

Μετασχηματισμός LAPLACE

1

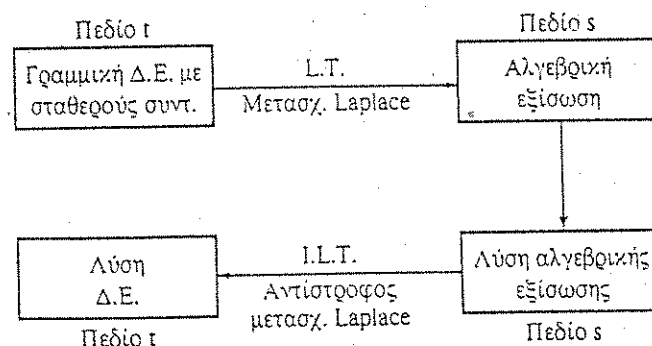
Κεφάλαιο

Σ' αυτό το κεφάλαιο

- Εισαγωγικές γνώσεις
- Τυπολόγιο
- Ασκήσεις στο κεφάλαιο 1
- Λύσεις των ασκήσεων του κεφαλαίου 1

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

Ο Μετασχηματισμός Laplace είναι ένα μαθηματικό εργαλείο για τη μελέτη και σχεδίαση των γραμμικών μη χρονικά μεταβαλλόμενων συστημάτων. Το μαθηματικό μοντέλο των συστημάτων που αναφέρθηκαν προηγούμενα αποτελείται από γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές. Ο μετασχηματισμός Laplace ανάγει την επίλυση μίας γραμμικής Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές σε επίλυση μίας αλγεβρικής εξίσωσης (σχήμα 1.1)



Σχήμα 1.1

Ο μετασχηματισμός Laplace μίας συνάρτησης $f(t)$ ορίζεται ως:

$$F(s) = LT \{f(t)\} = L \{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (1.1)$$

όπου $f(t)$ είναι συνάρτηση του χρόνου t , έτσι ώστε $f(t)=0$ για $t<0$ και s είναι μία μιγαδική μεταβλητή της μορφής:

$$s = \sigma + j\omega \quad (1.2)$$

• Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace μίας συνάρτησης $F(s)$, ορίζεται ως:

$$f(t) = ILT \{F(s)\} = L^{-1} \{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (1.3)$$

όπου η τιμή σύγκλισης c είναι μία πραγματική σταθερά, που είναι μεγαλύτερη από τα πραγματικά μέρη όλων των πόλων της $F(s)$. Ο υπολογισμός του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace γίνεται είτε με χρήση πινάκων (τυπολόγιο-πίνακες 1.2.1 και 1.2.2) είτε στην περίπτωση που η μορφή της $F(s)$ δεν περιλαμβάνεται στους πίνακες, στην κατάλληλη μετατροπή της ώστε ο αντίστροφός της να υπολογίζεται απ' ευθείας από τους πίνακες (τυπολόγιο-πίνακας 1.2.3). Ειδική αναφορά θα κάνουμε στα θεωρήματα αρχικής και τελικής τιμής (τυπολόγιο-πίνακας 1.2.1 - τύποι 18 και 19) τα οποία από τη μία αποτελούν μέσο επαλήθευσης της λύσης της διαφορικής εξίσωσης και από την άλλη επιτρέπουν την πρόβλεψη της συμπεριφοράς ενός συστήματος στο πεδίο του χρόνου χωρίς να απαιτείται ο μετασχηματισμός των συναρτήσεων της μιγαδικής μεταβλητής s στις αντίστοιχες χρονικές συναρτήσεις.

1.2 ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ
ΠΙΝΑΚΑΣ 1.2.1 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ LAPLACE

α/α	$f(t)$	$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$
1	$\alpha f_1(t) \pm \beta f_2(t)$	$\alpha F_1(s) \pm \beta F_2(s)$
2	$\frac{df(t)}{dt} = f'(t) = \dot{f}(t)$	$s F(s) - f(0)$
3	$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = f''(t) = \ddot{f}(t)$	$s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)$
4	$\frac{d^v f(t)}{dt^v} = f^{(v)}(t)$	$s^v F(s) - s^{v-1} f(0) - \dots - f^{(v-1)}(0)$
5	$\int_0^t f(t) dt$	$\frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0)}{s}$
6	$\int_0^t \int_0^r f(t) dt$	$\frac{F(s)}{s^2} + \frac{f^{(-1)}(0)}{s^2} + \frac{f^{(-2)}(0)}{s}$
7	$\int \dots \int f(t) (dt)^v$	$\frac{F(s)}{s^v} + \sum_{k=1}^v \left[\int \dots \int f(t) (dt)^k \right]_{t=0}$
8	$f(t-r) \cdot u(t-r)$	$e^{-rs} F(s)$
9	$t^v f(t)$	$(-1)^v \frac{d^v}{ds^v} F(s)$
10	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^{\infty} F(\sigma) d\sigma$
11	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s) \cdot F_2(s)$
12	$f_1(t) \cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(p) F_2(s-p) dp$
13	$e^{-\alpha t} \cdot f(t)$	$F(s+\alpha)$
14	$f\left(\frac{t}{\alpha}\right)$	$\alpha F(\alpha s)$
15	$f(t) \cos \omega t$	$\frac{1}{2} F(s-j\omega) + \frac{1}{2} F(s+j\omega)$
16	$f(\alpha t)$	$\frac{F(s/\alpha)}{\alpha}$
17	$\frac{f(t)}{t^v}$	$\int_s^{\infty} \dots \int_s^{\infty} F(s) (ds)^v$

(Συνεχίζεται)

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.2.1 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ LAPLACE

18	$\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} s F(s)$ Θεώρημα αρχικής τιμής
19	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$ Θεώρημα τελικής τιμής

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.2.2 ΖΕΥΓΗ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ LAPLACE

α/α	$F(s) = LT \{f(t)\}$	$f(t) = ILT \{F(s)\}$
1	1	$\delta(t)$
2	$\frac{1}{s}$	$u(t)$
3	$\frac{1}{s^2}$	t
4	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1}$, n θετικός ακέραιος
5	s	$\frac{d\delta(t)}{dt} = \delta^{(1)}(t)$
6	s^n	$\delta^{(n)}(t)$, n θετικός ακέραιος
7	$\frac{1}{\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
8	$\frac{1}{s^{n+1/2}}$	$\frac{2^n t^{n-1/2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \pi^{1/2}}$
9	$\frac{e^{-\alpha s}}{s}$	$u(t-\alpha)$
10	$\frac{1}{s} (1 - e^{-\alpha s})$	$u(t) - u(t-\alpha)$
11	$\frac{1}{s+\alpha}$	$e^{-\alpha t}$
12	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} \cdot e^{-\alpha t}$, n θετικός ακέραιος
13	$\frac{1}{s(s+\alpha)}$	$\frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha}$
14	$\frac{1}{s(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{1 - \frac{\beta}{\beta-\alpha} e^{-\alpha t} + \frac{\alpha}{\beta-\alpha} e^{-\beta t}}{\alpha \beta}$
15	$\frac{s+\gamma}{s(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{1}{\alpha \beta} \left(\gamma - \frac{\beta(\gamma-\alpha)}{\beta-\alpha} e^{-\alpha t} + \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\beta-\alpha} e^{-\beta t} \right)$

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.2.2 ΖΕΥΓΗ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ LAPLACE (Συνεχίζεται)

16	$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{\beta - \alpha}$
17	$\frac{s}{(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{\alpha e^{-\alpha t} - \beta e^{-\beta t}}{\alpha - \beta}$
18	$\frac{s+\gamma}{(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{(\gamma-\alpha)e^{-\alpha t} - (\gamma-\beta)e^{-\beta t}}{\beta - \alpha}$
19	$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)}$	$\frac{e^{-\alpha t}}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)} + \frac{e^{-\beta t}}{(\gamma-\beta)(\alpha-\beta)} + \frac{e^{-\gamma t}}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}$
20	$\frac{s+\delta}{(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)}$	$\frac{(\delta-\alpha)e^{-\alpha t}}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)} + \frac{(\delta-\beta)e^{-\beta t}}{(\gamma-\beta)(\alpha-\beta)} + \frac{(\delta-\gamma)e^{-\gamma t}}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}$
21	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$
22	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$
23	$\frac{s+\alpha}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}{\omega} \sin(\omega t + \varphi), \varphi = \tan^{-1} \frac{\omega}{\alpha}$
24	$\frac{s \cdot \sin \alpha + \omega \cdot \cos \alpha}{s^2 + \omega^2}$	$\sin(\omega t + \alpha)$
25	$\frac{1}{s(s^2 + \omega^2)}$	$\frac{1 - \cos \omega t}{\omega^2}$
26	$\frac{s+\alpha}{s(s^2 + \omega^2)}$	$\frac{\alpha}{\omega^2} - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}{\omega^2} \cos(\omega t + \varphi), \varphi = \tan^{-1} \frac{\omega}{\alpha}$
27	$\frac{1}{(s+\alpha)(s^2 + \omega^2)}$	$\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha^2 + \omega^2} + \frac{1}{\omega \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \sin(\omega t - \varphi), \varphi = \tan^{-1} \frac{\omega}{\alpha}$
28	$\frac{1}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}$	$\frac{e^{-\alpha t} \sin \beta t}{\beta}$
29	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}$	$e^{-\alpha t} \cos \beta t$
30	$\frac{s+\gamma}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}$	$\frac{\sqrt{(\gamma-\alpha)^2 + \beta^2}}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi), \varphi = \tan^{-1} \frac{\beta}{\gamma-\alpha}$
31	$\frac{1}{s[(s+\alpha)^2 + \beta^2]}$	$\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{1}{\beta \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} e^{-\alpha t} \sin(\beta t - \varphi), \varphi = \tan^{-1} \frac{\beta}{\alpha}$

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.2.2 ΖΕΥΓΗ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ LAPLACE (Συνεχίζεται)

32	$\frac{s+\gamma}{s[(s+\alpha)^2+\beta^2]}$	$\frac{\gamma}{\alpha^2+\beta^2} + \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{(\gamma-\alpha)^2+\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}} e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi),$ $\varphi = \tan^{-1} \frac{\beta}{\gamma-\alpha} - \tan^{-1} \frac{\beta}{-\alpha}$
33	$\frac{1}{s^2(s+\alpha)}$	$\frac{1}{\alpha^2} (\alpha t - 1 + e^{-\alpha t})$
34	$\frac{1}{s(s+\alpha)^2}$	$\frac{1}{\alpha^2} (1 - e^{-\alpha t} - \alpha t e^{-\alpha t})$
35	$\frac{s+\beta}{s(s+\alpha)^2}$	$\frac{1}{\alpha^2} (\beta - \beta e^{-\alpha t} + \alpha(\alpha - \beta)t e^{-\alpha t})$
36	$\frac{s^2+\alpha_1 s+\alpha_0}{s(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{\alpha_0}{\alpha\beta} + \frac{\alpha^2 - \alpha_1\alpha + \alpha_0}{\alpha(\alpha - \beta)} e^{-\alpha t} - \frac{\beta^2 - \alpha_1\beta + \alpha_0}{\beta(\alpha - \beta)} e^{-\beta t}$
37	$\frac{s^2+\alpha_1 s+\alpha_0}{s[(s+\alpha)^2+\beta^2]}$	$\frac{\alpha_0}{\alpha^2+\beta^2} + \frac{1}{\beta(\alpha^2+\beta^2)} \cdot$ $\cdot \sqrt{(\alpha^2 - \beta^2 - \alpha_1\alpha + \alpha_0)^2 + \beta^2(\alpha_1 - 2\alpha)^2} e^{-\alpha t} \cdot$ $\cdot \sin(\beta t + \varphi),$ $\varphi = \tan^{-1} \frac{\beta(\alpha_1 - 2\alpha)}{\alpha^2 - \beta^2 - \alpha_1\alpha + \alpha_0} - \tan^{-1} \frac{\beta}{-\alpha}$
38	$\frac{1}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega^3} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$
39	$\frac{1}{s^2 - \omega^2}$	$\frac{1}{\omega} \sinh \omega t$
40	$\frac{1}{(s+\alpha)^2(s+\beta)}$	$\frac{1}{(\beta - \alpha)^2} [(\beta - \alpha)t - 1] e^{-\alpha t} + e^{-\beta t}$
41	$\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^3} (\omega t - \sin \omega t)$
42	$\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\frac{t}{2\omega} \sin \omega t$
43	$\frac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega} (\omega t \cos \omega t + \sin \omega t)$

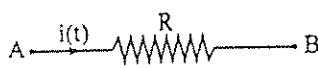
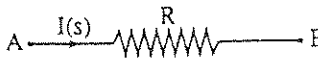
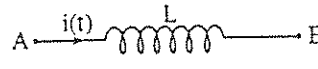
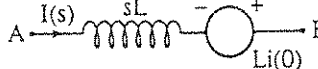
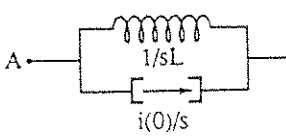
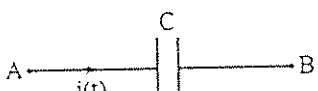
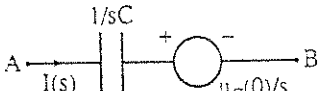
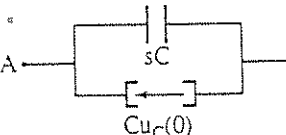
ΠΙΝΑΚΑΣ 1.2.2 ΖΕΥΓΗ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ LAPLACE (Συνεχίζεται)

44	$\frac{s^n}{(s^2 + \omega^2)^{n+1}}$	$\frac{t^n \sin \omega t}{n! 2^n \omega}$
45	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$t \cos \omega t$
46	$\frac{s}{(s^2 + \alpha^2)(s^2 + \beta^2)}$	$\frac{\cos \alpha t - \cos \beta t}{\beta^2 - \alpha^2}$
47	$\frac{s^2}{(s + \alpha)(s + \beta)(s + \gamma)}$	$\frac{\alpha^2 e^{-\alpha t}}{(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)} + \frac{\beta^2 e^{-\beta t}}{(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)} + \frac{\gamma^2 e^{-\gamma t}}{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)}$
48	$\frac{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}{s^2(s + \alpha)(s + \beta)}$	$\frac{\alpha_1 + \alpha_0 t}{\alpha \beta} - \frac{\alpha_0(\alpha + \beta)}{(\alpha \beta)^2} - \frac{1}{\alpha - \beta} \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha} + \frac{\alpha_0}{\alpha^2} \right) e^{-\alpha t} -$ $-\frac{1}{\alpha - \beta} \left(1 - \frac{\alpha_1}{\beta} + \frac{\alpha_0}{\beta^2} \right) e^{-\beta t}$
49	$\frac{s + \gamma}{s^2[(s + \alpha)^2 + \beta^2]}$	$\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \left(\gamma t + 1 - \frac{2\gamma\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \right) +$ $+\frac{\sqrt{\beta^2 + (\gamma - \alpha)^2}}{\beta(\alpha^2 + \beta^2)} e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi),$ $\varphi = 2 \tan^{-1} \frac{\beta}{\alpha} + \tan^{-1} \frac{\beta}{\gamma - \alpha}$
50	$\frac{1}{(s + \gamma)[(s + \alpha)^2 + \beta^2]}$	$\frac{e^{-\gamma t}}{(\gamma - \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{e^{-\alpha t} \sin(\beta t - \varphi)}{\beta \sqrt{(\gamma - \alpha)^2 + \beta^2}},$ $\varphi = \tan^{-1} \frac{\beta}{\gamma - \alpha}$
51	$\frac{1}{s^2(s + \alpha)^2}$	$\frac{1}{\alpha^2} t(1 + e^{-\alpha t}) - \frac{2}{\alpha^3} (1 - e^{-\alpha t})$

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.2.3 ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ $F(s)$ ΣΕ ΜΕΡΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

1	$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}, \quad m < n$
ΔΙΑΚΡΙΤΟΙ	• $F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)} = \frac{k_1}{s+p_1} + \frac{k_2}{s+p_2} + \dots + \frac{k_n}{s+p_n}$ • $k_i = \lim_{s \rightarrow -p_i} F(s) \cdot (s+p_i)$ • $P_1, P_2, \dots, P_n$ και $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$ είναι είτε πραγματικοί είτε μιγαδικοί αριθμοί.
ΠΟΛΛΑΠΛΟΙ	• $F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{(s+z_1) \cdot (s+z_2) \cdot \dots \cdot (s+z_m)}{(s+p_1)^r (s+p_2) \cdot \dots \cdot (s+p_n)} =$ $= \frac{k_{11}}{s+p_1} + \frac{k_{12}}{(s+p_1)^2} + \dots + \frac{k_{1r}}{(s+p_1)^r} + \frac{k_2}{s+p_2} + \dots + \frac{k_n}{s+p_n}$ • $k_{ij} = \frac{1}{(r-j)!} \lim_{s \rightarrow -p_i} \left[\frac{d^{(r-j)}}{ds^{(r-j)}} (F(s) \cdot (s+p_i)^r) \right]$ • $k_i = \lim_{s \rightarrow -p_i} F(s) \cdot (s+p_i)$
2	$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}, \quad m > n$ Αν ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή είναι μεγαλύτερος του παρονομαστή, εκτελείται η διαίρεση των $B(s)/A(s)$ που δίνει ένα πολυώνυμο του s, συν το κλάσμα του υπολοίπου δια του παρονομαστή που ανάγεται στην κατηγορία 1.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.2.4 ΠΑΘΗΤΙΚΑ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΟΥΣ ΚΑΤΑ LAPLACE

ΟΝΟΜΑΣΙΑ	ΜΗ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΕΝΟ (πεδίο t)	ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΕΝΟ (πεδίο s)
ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ	 $u_R(t) = Ri(t)$	 $V_R(s) = RI(s)$
ΠΗΝΙΟ	 $u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ $\Updownarrow$ $i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u_L(t) dt$	 $V_L(s) = sLI(s) - Li(0)$ $\Updownarrow$  $I(s) = \frac{V_L(s)}{sL} + \frac{i(0)}{s}$
ΠΥΚΝΩΤΗΣ	 $i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$ $\Updownarrow$ $u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt$	 $I(s) = sC V_C(s) - Cu_C(0)$ $\Updownarrow$  $V_C(s) = \frac{I(s)}{sC} + \frac{u_C(0)}{s}$

$$i(t) = \frac{dq}{dt}$$

$$C = \frac{Q}{V}$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.2.5 ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

α/α	$z = x + jy = \rho e^{j\theta} = \rho \angle \theta = \rho (\cos \theta + j \sin \theta)$
1	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, Μέτρο μιγάδα
2	$\left. \begin{aligned} \theta &= \tan^{-1} \frac{y}{x} , & x, y > 0 \\ \theta &= -\tan^{-1} \frac{ y }{x} , & x > 0 \text{ και } y < 0 \\ \theta &= 180^\circ - \tan^{-1} \frac{y}{ x } , & x < 0 \text{ και } y > 0 \\ \theta &= 180^\circ + \tan^{-1} \frac{ y }{ x } , & x, y < 0 \end{aligned} \right\} \text{όρισμα μιγάδα}$
3	$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2 \cos \theta$.
4	$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j \sin \theta$
5	$(x + jy) + (\alpha + j\beta) = (x + \alpha) + j(y + \beta)$, πρόσθεση μιγάδων .
6	$(x + jy) - (\alpha + j\beta) = (x - \alpha) + j(y - \beta)$, αφαίρεση μιγάδων
7	$\rho_1 e^{j\theta_1} \cdot \rho_2 e^{j\theta_2} = \rho_1 \rho_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$, πολλαπλασιασμός μιγάδων
8	$\frac{\rho_1 e^{j\theta_1}}{\rho_2 e^{j\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j\frac{\theta_1}{\theta_2}}$, διαίρεση μιγάδων