

Μετασχηματισμός Laplace

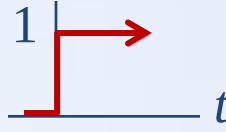
- Ορισμός
- Ιδιότητες
- Σχέση μεταξύ πεδίων (domains) χρόνου and Laplace.
 - Θεωρήματα Αρχικής και Τελικής Τιμής.

Μετασχηματισμός Laplace

- Ο μετασχηματισμός Laplace είναι μια μαθηματική πράξη (απεικόνιση), που μετατρέπει μια εξίσωση που είναι συνάρτηση του χρόνου, t , να γίνει μια συνάρτηση της μεταβλητής Laplace, s .

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = F(s)$$

- Κάποιες μαθηματικές πράξεις γίνονται απλούστερες στο πεδίο Laplace.
- Ποτέ δεν θα επιλύουμε το ολοκλήρωμα, θα χρησιμοποιούμε πίνακες.

	a/a	$f(t)$		$F(s)$
Μοναδιαία κρούση (ώθηση)	1.	$\delta(t)$		1
Μοναδιαία βαθμίδα	2.	$1(t)$		$\frac{1}{s}$
Μοναδιαία ράμπα	3.	t		$\frac{1}{s^2}$
	4.	t^n		$\frac{n!}{s^{n+1}}$
	5.	e^{-at}		$\frac{1}{s+a}$
	6.	$\sin(\omega t)$		$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
	7.	$\cos(\omega t)$		$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace

1. Γραμμικότητα

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] &= \\ a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)] &= \\ aF(s) + bG(s)\end{aligned}$$

- οι σταθεροί όροι έξω και and M/Σ Laplace διαχωρίζεται σε πρόσθεση και αφαίρεση

-ΠΡΟΣΟΧΗ: $\mathcal{L}[f(t) \cdot g(t)] \neq F(s) \cdot G(s)$

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace

2. Ολοκλήρωση

Συνήθως μηδέν

$$\mathcal{L}\left[\int f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{\left[\int f(t)dt\right]_{t=0}}{s}$$

$$\mathcal{L}\left[\int\int f(t)dt\,dt\right] = \frac{F(s)}{s^2} + \frac{\left[\int\int f(t)dt\,dt\right]_{t=0}}{s^2} + \frac{\left[\int f(t)dt\right]_{t=0}}{s}$$

3. Διαφόριση

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2 f}{dt^2}\right] = s^2 F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$$

Αυτές οι ιδιότητες μετασχηματίζουν τις διαφορικές εξισώσεις σε αλγεβρικές

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace

4. Πολλαπλασιασμός με e^{-at}

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s + a)$$

- Σημαντική για αποσβενούμενη απόκριση

Παράδειγμα: $\mathcal{L}[e^{-at} \underbrace{\cos \omega t}_{f(t)}]$

Σημείωση: ρίζες του παρονομαστή(πόλοι) στο πεδίο Laplace = ρίζες της Χ.Ε. στο πεδίο του χρόνου

από πίνακες Laplace , $F(s) = \mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$

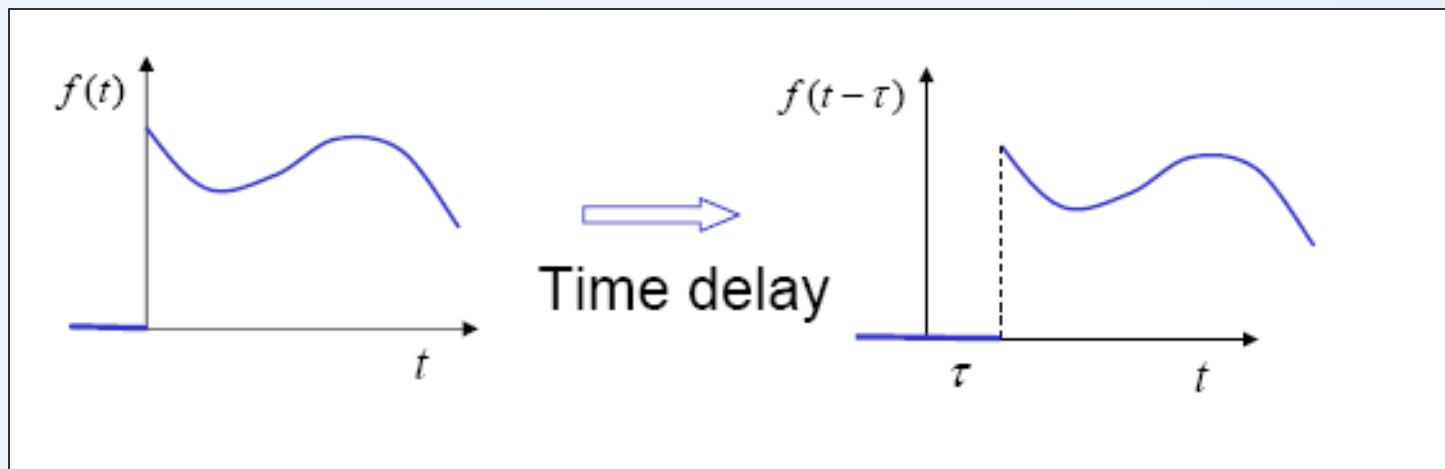
από τις ιδιότητες , $F(s + a) = \frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace

5. Χρονική μετατόπιση

$$\mathcal{L}[f(t-a)1(t-a)] = e^{-as}F(s), \quad a \geq 0$$

- σημαντική για ανάλυση χρονικών καθυστερήσεων



Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace

6. Πολλαπλασιασμός με t

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$$

$$\mathcal{L}[t^2 f(t)] = \frac{d^2 F(s)}{ds^2}$$

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

Παράδειγμα

0 for $t < 0$

- Βρείτε $\mathcal{L}[2te^{-3t} + 5]$

$$= 2\mathcal{L}[te^{-3t}] + 5\mathcal{L}[1(t)] \text{ (από ιδιότητα 1)}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2} \quad \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[te^{-3t}] = \frac{1}{(s+3)^2} \text{ (από ιδιότητα 4)}$$

$$= \frac{2}{(s+3)^2} + \frac{5}{s}$$

Σχέση πεδίων Laplace/Χρόνου

- Προηγουμένως είδαμε πως οι πόλοι του $X(s)$ σχετίζονται με το $x(t)$
- Δύο επιπλέον σχέσεις μεταξύ $X(s)$ και $x(t)$:

Θεώρημα αρχικής τιμής

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s), \text{ εαν το } \lim \text{ υπάρχει}$$

Θεώρημα τελικής τιμής

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s),$$

$$\text{if } [\text{πολοι του } sF(s)] < 0$$

Παράδειγμα

- Βρείτε την αρχική τιμή της $f(t)$, όπου $F(s) = \frac{s+3}{s(s^2+6s+13)}$

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s(s+3)}{s(s^2+6s+13)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{(s+3)}{(s^2+6s+13)} \cdot \frac{1}{s^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{s} + \frac{3}{s^2}}{1 + \frac{6}{s} + \frac{13}{s^2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Παράδειγμα

- Βρείτε την τελική τιμή της $f(t)$, όπου $F(s) = \frac{s+3}{s(s^2+6s+13)}$

$$\begin{aligned} f(\infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(s+3)}{s(s^2+6s+13)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s+3)}{\underbrace{(s^2+6s+13)}} = \boxed{\frac{3}{13}} \end{aligned}$$

πόλοι της $sF(s) = -3 \pm 2j$,

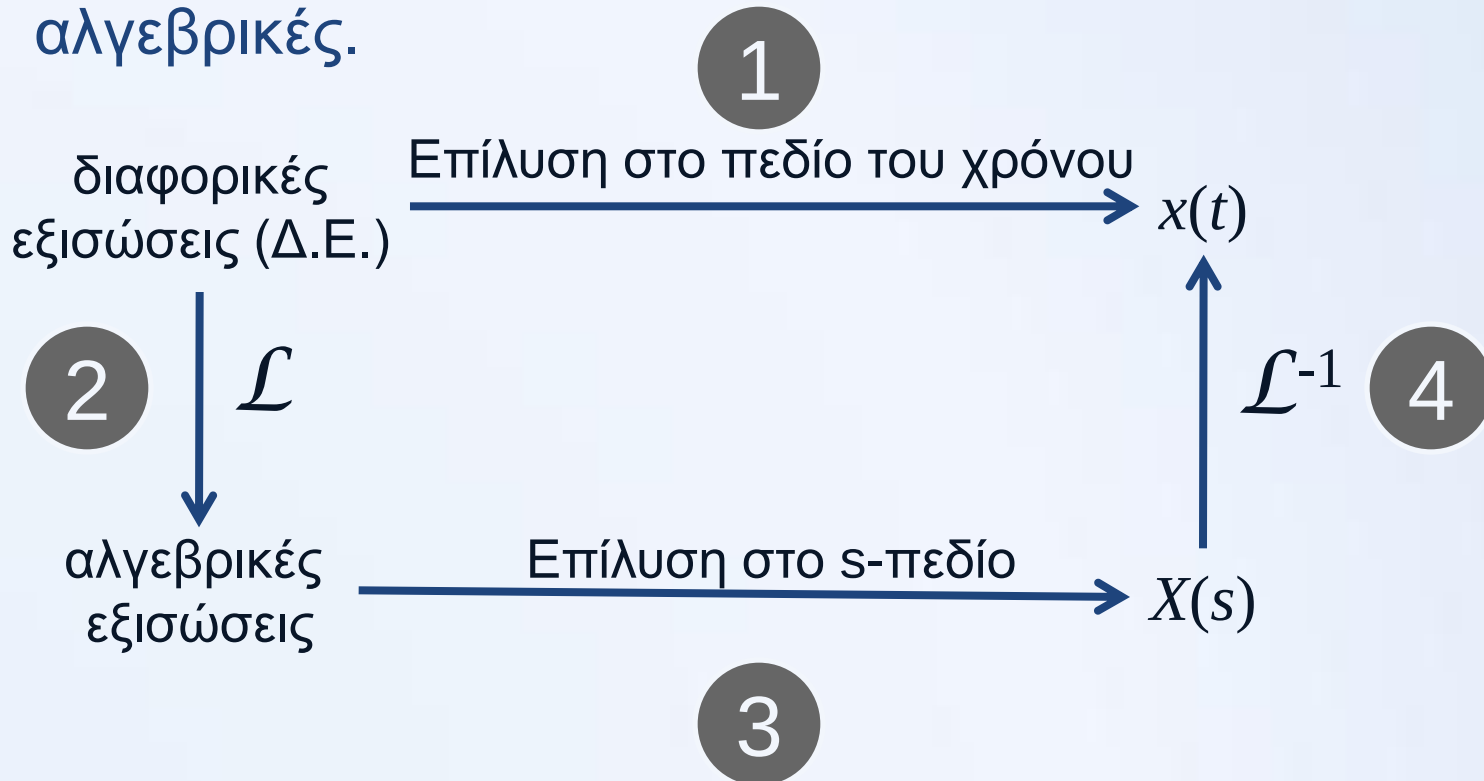
επειδή <0 , το όριο υπάρχει

Επιλύοντας Δ.Ε. με M/Σ Laplace

- Επιλύοντας Δ.Ε. με M/Σ Laplace
- Αντίστροφος M/Σ Laplace
- Άθροισμα μερικών κλασμάτων
 - Περίπτωση I: Διακριτοί πόλοι
 - Περίπτωση II: Επαναλαμβανόμενοι πόλοι
 - Περίπτωση III: Μιγαδικοί πόλοι

Επιλύοντας Δ.Ε. με M/Σ Laplace

- Ο M/Σ Laplace μετατρέπει Γραμμικές- Χρονικά Αμετάβλητες (Linear Time-Invariant ,LTI) Δ.Ε. σε αλγεβρικές.



Αντίστροφος Μ/Σ Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$$

Ο αντίστροφος Μ/Σ Laplace
μπορεί να επιλυθεί
χρησιμοποιώντας τους
πίνακες και τις ιδιότητες
που παρουσιάστηκαν
προηγουμένως

a/a	$f(t)$	$F(s)$
1.	$\delta(t)$	1
2.	$1(t)$	$\frac{1}{s}$
3.	t	$\frac{1}{s^2}$
4.	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5.	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
6.	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
7.	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

Παράδειγμα

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s+1}\right]$$
$$= 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]$$

$$= 3e^{-t}, t \geq 0$$

a/a	$f(t)$	$F(s)$
1.	$\delta(t)$	1
2.	$1(t)$	$\frac{1}{s}$
3.	t	$\frac{1}{s^2}$
4.	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5.	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
6.	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
7.	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

να αναγνωρίζεται μορφή $\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
Παράδειγμα όπου $F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ δίνει $f(t) = \sin \omega t$
 και $F(s+a)$ δίνει $f(t)e^{-at}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{5}{s^2 + 4s + 13} \right] &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{5}{(s+2)^2 + 3^2} \right] \quad \text{πολλ.} \\ &\quad \text{by } \frac{3}{3} \\ &= \frac{5}{3} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{3}{(s+2)^2 + 3^2} \right] \\ &= \boxed{\frac{5}{3} e^{-2t} \sin 3t, t \geq 0} \end{aligned}$$

Αντίστροφος Μ/Σ Laplace

- Οι σχέσεις στο πεδίο Laplace είναι γενικά λόγοι δύο πολυωνύμων

$$X(s) = \frac{5s + 3}{(s + 1)(s^2 + 4s + 13)}$$

- Θέλουμε να τις μετατρέψουμε σε μορφές που βρίσκονται στους πίνακες
→ άθροισμα μερικών κλασμάτων

Άθροισμα μερικών κλασμάτων

- Διαχωρίζουμε την κλασματική σχέση σε άθροισμα απλούστερων κλασμάτων (αντιστροφή απλών παρανομαστών)

$$\frac{5s + 3}{(s + 1)(s^2 + 4s + 13)} = \frac{A}{s + 1} + \frac{Bs + C}{s^2 + 4s + 13}$$

- Θεωρούμε τρεις περιπτώσεις

Άθροισμα μερικών κλασμάτων

- Έστω m ο βαθμός του αριθμητή και n ο βαθμός του παρονομαστή
 - Εάν $(m < n)$ μπορούμε να αρχίσουμε
 - Εάν $(m \geq n)$ κάνουμε πρώτα διαίρεση
- Αρχίζουμε βρίσκοντας πρώτα τις ρίζες του παρονομαστή (πόλοι) και καθορίζουμε την περίπτωση που θα πάρουμε

Περίπτωση Ι: Διακριτοί πόλοι

- Παράδειγμα:
$$Y(s) = \frac{3s+2}{s^2+3s+2} = \frac{3s+2}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2} \text{ με } K_i = \lim_{s \rightarrow -p_i} Y(s) \cdot (s+p_i)$$

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \lim_{s \rightarrow -1} \frac{3s+2}{(s+1)(s+2)} \cdot (s+1) = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{3s+2}{s+2} = \frac{-3+2}{-1+2} = -1 \\ K_2 &= \lim_{s \rightarrow -2} \frac{3s+2}{(s+1)(s+2)} \cdot (s+2) = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{3s+2}{s+1} = \frac{-6+2}{-2+1} = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(s) = -1 \cdot \frac{1}{s+1} + 4 \cdot \frac{1}{s+2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \underline{\underline{y(t) = -e^{-t} + 4e^{-2t}}}$$

Περίπτωση II: Επαναλαμβανόμενοι πόλοι

• Παράδειγμα: $Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_{21}}{s+2} + \frac{K_{22}}{(s+2)^2}$

$$\mu\epsilon K_{ij} = \frac{1}{(r-j)!} \lim_{s \rightarrow -p_i} \left[\frac{d^{(r-j)}}{ds^{(r-j)}} \left(G(s) \cdot (s+p_i)^r \right) \right]$$

$$K_1 = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{1}{(s+1)(s+2)^2} \cdot (s+1) = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{1}{(s+2)^2} = \frac{1}{(-1+2)^2} = 1$$

$$K_{21} = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{s \rightarrow -2} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{(s+1)(s+2)^2} \cdot (s+2)^2 \right) = \frac{1}{1!} \lim_{s \rightarrow -2} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s+1} \right) = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{-1}{(s+1)^2} = \frac{-1}{(-2+1)^2} = -1 \Rightarrow$$

$$K_{22} = \frac{1}{(2-2)!} \lim_{s \rightarrow -2} \frac{d^0}{ds^0} \left(\frac{1}{(s+1)(s+2)^2} \cdot (s+2)^2 \right) = \frac{1}{0!} \lim_{s \rightarrow -2} \frac{1}{s+1} = \frac{1}{-2+1} = -1$$

$$\Rightarrow Y(s) = 1 \cdot \frac{1}{s+1} - 1 \cdot \frac{1}{s+2} - 1 \cdot \frac{1}{(s+2)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \underline{\underline{y(t) = e^{-t} - e^{-2t} - te^{-2t}}}$$

Περίπτωση III: Μιγαδικοί πόλοι

- Παράδειγμα : $Y(s) = \frac{2}{(s+3)(s^2+4)}$

- Μπορεί να επιλυθεί σαν περίπτωση I

$$Y(s) = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s-2j} + \frac{C}{s+2j}$$

- Ή όπως παρακάτω

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{A}{s+3} + \frac{Bs+C}{s^2+4} = \frac{A(s^2+4)}{(s+3)(s^2+4)} + \frac{(Bs+C)(s+3)}{(s+3)(s^2+4)} = \\ &= \frac{As^2+4A+Bs^2+3Bs+Cs+3C}{(s+3)(s^2+4)} = \frac{(A+B)s^2+(3B+C)s+4A+3C}{(s+3)(s^2+4)} \Rightarrow \end{aligned}$$

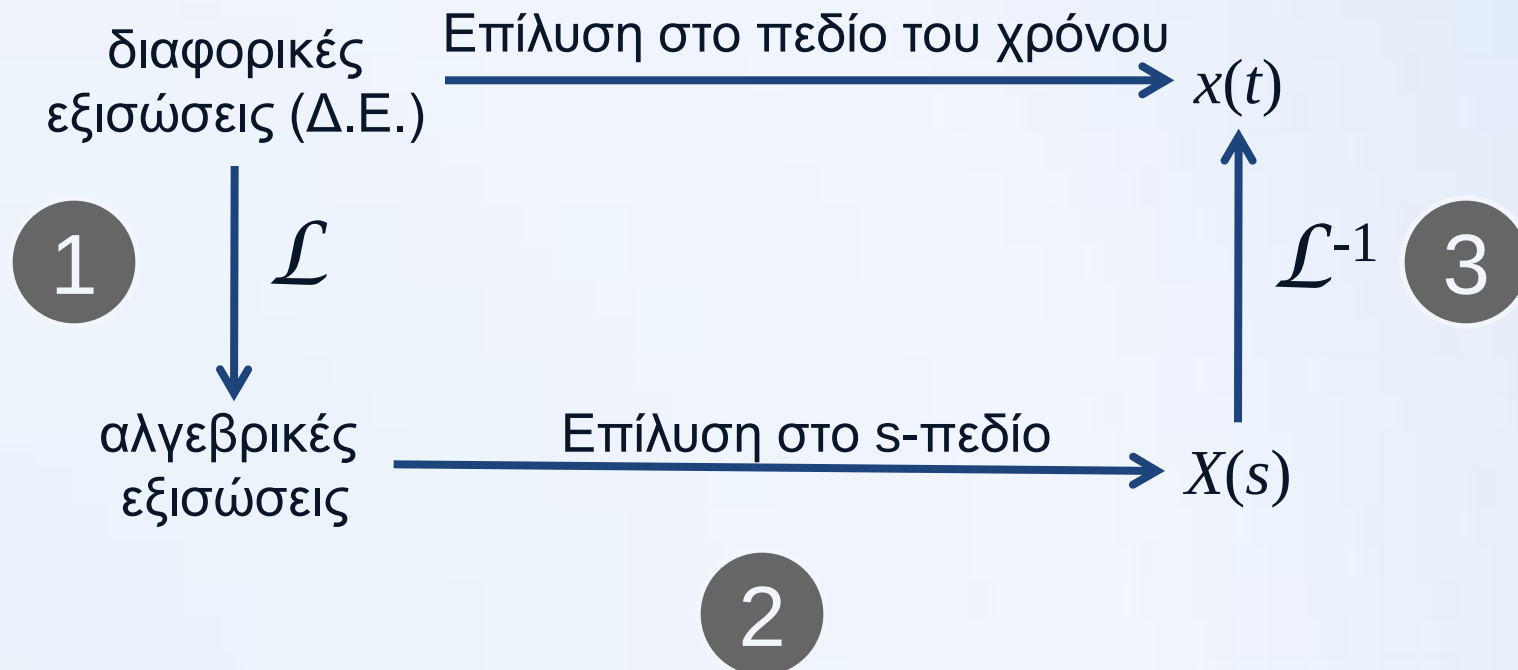
$$\begin{aligned} A+B=0, \quad 3B+C=0 \quad \text{και} \quad 4A+3C=2 &\Rightarrow A=-B, \quad C=-3B \quad \text{και} \quad -4B-9B=2 \Rightarrow \\ A=2/13, \quad B=-2/13 \quad \text{και} \quad C=6/13 &\text{ οπότε} \end{aligned}$$

$$Y(s) = \frac{2}{13} \cdot \frac{1}{s+3} + \frac{-(2/13)s + (6/13)}{s^2+4} = \frac{2}{13} \cdot \frac{1}{s+3} - \frac{2}{13} \frac{s}{s^2+2^2} + \frac{6}{26} \frac{2}{s^2+2^2}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \frac{2}{13} e^{-3t} - \frac{2}{13} \cos 2t + \frac{6}{26} \sin 2t$$

Επιλύοντας Δ.Ε. με M/Σ Laplace

- Ξαναθυμίζουμε τα βήματα επίλυσης



Παράδειγμα

Να λυθεί η Δ.Ε. με τη βοήθεια του Μ/Σ Laplace

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 3y = 2r(t)$$

όταν $y(0)=1$, $\dot{y}(0) = 0$ και $r(t) = 1$ για $t \geq 0$

$$\xrightarrow{L} \left[s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) \right] + 4[sY(s) - y(0)] + 3Y(s) = 2R(s) \Rightarrow$$

$$\left[s^2 Y(s) - 1 \cdot s - 0 \right] + 4[sY(s) - 1] + 3Y(s) = 2 \cdot \frac{1}{s} \Rightarrow (s^2 + 4s + 3)Y(s) = s + 4 + 2 \cdot \frac{1}{s} \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{s+4}{s^2+4s+3} + \frac{2}{s(s^2+4s+3)} = \frac{s+4}{(s+1)(s+3)} + \frac{2}{s(s+1)(s+3)} \Rightarrow$$

$$Y(s) = \left[\frac{3/2}{s+1} + \frac{-1/2}{s+3} \right] + \left[\frac{-1}{s+1} + \frac{1/3}{s+3} + \frac{2/3}{s} \right]$$

$$\xrightarrow{L^{-1}} y(t) = \left[\frac{3}{2} e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-3t} \right] + \left[-e^{-t} - \frac{1}{3} e^{-3t} + \frac{2}{3} \right]$$
$$= \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{5}{6} e^{-3t} + \frac{2}{3}$$

και απόκριση μόνιμης κατάστασης $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{2}{3}$

Εργασία

- Βρείτε τη λύση $x(t)$ των παρακάτω Δ.Ε. με τη βοήθεια του Μ/Σ Laplace:

$$\ddot{x} - 6\dot{x} + 8x = 2t^2 - 1 \text{ με } x(0) = 1 \text{ και } \dot{x}(0) = -2$$

$$\ddot{x} - 6\dot{x} + 8x = (t^2 - 1)e^{2t} \text{ με } x(0) = 1 \text{ και } \dot{x}(0) = 0$$