

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5:

Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$F(s) = \frac{2s^2 - 4}{(s+1)(s-2)^2(s-3)}$$

ΛΥΣΗ.

$$F(s) = \frac{2s^2 - 4}{(s+1)(s-3)(s-2)^2} \equiv \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s-3} + \frac{K_{11}}{s-2} + \frac{K_{12}}{(s-2)^2}$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ K_1, K_2 .

$$K_1 = \left[\frac{(2s^2 - 4)}{(s+1)(s-3)(s-2)^2} \cdot (s+1) \right]_{s=-1} = \frac{[2(-1)^2 - 4]}{(-1-3)(-1-2)^2} = \frac{2-4}{(-4)(-3)^2} = \frac{-2}{(-4)(9)} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$K_2 = \left[(s-3) \cdot \frac{(2s^2 - 4)}{(s+1)(s-3)(s-2)^2} \right]_{s=3} = \frac{2(3)^2 - 4}{(3+1)(3-2)^2} = \frac{(2)(9) - 4}{(4)(1)^2} = \frac{18-4}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ K_{11}, K_{12} .

$$K_{ij} = \frac{1}{(r-j)!} \frac{d^{(r-j)}}{ds^{(r-j)}} \left[(s - p_{\text{πολ/πολ/πολ}})^r \cdot F(s) \right]_{s=p_{\text{πολ/πολ/πολ}}}$$

όπου $i=1$
 $j=1, 2, 3, \dots, r$

Ο βαθμός πολλαπλότητας είναι $r=2$ για τον πολλαπλό πόλο πηλός 2

Για $i=1$ και $j=1$ και $r=2$ έχουμε:

$$K_{11} = \frac{1}{(2-1)!} \frac{d^{(2-1)}}{ds^{(2-1)}} \left[(s-2)^2 \cdot \frac{(2s^2 - 4)}{(s+1)(s-2)^2(s-3)} \right]_{s=2} =$$

$$= \frac{1}{1!} \frac{d}{ds} \left[\frac{2s^2 - 4}{(s+1)(s-3)} \right]_{s=2}$$

$$= \left[\frac{2s^2 - 4}{(s+1)(s-3)} \right]_{s=2}$$

$$= \left[\frac{(2s'^2-4)'[(s'+1)(s'-3)] - (2s'^2-4)[(s'+1)(s'-3)]'}{[(s'+1)(s'-3)]^2} \right]_{s'=2}$$

$$= \left[\frac{4s'(s'+1)(s'-3) - (2s'^2-4)[(s'+1)(s'-3) + (s'+1)(s'-3)]'}{(s'+1)^2(s'-3)^2} \right]_{s'=2}$$

$$= \left[\frac{4s'(s'+1)(s'-3)}{(s'+1)^2(s'-3)^2} - \frac{(2s'^2-4)(s'-3+s'+1)}{(s'+1)^2(s'-3)^2} \right]_{s'=2}$$

$$= \left[\frac{4s'}{(s'+1)(s'-3)} - \frac{(2s'^2-4)(2s'-2)}{(s'+1)^2(s'-3)^2} \right]_{s'=2}$$

$$= \left[\frac{4s'}{(s'+1)(s'-3)} - \frac{2(s'^2-2)(s'-1) \cdot 2}{(s'+1)^2(s'-3)^2} \right]_{s=2}$$

$$= \left[\frac{4s'}{(s'+1)(s'-3)} - \frac{4(s'^2-2)(s'-1)}{(s'+1)^2(s'-3)^2} \right]_{s'=2}$$

$$= \left[\frac{(4)(2)}{(2+1)(2-3)} - \frac{4[(2)^2-2](2-1)}{(2+1)^2(2-3)^2} \right]$$

$$= \left[\frac{8}{(3)(-1)} - \frac{4(2)(1)}{(3)^2(-1)^2} \right]$$

$$= \left[-\frac{8}{3} - \frac{8}{9} \right]$$

$$= \left[\frac{-24-8}{9} \right]$$

$$= -\frac{32}{9}$$

για $i=1$ και $j=2$ και $r=2$ έχουμε

$$K_{12} = \frac{1}{(2-2)!} \frac{d^{(2-2)}}{ds^{(2-2)}} \left[(s'-2)^2 \cdot \frac{(2s'^2-4)}{(s'+1)(s'-2)^2(s'-3)} \right]_{s'=2} =$$

$$= \frac{1}{0!} \frac{d^0}{ds^0} \left[\cancel{(s'-2)^2} \cdot \frac{(2s'^2-4)}{(s'+1)\cancel{(s'-2)^2}(s'-3)} \right]_{s'=2} =$$

$$= \left[\frac{2s'^2-4}{(s'+1)(s'-3)} \right]_{s'=2} = \left[\frac{2(2)^2-4}{(2+1)(2-3)} \right] = \frac{(2)(4)-4}{(3)(-1)}$$

$$= \frac{8-4}{(-3)} = \frac{4}{(-3)} = -\frac{4}{3}$$

Αντικαθιστούμε τις τιμές των K_1, K_2, K_{11}, K_{12} οπότε η $F(s')$ γίνεται:

$$F(s') = \frac{\frac{1}{18}}{s'+1} + \frac{\frac{7}{2}}{s'-3} + \frac{-\frac{32}{9}}{s'-2} + \frac{-\frac{4}{3}}{(s'-2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(s') = \frac{1}{18} \left[\frac{1}{s'+1} \right] + \frac{7}{2} \left[\frac{1}{s'-3} \right] - \frac{32}{9} \left[\frac{1}{s'-2} \right] - \frac{4}{3} \left[\frac{1}{(s'-2)^2} \right]$$

Εφαρμόζουμε αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s')\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{18} \left[\frac{1}{s'+1} \right] \right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{7}{2} \left[\frac{1}{s'-3} \right] \right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{ -\frac{32}{9} \left[\frac{1}{s'-2} \right] \right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{ -\frac{4}{3} \left[\frac{1}{(s'-2)^2} \right] \right\}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{18} \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s'+1} \right\} + \frac{7}{2} \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s'-3} \right\} - \frac{32}{9} \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s'-2} \right\} - \frac{4}{3} \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{(s'-2)^2} \right\}$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{18} e^{-t} + \frac{7}{2} e^{3t} - \frac{32}{9} e^{2t} - \frac{4}{3} t e^{2t}$$

*** $\alpha/\alpha \rightarrow 12$.

$$\frac{1}{(s+a)^n} \equiv \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at}, \text{ } \eta \text{ θετικός ακέραιος.}$$

$\eta=2$ επομένως.

$$\frac{1}{(s-2)^2} \equiv \frac{1}{(2-1)!} t^{2-1} e^{-(-2)t} \equiv \frac{1}{1!} t e^{2t} \equiv t e^{2t}$$