} = -4 \\ K_3 &= \lim_{s \rightarrow -1} \frac{8}{s^2(s+1)(s-2)} \cdot (s+1) = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{8}{s^2(s-2)} = \frac{8}{-3} = -\frac{8}{3} \\ K_4 &= \lim_{s \rightarrow 2} \frac{8}{s^2(s+1)(s-2)} \cdot (s-2) = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{8}{s^2(s+1)} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{2}{s} - \frac{4}{s^2} - \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s-2} \Rightarrow y(t) = \underline{\underline{L^{-1}(Y(s)) = 2 - 4t - \frac{8}{3} \cdot e^{-t} + \frac{2}{3} \cdot e^{2t}}}$$

3. Να υπολογιστεί η χρονική απόκριση του Σ.Κ.Β. για είσοδο μοναδιαία ράμπα με

$$G(s) = \frac{10(s+1)}{s(s-3)}$$



$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{\frac{10(s+1)}{s(s-3)}}{1+\frac{10(s+1)}{s(s-3)}} = \frac{10(s+1)}{s(s-3)+10(s+1)} = \frac{10(s+1)}{s^2+7s+10} = \frac{10(s+1)}{(s+2)(s+5)}$$

$$Y(s) = T(s)R(s) = \frac{10(s+1)}{(s+2)(s+5)} \frac{1}{s^2} = \frac{10(s+1)}{s^2(s+2)(s+5)} = \frac{k_{11}}{s} + \frac{k_{12}}{s^2} + \frac{k_2}{s+2} + \frac{k_3}{s+5}$$

$$k_2 = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{10(s+1)}{s^2(s+5)} = \frac{10(-2+1)}{(-2)^2(-2+5)} = -\frac{5}{6} = -0,83$$

$$k_3 = \lim_{s \rightarrow -5} \frac{10(s+1)}{s^2(s+2)} = \frac{10(-5+1)}{(-5)^2(-5+2)} = \frac{8}{15} = 0,53$$

$$k_{11} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left[\frac{10(s+1)}{s^2+7s+10} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10(s^2+7s+10) - 10(s+1)(2s+7)}{(s+2)^2(s+5)^2} = \frac{100-70}{100} = \frac{30}{100} = \frac{3}{10} = 0,3$$

$$k_{12} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10(s+1)}{(s+2)(s+5)} = 1$$

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = \frac{3}{10} + t - \frac{5}{6}e^{-2t} + \frac{8}{15}e^{-5t}$$

- **Βασικά χαρακτηριστικά συστημάτων ελέγχου**

- ❖ Ευστάθεια

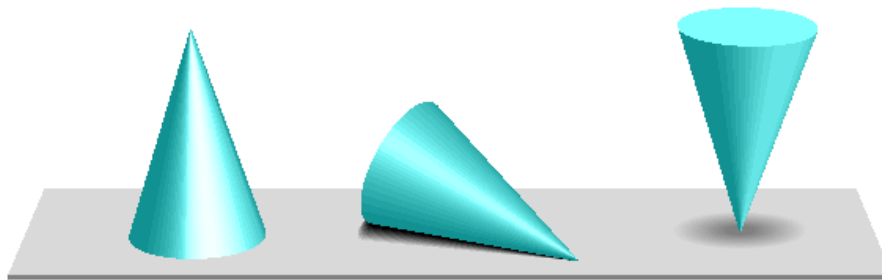
- ❖ Ακρίβεια

- ❖ Ταχύτητα Απόκρισης

- ❖ Ευαισθησία

Ευστάθεια

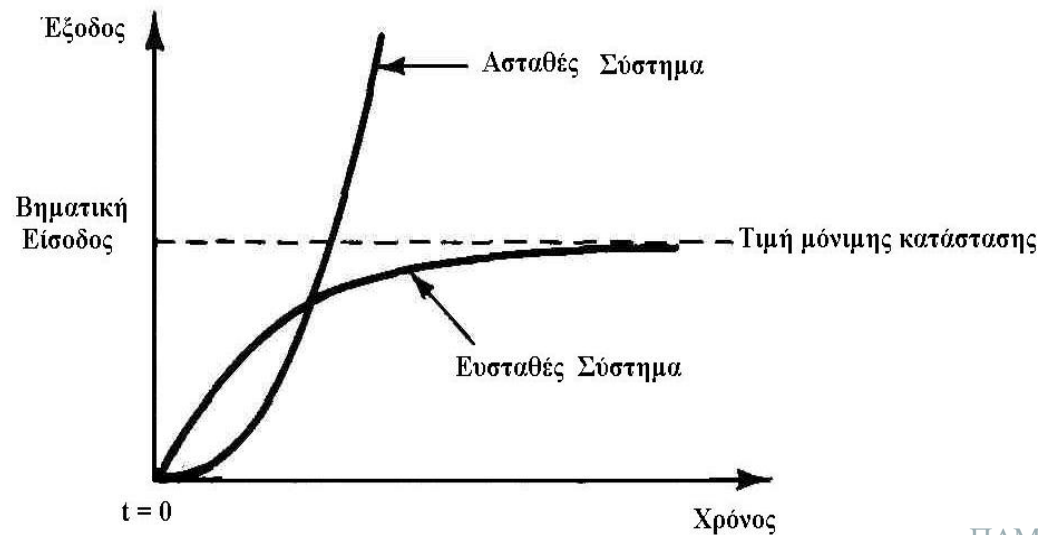
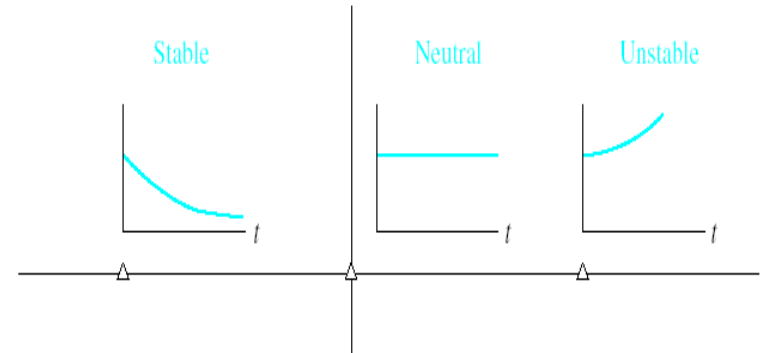
Ένα σύστημα είναι ευσταθές, αν για φραγμένη είσοδο η έξοδος είναι φραγμένη. Η έξοδος ενός ευσταθούς συστήματος βρίσκεται μέσα σε επιτρεπτά όρια, ενώ η έξοδος ενός ασταθούς συστήματος αυξάνει θεωρητικά προς το άπειρο.



(a) Stable

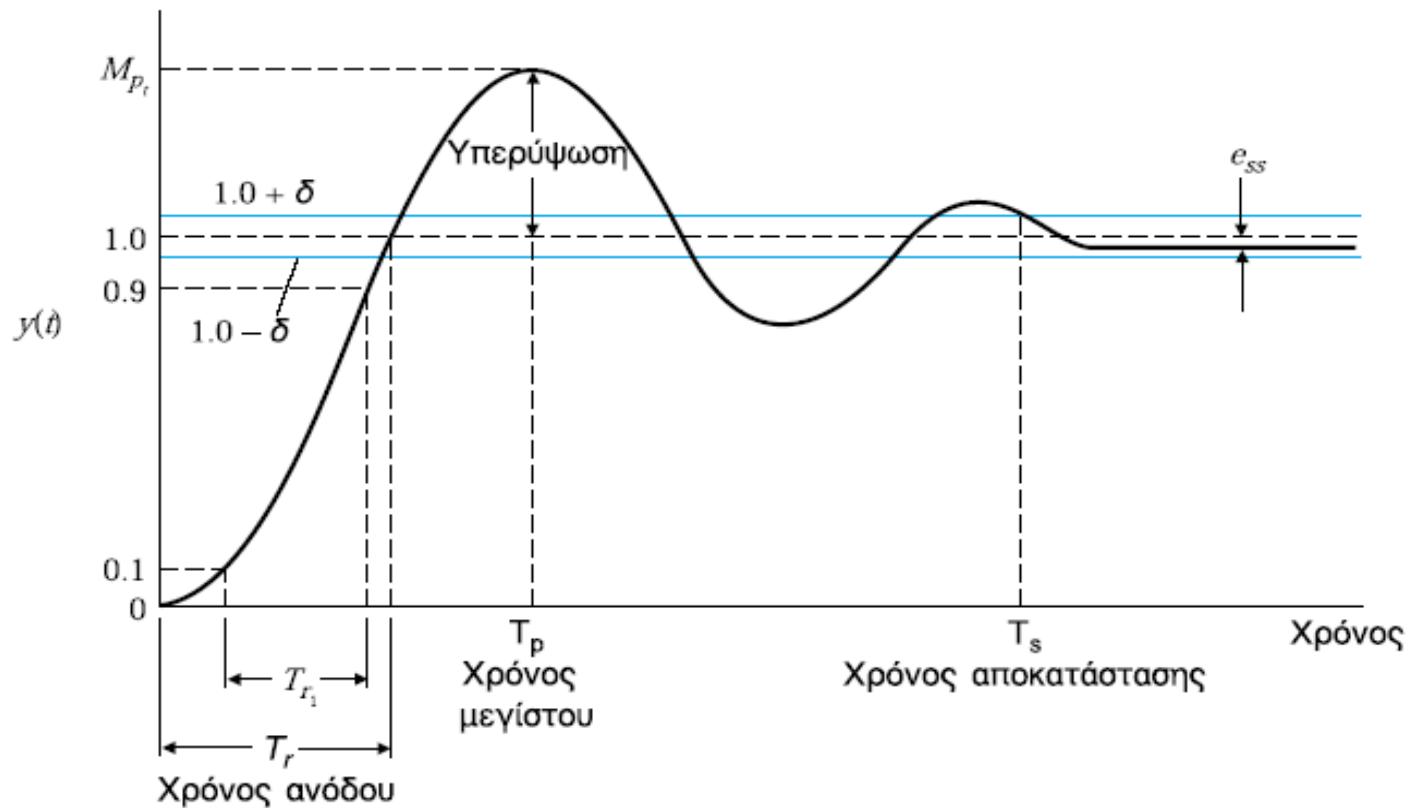
(b) Neutral

(c) Unstable



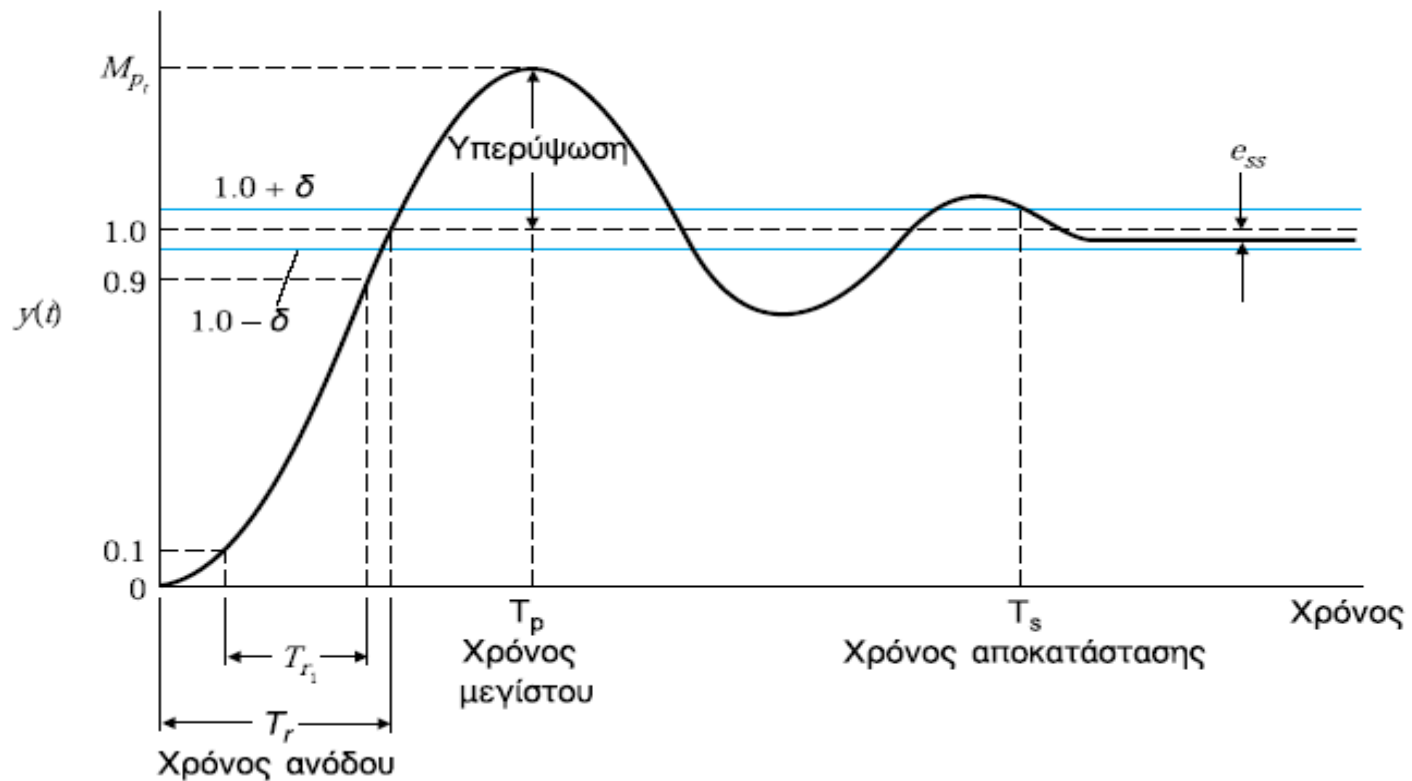
Ακρίβεια

Η απόκλιση μεταξύ επιθυμητής και της πραγματικής τιμής να είναι (εάν είναι δυνατόν) μηδενική ($e_{ss}=0$).



Ταχύτητα Απόκρισης

Ένα σύστημα θα πρέπει να ανταποκρίνεται με ικανοποιητική ταχύτητα στις μεταβολές του σήματος εισόδου και να οδηγεί την έξοδο σε μια σταθερή τελική τιμή σε εύλογο χρονικό διάστημα.



Ευαισθησία

Η ευαισθησία είναι η μέτρηση του πόσο εύκολα μεταβάλλεται η έξοδος ενός συστήματος σε μεταβολές των παραμέτρων του ίδιου του συστήματος όπως και σε πιθανές εξωτερικές διαταραχές.

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}, \quad S = \frac{\Delta T(s)/T(s)}{\Delta G(s)/G(s)}. \quad \boxed{S_G^T = \frac{\partial T/T}{\partial G/G} \Rightarrow} \quad S_G^T = \frac{\partial T}{\partial G} \cdot \frac{G}{T} \quad (1)$$

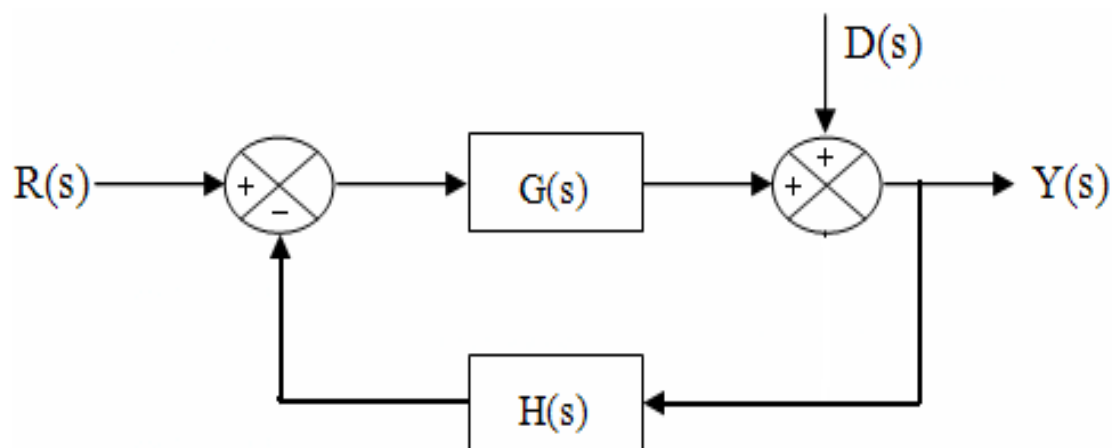
$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}, \quad \frac{\partial T}{\partial G} = \frac{\partial}{\partial G} \left[\frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \right] = \frac{1 + G(s)H(s) - H(s)G(s)}{[1 + G(s)H(s)]^2} \quad (2)$$

$$\text{από (1), (2)} \Rightarrow S_G^T = \frac{1}{[1 + G(s)H(s)]^2} \cdot \frac{G(s)}{G(s)/[1 + G(s)H(s)]} \Rightarrow \boxed{S_G^T = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}}.$$

$$S_H^T = \frac{\partial T}{\partial H} \cdot \frac{H}{T} \quad (3) \quad \frac{\partial T}{\partial H} = \frac{\partial}{\partial H} \left[\frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \right] = -\frac{G(s) \cdot G(s)}{[1 + G(s)H(s)]^2} \quad (4)$$

$$\text{από (3), (4)} \Rightarrow S_H^T = -\left(\frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \right)^2 \cdot \frac{H(s)}{G(s)/[1 + G(s)H(s)]} = \boxed{-\frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)}}.$$

ΜΕΙΩΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ ΤΟΥ ΣΚΒ ΣΕ ΣΗΜΑΤΑ ΔΙΑΤΑΡΑΧΩΝ



$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}$$

Χρονική απόκριση συστημάτων 1ης & 2ης τάξης

* *Εισαγωγικές έννοιες και ορισμοί*

Με τον όρο **χρονική απόκριση** ενός συστήματος, εννοούμε τη συμπεριφορά του συστήματος συναρτήσει του χρόνου όταν διεγείρεται από μία συγκεκριμένη είσοδο.

Η χρονική απόκριση ενός συστήματος ελέγχου αποτελείται από δύο μέρη:

- ❖ Τη μεταβατική απόκριση (transient response) και

- ❖ Την απόκριση μόνιμης κατάστασης (steady state response).

Αν $y(t)$ ονομάσουμε την απόκριση του συστήματος (έξοδο) τότε έχουμε:

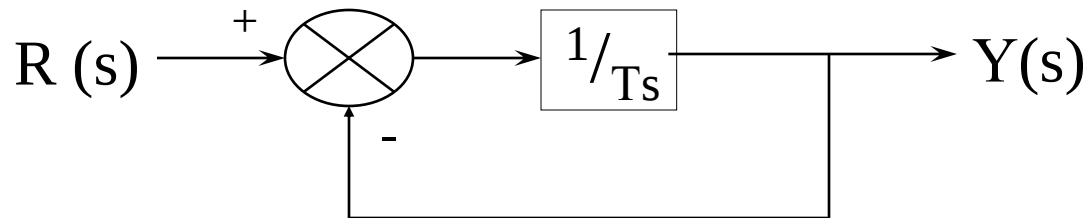
$$y(t) = y_t(t) + y_{ss}(t)$$

όπου: $y_t(t)$ = απόκριση μεταβατικής κατάστασης.

$y_{ss}(t)$ = απόκριση μόνιμης κατάστασης.

* Συστήματα πρώτης τάξης

Ας θεωρήσουμε το δομικό διάγραμμα του συστήματος 1ης τάξης του παρακάτω σχήματος



Η συνάρτηση μεταφοράς θα είναι της μορφής:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$

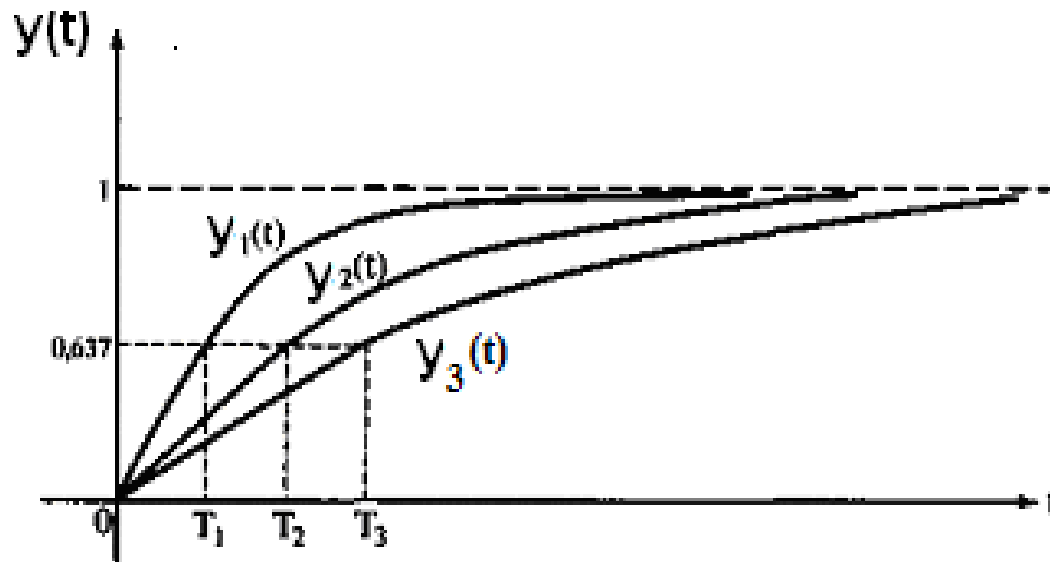
όπου T είναι η σταθερά χρόνου του συστήματος.

***Απόκριση συστήματος πρώτης τάξης σε διέγερση μοναδιαίας βαθμίδας**

Η απόκριση του συστήματος για είσοδο της μορφής $r(t) = u(t)$ θα είναι:

$$y(t) = L^{-1} \{Y(s)\} = L^{-1} \{T(s)R(s)\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{Ts+1} \bullet \frac{1}{s} \right\} = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$$

Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται η καμπύλη της απόκρισης $y(t)$, για σταθερές χρόνου $T_1 < T_2 < T_3$.



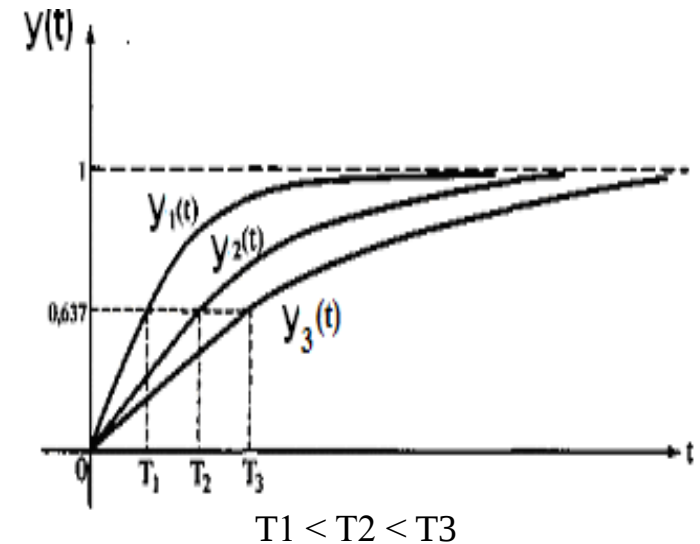
Η έξοδος ανεβαίνει εκθετικά από την τιμή 0 προς την τελική τιμή 1.

Η αρχική κλίση της καμπύλης στον χρόνο $t=0$ δίνεται από:

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{T} e^{-t/T} \Big|_{t=0} = \frac{1}{T}$$

και η τιμή της εξόδου για $t = T$

$$y(T) = 1 - e^{-1} = 0,6378$$



όπου η T είναι η σταθερά χρόνου του συστήματος ή ταχύτητα απόκρισης.

Χρόνος ανόδου T_r

Εάν t_1 είναι ο χρόνος στον οποίο η έξοδος έχει φτάσει στο 10% της τελικής της τιμής και t_2 ο χρόνος στον οποίο η έξοδος έχει φτάσει στο 90% της τελική τιμής τότε:

$$1 - e^{-t_1/T} = 0,1 \Rightarrow t_1 = -T (\ln 0,9) \cong 0,1T$$

$$1 - e^{-t_2/T} = 0,9 \Rightarrow t_2 = -T (\ln 0,1) \cong 2,3T$$

$$\text{Άρα } T_r = t_2 - t_1 \cong 2,2T$$

Χρόνος αποκατάστασης T_s 2%

Είναι ο χρόνος στον οποίο η έξοδος του συστήματος διαφέρει από την τελική της τιμή κατά 2%. Επομένως:

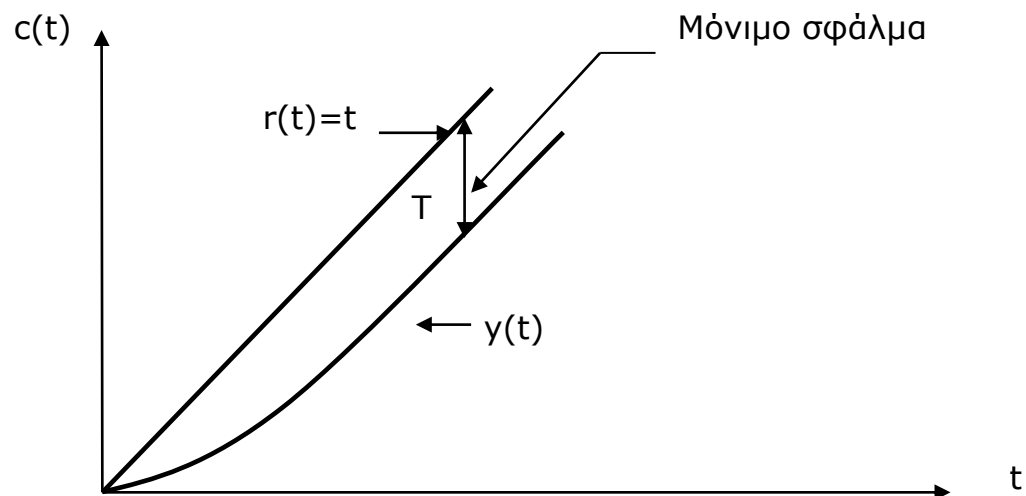
$$1 - e^{-t_s/T} = 1 - 0,02 \Rightarrow T_s = -T \ln 0,02 \Rightarrow T_s \cong 4T$$

* Απόκριση συστήματος πρώτης τάξης σε διέγερση μοναδιαίας αναρρίχησης

Η απόκριση του συστήματος για είσοδο της μορφής $r(t) = t$ θα είναι:

$$y(t) = L^{-1} \{Y(s)\} = L^{-1} \{T(s)R(s)\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{Ts + 1} \bullet \frac{1}{s^2} \right\} = t - T + Te^{-\frac{t}{T}}, t \geq 0$$

Η αντίστοιχη γραφική παράσταση φαίνεται παρακάτω.

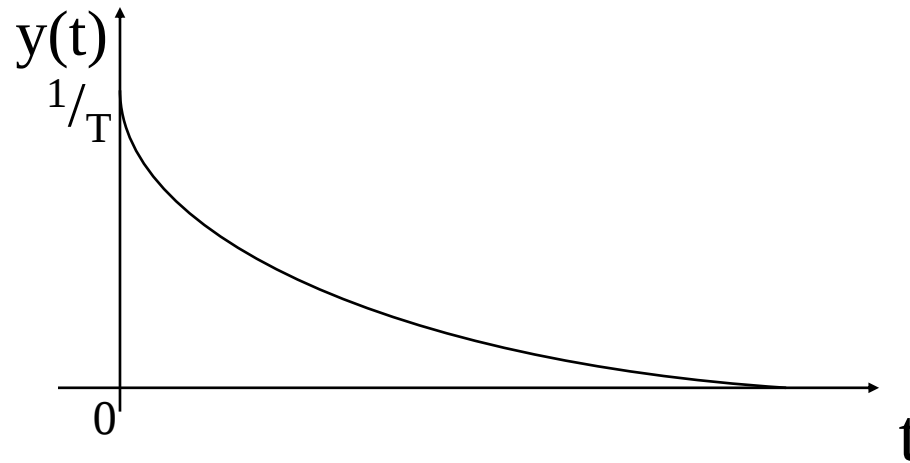


* Κρουστική απόκριση συστήματος πρώτης τάξης

Η απόκριση του συστήματος για είσοδο της μορφής $r(t)=\delta(t)$ θα είναι:

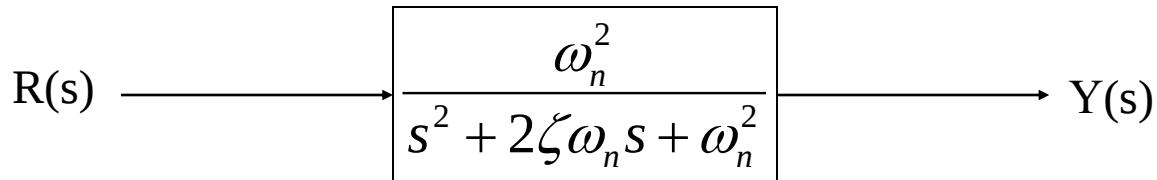
$$y(t) = L^{-1} \{Y(s)\} = L^{-1} \{T(s)R(s)\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{Ts + 1} \bullet 1 \right\} = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$

Η καμπύλη της κρουστικής απόκρισης



* Συστήματα δεύτερης τάξης

Ας θεωρήσουμε το λειτουργικό διάγραμμα του συστήματος 2ης τάξης του παρακάτω σχήματος:



Η συνάρτηση μεταφοράς είναι της μορφής:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος είναι: $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$

Οι πόλοι της $T(s)$ είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης (Χ.Ε.) δηλαδή:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad \text{ή} \quad s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Υπό-απόσβεση	$0 < \zeta < 1$	$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\beta$
--------------	-----------------	---

Χωρίς απόσβεση	$\zeta = 0$	$s_{1,2} = \pm j\omega_n$
----------------	-------------	---------------------------

Κρίσιμη απόσβεση	$\zeta = 1$	$s_{1,2} = -\omega_n$
------------------	-------------	-----------------------

Υπέρ-απόσβεση	$\zeta > 1$	$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\alpha$
---------------	-------------	---

όπου $\beta = \sqrt{1-\zeta^2}$ $\alpha = \sqrt{\zeta^2-1}$ $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

Ο συντελεστής ζ ονομάζεται **συντελεστής απόσβεσης** του συστήματος (damping ratio), το ω_n **κυκλική ιδιοσυχνότητα** (natural frequency) και το ω_d **αποσβενομένη ιδιοσυχνότητα** (damping frequency).

1) Υπό-απόσβεση ($0 < \zeta < 1$)

Στην περίπτωση όπου $0 < \zeta < 1$ η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο ρίζες συζυγείς μιγαδικές.

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\beta$$

Η χρονική απόκριση είναι της μορφής:

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\beta} \sin(\omega_d t + \varphi)$$

όπου: $\varphi = \tan^{-1} \frac{\beta}{\zeta}$ ή $\varphi = \cos^{-1} \zeta$

και $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = \omega_n \beta$

2) Μηδενική απόσβεση ($\zeta = 0$)

Στην περίπτωση όπου $\zeta = 0$ η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο ρίζες συζυγείς φανταστικές:

$$s_{1,2} = \pm j\omega_n$$

Η χρονική απόκριση είναι της μορφής:

$$y(t) = 1 - \cos \omega_n t$$

3) Κρίσιμη απόσβεση ($\zeta = 1$)

Στην περίπτωση που $\zeta=1$ η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές ίδιες με τιμή:

$$s_1 = s_2 = -\omega_n$$

Η χρονική απόκριση είναι της μορφής:

$$y(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t)$$

4) Υπέρ-απόσβεση ($\zeta > 1$)

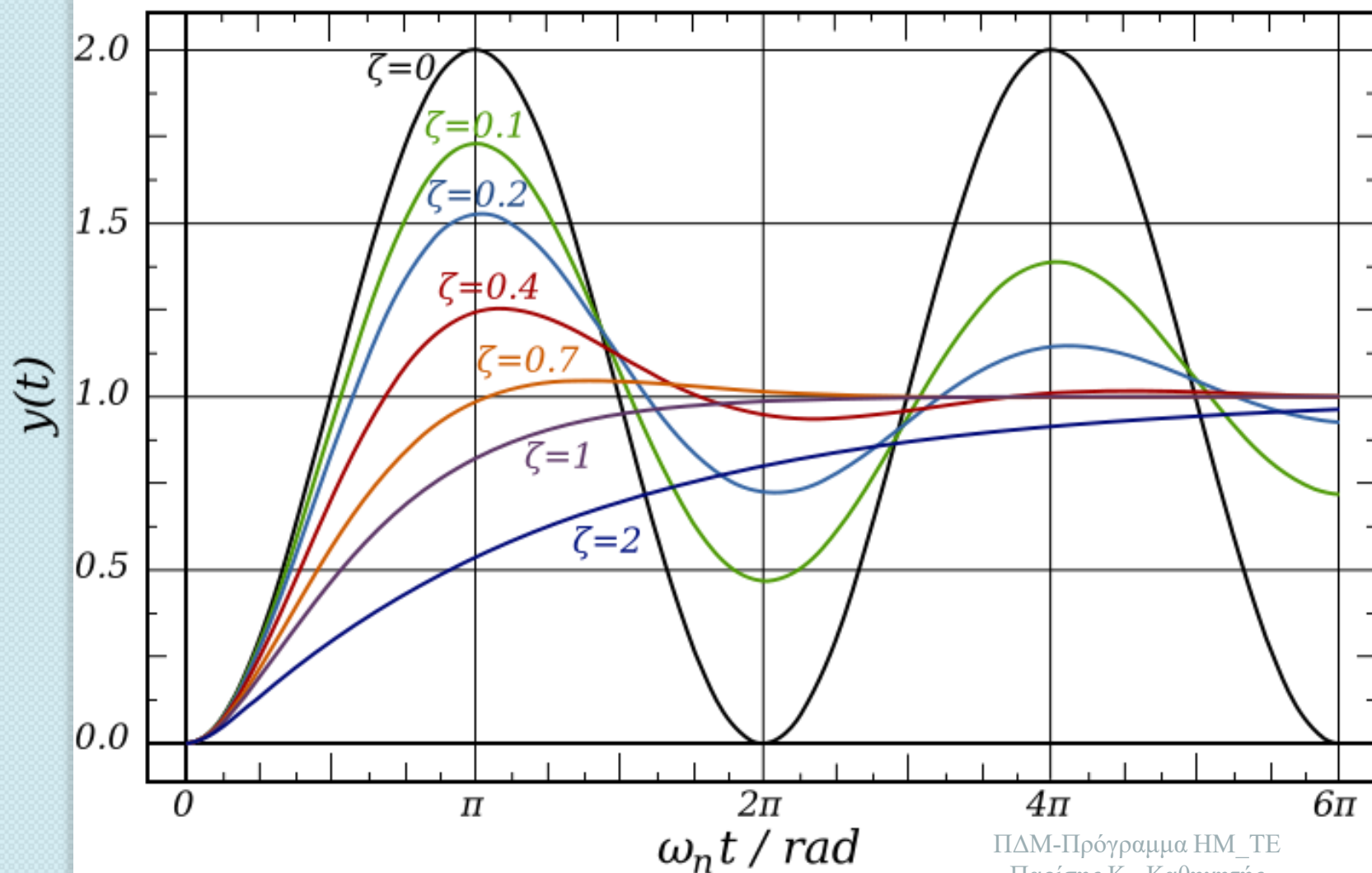
Στην περίπτωση όπου $\zeta > 1$ η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές με τιμές:

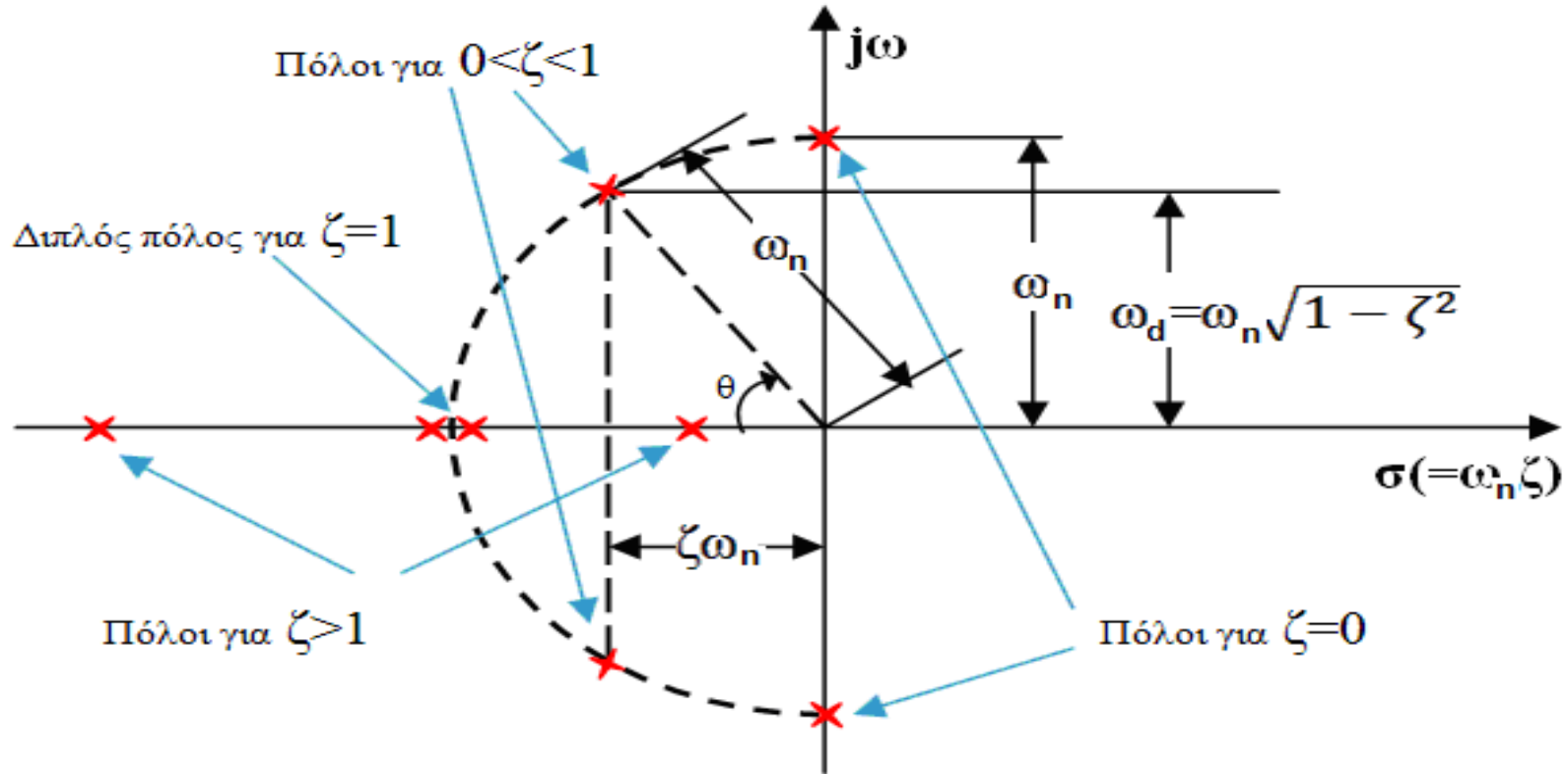
$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Η χρονική απόκριση είναι της μορφής:

$$y(t) = 1 - e^{\zeta\omega_n t} \left[\cosh(\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \cdot t) + \sinh(\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \cdot t) \right]$$

Χρονική απόκριση συστήματος δεύτερης τάξης σε διέγερση μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης για διάφορες τιμές του συντελεστή απόσβεσης ζ . Ο οριζόντιος άξονας είναι σε **radians** και αναπαριστά το χρόνο πολλαπλασιασμένο με την φυσική συχνότητα ω_n του συστήματος.





Ο τόπος των πόλων του δευτεροβάθμιου συστήματος στο μιγαδικό επίπεδο, με ω_n σταθερό και μεταβαλλόμενο ζ από 0 έως ∞ .

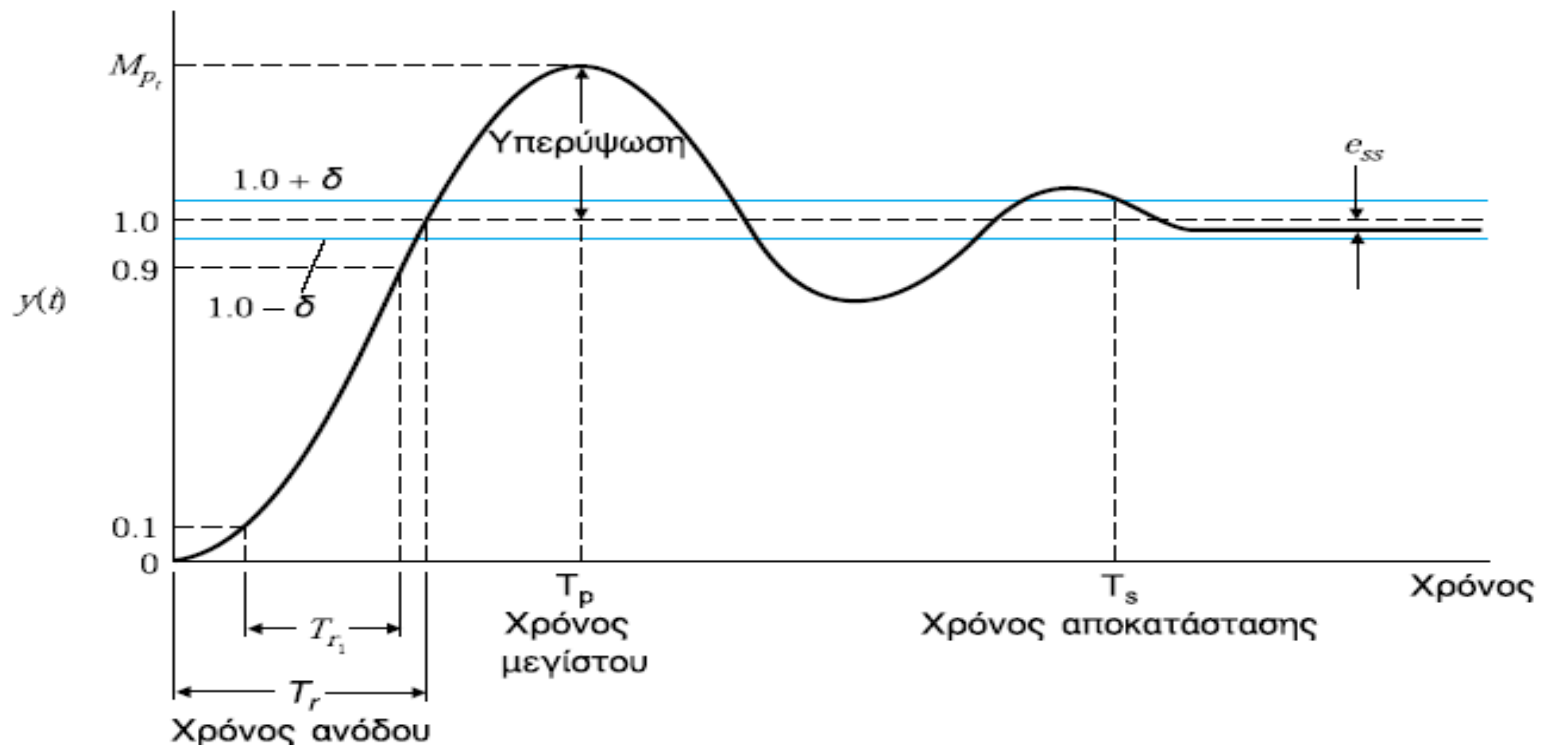
Για $\zeta=0$ οι ρίζες είναι **φανταστικές** $s_1, s_2 = \pm j\omega_n$.

Όταν $0 < \zeta < 1$ οι ρίζες είναι **συζυγείς μιγαδικές**.

Καθώς το ζ μεγαλώνει οι πόλοι απομακρύνονται από τον φανταστικό άξονα ακολουθώντας κυκλική τροχιά ακτίνας ω_n , συναντιούνται στο σημείο $-\omega_n$ ($\zeta=1$) και μετά χωρίζουν και κινούνται κατά μήκος του **πραγματικού άξονα**, ο ένας προς το 0 και ο άλλος προς το $-\infty$ ($\zeta>1$).

Χαρακτηριστικά μεγέθη χρονικής απόκρισης ευσταθούς συστήματος που διεγείρεται με σήμα μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης

Στα πρακτικά συστήματα ελέγχου η μεταβατική απόκριση εμφανίζει αποσβενύμενες ταλαντώσεις, προτού φθάσει στη μόνιμη κατάσταση (παρακάτω σχήμα).



•**Χρόνος ανόδου T_r (ή T_{r1}) (rise time):** Ο χρόνος που χρειάζεται για να ανέλθει η απόκριση από το 0% στο 100% (ή από το 10% στο 90%) της τελικής της τιμής και δίνεται από τη σχέση :

$$T_r = \frac{\pi - \tan^{-1}(\omega_d / \zeta\omega_n)}{\omega_d}, \quad T_{r1} = \frac{2,16\zeta + 0,60}{\omega_n} \quad (0,3 < \zeta < 0,8)$$

•**Χρόνος μεγίστου T_p (peak time):** Ο χρόνος που χρειάζεται για να φθάσει η απόκριση στην πρώτη κορυφή της καμπύλης και είναι:

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

Χρόνος αποκατάστασης T_s (settling time):

Ο χρόνος που χρειάζεται για να φθάσει και να παραμείνει η καμπύλη απόκρισης ανάμεσα στο $\pm 2\%$ ή $\pm 5\%$ της τελικής τιμής.

Με κριτήριο ζώνης το 2% είναι:

$$T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n}$$

Με κριτήριο ζώνης το 5% είναι:

$$T_s = \frac{3}{\zeta \omega_n}$$

Ποσοστό υπερέψωσης P.O. (percent overshoot):

Η ποσοστιαία διαφορά της μέγιστης τιμής y_m και της τελικής τιμής έστω y_f της $y(t)$. Το ποσοστό υπερέψωσης P.O. ορίζεται:

$$P.O. = \frac{y_m - y_f}{y_f} \cdot 100\% = 100e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \% \quad \text{όπου} \quad y_f = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$$

Μέγιστη τιμή της απόκρισης M_{pt} ή y_m :

Η τιμή της απόκρισης στην πρώτη κορυφή της καμπύλης είναι:

$$y_m = 1 + e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

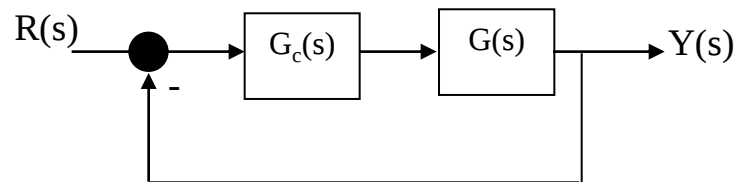
Παραδείγματα

1. Σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$G(s) = \frac{1}{s(s+25)}$ συνδέεται σε σειρά με ελεγκτή με

συνάρτηση μεταφοράς $G_c(s) = 625$.

Να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος κλειστού βρόγχου με μοναδιαία αρνητική ανάδραση, καθώς επίσης τα μεγέθη αυτής: ω_n , ζ , ω_d , P.O.%.



$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s) \cdot G(s)}{1 + G_c(s) \cdot G(s) \cdot H(s)} = \frac{\frac{1}{s(s+25)} \cdot 625}{1 + \frac{1}{s(s+25)} \cdot 625 \cdot 1} = \frac{\frac{625}{s(s+25)}}{\frac{s(s+25) + 625}{s(s+25)}} = \frac{625}{s(s+25) + 625} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{625}{s^2 + 25s + 625} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \Rightarrow 2\zeta\omega_n = 25 \quad \& \quad \omega_n^2 = 625$$

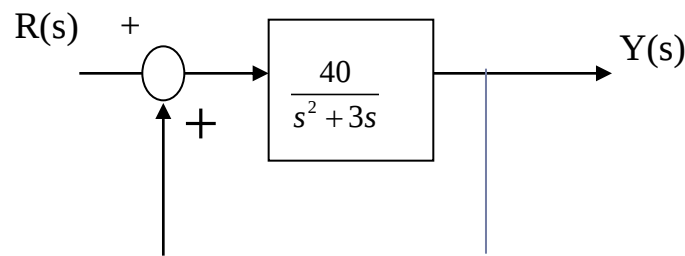
$$\omega_n^2 = 625 \Rightarrow \omega_n = 25 \text{ rad/sec}$$

$$2\zeta\omega_n = 25 \Rightarrow 2\zeta \cdot 25 = 25 \Rightarrow 2\zeta = 1 \Rightarrow \zeta = 0,5$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 25 \sqrt{1 - 0,5^2} = 25 \sqrt{1 - 0,25} = 25 \sqrt{0,75} = 25 \cdot 0,866 = 21,65 \text{ rad/sec}$$

$$P.O. = 100 \cdot e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 100 \cdot e^{-\frac{3,14 \cdot 0,5}{\sqrt{1-0,5^2}}} = 100 \cdot e^{-1,81} = 16,36\%$$

2. Να υπολογιστεί η Σ.Μ., η χρονική απόκριση $y(t)$ του Σ.Κ.Β. με μοναδιαία είσοδο ράμπας ($r(t)=t$) και να διερευνηθεί η ευστάθεια του.



$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{40}{s^2 + 3s}}{1 - \frac{40}{s^2 + 3s} \cdot 1} = \frac{40}{s^2 + 3s - 40} \Rightarrow$$

$$Y(s) = T(s)R(s) = \frac{40}{s^2 + 3s - 40} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{40}{s^2(s-5)(s+8)} \Rightarrow Y(s) = \frac{K_{11}}{s} + \frac{K_{12}}{s^2} + \frac{K_2}{(s-5)} + \frac{K_3}{(s+8)}$$

$$K_{11} = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left(s^2 \frac{40}{s^2(s-5)(s+8)} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-40(s+8+s-5)}{(s-5)^2(s+8)^2} = -\frac{3}{40}$$

$$K_{12} = \frac{1}{(2-2)!} \lim_{s \rightarrow 0} \left(s^2 \frac{40}{s^2(s-5)(s+8)} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{40}{(s-5)(s+8)} = -1$$

$$K_2 = \lim_{s \rightarrow 5} \left((s-5) \frac{40}{s^2(s-5)(s+8)} \right) = \lim_{s \rightarrow 5} \frac{40}{s^2(s+8)} = \frac{8}{65}$$

$$K_3 = \lim_{s \rightarrow -8} \left((s+8) \frac{40}{s^2(s-5)(s+8)} \right) = \lim_{s \rightarrow -8} \frac{40}{s^2(s-5)} = -\frac{5}{104}$$

$$y(t) = L^{-1} \{Y(s)\} = -\frac{3}{40} - t + \frac{8}{65} \cdot e^{5t} - \frac{5}{104} \cdot e^{-8t}$$

από την μορφή της συνάρτησης $y(t) \Rightarrow$ μη ευσταθές

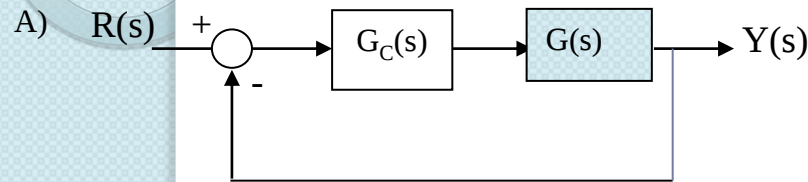
3. Για ένα σύστημα με Σ.Μ. $G(s) = \frac{1}{s^2 + 12s}$, αναλογικό (P) ελεγκτή σειράς με Σ.Μ.

$$G_C(s) = k, k > 0 \quad \text{και μοναδιαία αρνητική ανάδραση.}$$

A) Να σχεδιαστεί το διάγραμμα βαθμίδων.

B) Να υπολογιστεί η χρονική απόκριση της εξόδου του Σ.Κ.Β., με μοναδιαία βηματική είσοδο για $k=100$.

Γ) Να υπολογιστεί ο χρόνος μεγίστου της παραπάνω χρονικής απόκρισης.



$$G_o(s)G_C(s) \cdot G(s) \cdot H(s) = k \cdot \frac{1}{s^2 + 12s} \cdot 1 = \frac{k}{s(s+12)}$$

$$K_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \left(s \frac{100}{s(s+6+8j)(s+6-8j)} \right) = \frac{100}{(6+8j)(6-8j)} = \frac{100}{36+64} = 1$$

$$K_2 = \lim_{s \rightarrow -6-8j} \left((s+6+8j) \frac{100}{s(s+6+8j)(s+6-8j)} \right) = \frac{100}{(-6-8j)(-6-8j+6-8j)} = \frac{100}{(-6-8j)(-16j)} = \frac{100}{-128+96j}$$

$$K_3 = \lim_{s \rightarrow -6+8j} \left((s+6-8j) \frac{100}{s(s+6+8j)(s+6-8j)} \right) = \frac{100}{(-6+8j)(-6+8j+6+8j)} = \frac{100}{(-6+8j)(16j)} = \frac{100}{-128-96j}$$

B)

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{k}{s(s+12)}}{1 + \frac{k}{s(s+12)}} = \frac{k}{s^2 + 12s + k} \Rightarrow$$

$$Y(s) = T(s)R(s) = \frac{100}{s^2 + 12s + 100} \cdot \frac{1}{s} = \frac{100}{s(s+6+8j)(s+6-8j)} \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(s+6+8j)} + \frac{K_3}{(s+6-8j)} \Rightarrow$$

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = 1 + \frac{100}{-128+96j} \cdot e^{(-6-8j)t} + \frac{100}{-128-96j} \cdot e^{(-6+8j)t}$$

Γ)

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{100}{s^2 + 12s + 100} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\Rightarrow 2\zeta\omega_n = 12 \quad (1) \text{ \& } \omega_n^2 = 100 \quad (2) \Rightarrow$$

$$(2) \Rightarrow \omega_n = 10 \text{ rad/sec}$$

$$(1) \Rightarrow 2\zeta \cdot 10 = 12 \Rightarrow \zeta = 0,6$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} = 10\sqrt{1-0,6^2} = 10\sqrt{1-0,36} = 10\sqrt{0,64} = 10 \cdot 0,8 = 8 \text{ rad/sec}$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{3,14}{8} = 0,39 \text{ sec}$$