

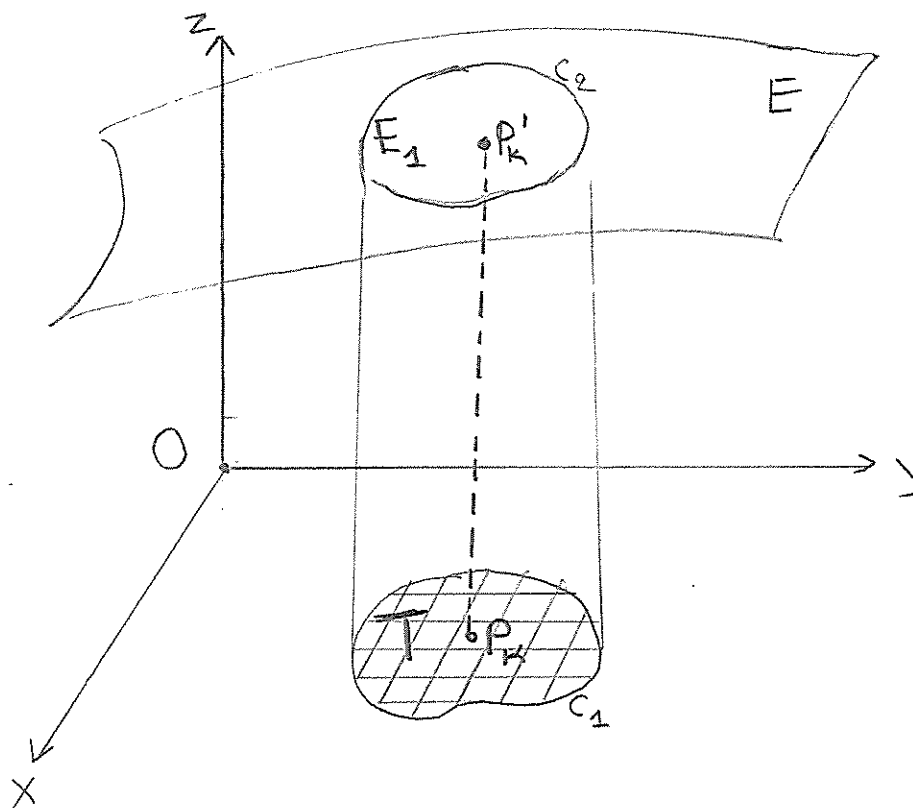
Μάθημα 12^ο

Διπλά Ολοκληρώματα

Ορισμός

Θεωρούμε ένα τόπο (χωρίο) T στο επίπεδο xOy που περικλείεται από την καμπύλη c_1 . Θεωρούμε και την συνάρτηση $z = f(x,y)$ η οποία είναι συνεχής στον τόπο T . Η συνάρτηση $z = f(x,y)$ παριστάνει μία επιφάνεια E .

Από όλα τα σημεία της c_1 φέρνω παραλλήλους προς τον άξονα Oz . Σχηματίζεται μία κυλινδρική επιφάνεια, η οποία τέμνει την επιφάνεια E κατά την καμπύλη c_2 και η οποία περικλείει το τμήμα E_1 της επιφάνειας E .



Καλώ V τον όγκο του στερεού το οποίο περικλείεται από τον τόπο T , την επιφάνεια E_1 και την κυλινδρική επιφάνεια. Χωρίζουμε τον τόπο T σε μικρότερα χωρία $T_1, T_2, \dots, T_v$ φέρνοντας παράλληλες προς τους άξονες Ox, Oy . Με $T_1, T_2, \dots, T_v$ παριστάνουμε συγχρόνως και το εμβαδόν κάθε χωρίου. Σε κάθε χωρίο T_k ($k = 1, 2, \dots, v$) παίρνω τυχαίο σημείο $P_k(x_k, y_k)$. Η τιμή της συνάρτησης $z = f(x, y)$ στο σημείο αυτό είναι $z_k = f(x_k, y_k) = P_k P'_k$, όπου P'_k είναι το σημείο στο οποίο η παράλληλη από το P_k προς τον άξονα Oz τέμνει την επιφάνεια E_1 . Το γινόμενο $T_k \cdot f(x_k, y_k)$ μας δίνει τον όγκο του πρίσματος το οποίο έχει βάση T_k και ύψος $P_k P'_k$. Σχηματίζουμε το άθροισμα

$T_1 \cdot f(x_1, y_1) + T_2 \cdot f(x_2, y_2) + \dots + T_v \cdot f(x_v, y_v)$,
το οποίο παριστάνουμε

$$\sum_{k=1}^v T_k \cdot f(x_k, y_k).$$

Το άθροισμα των όγκων όλων αυτών των πρισμάτων διαφέρει από τον όγκο V του στερεού τόσο λιγότερο όσο το V είναι μεγαλύτερο και τα $T_1, T_2, \dots, T_v$ μικρότερα. Έστω θα είναι

$$V = \lim_{v \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^v T_k \cdot f(x_k, y_k) \quad \text{όταν } v \rightarrow \infty$$

και επομένως $T_1, T_2, \dots, T_v \rightarrow 0$ με όλες τις διαστάσεις. Το όριο αυτό ονομάζεται διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x, y)$ στον τόπο T και συμβολίζεται $\iint_T f(x, y) dx dy$.

Ιδιότητες διπλών ολοκληρωμάτων

1. Αν ο τόπος T χωρίζεται στους τόπους $T_1, T_2, \dots, T_k$ τότε

$$\iint_T f(x, y) dx dy = \iint_{T_1} f(x, y) dx dy + \dots + \iint_{T_k} f(x, y) dx dy$$

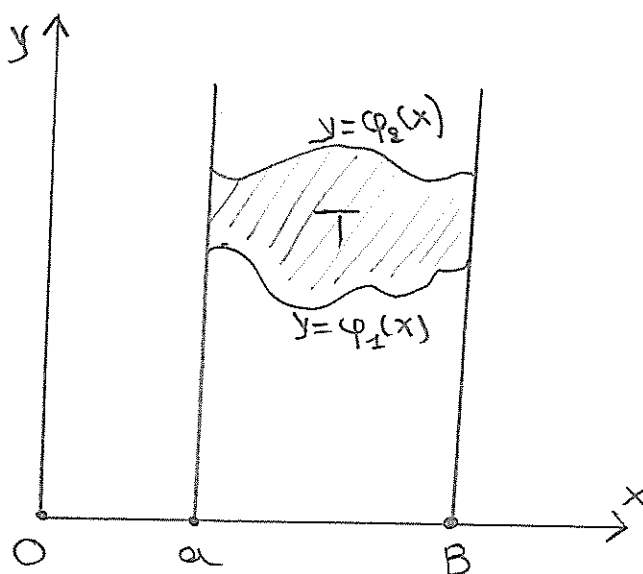
2. $\iint_T \alpha \cdot f(x, y) dx dy = \alpha \cdot \iint_T f(x, y) dx dy$, α σταθερά.

3.
$$\iint_T [f_1(x, y) + f_2(x, y)] dx dy = \iint_T f_1(x, y) dx dy + \iint_T f_2(x, y) dx dy$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις

- 1) Αν ο τόπος T ορίζεται από τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$, και τις καμπύλες $y = \varphi_1(x)$ και $y = \varphi_2(x)$, τότε

$$\iint_T f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \right) dx$$



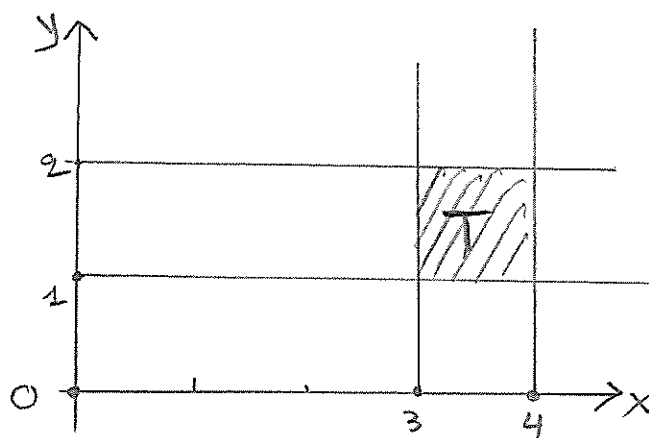
Το εμβαδόν E του τόπου T δίνεται από την σχέση

$$E = \int_{\alpha}^{\beta} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \right) dx$$

η οποία προκύπτει από την προηγούμενη σχέση
βάζοντας $f(x,y) = 1$.

Παράδειγμα 1.

Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα $I = \iint_T \frac{1}{(x+y)^2} dx dy$,
όπου T είναι ο ακόλουθος τόπος



Λύση

Ο τόπος T ορίζεται από τις ευθείες $x = 3$, $x = 4$ και
 $y = 1$, $y = 2$ και άρα έχουμε

$$I = \int_3^4 dx \int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2} dy = \int_3^4 \left(\int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2} dy \right) dx$$

Υπολογίζω πρώτα το ολοκλήρωμα $\int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2} dy$.

$$\int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2} dy = \int_1^2 (x+y)^{-2} dy = \left[-\frac{1}{x+y} \right]_1^2 = -\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+1}$$

οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int_3^4 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = [\ln(x+1) - \ln(x+2)]_3^4 = \\ &= \left[\ln \frac{x+1}{x+2} \right]_3^4 = \ln \frac{5}{6} - \ln \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Παρατήρηση

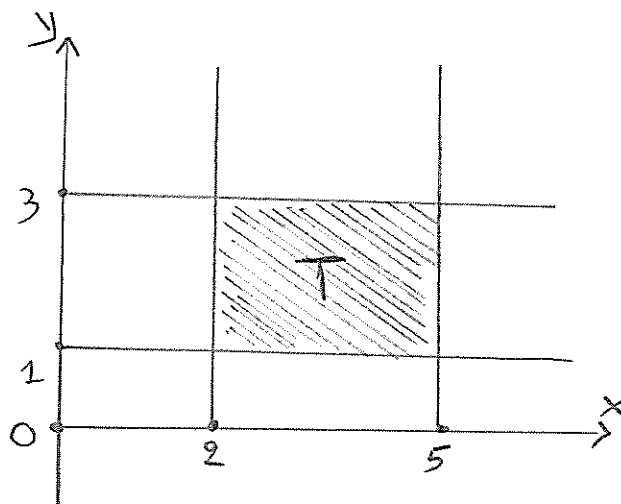
Όταν ολοκληρώνω ως προς y , το x θεωρείται σταθερά.

Όταν όμως ολοκληρώνω ως προς x , το y θεωρείται σταθερά.

Παράδειγμα 2.

Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα

$$I = \iint_T (5x^2y - 2y^3) dx dy, \text{ όπου } T \text{ είναι ο ακόλουθος τόπος}$$



Λύση

Ο τόπος T ορίζεται από τις ευθείες $x = 2$, $x = 5$ και τις καμπύλες $y = 1$, $y = 3$, οπότε

$$I = \int_2^5 dx \int_1^3 (5x^2 y - 2y^3) dy$$

Υπολογίζω πρώτα το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} \int_1^3 (5x^2 y - 2y^3) dy &= \left[5x^2 \cdot \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot y^4 \right]_1^3 = \\ &= \left(\frac{5}{2} \cdot x^2 \cdot 9 - \frac{81}{2} \right) - \left(5 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \right) = 8 \cdot \frac{5}{2} \cdot x^2 - \frac{80}{2} = \\ &= 20x^2 - 40 \end{aligned}$$

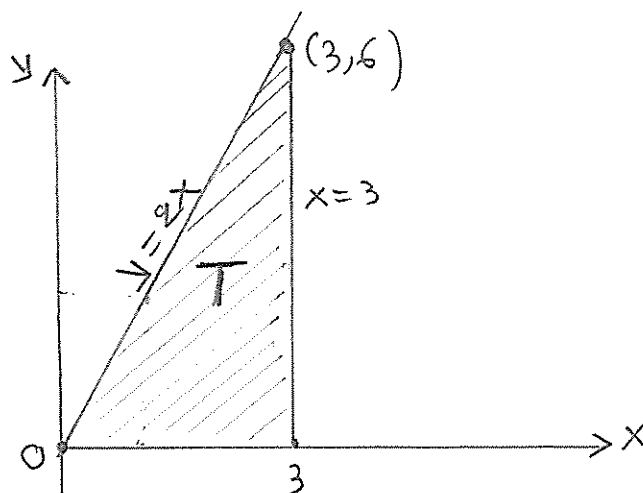
και τελικά

$$\begin{aligned} I &= \int_2^5 (20x^2 - 40) dx = \left[20 \cdot \frac{x^3}{3} - 40x \right]_2^5 = \\ &= \left(\frac{20 \cdot 125}{3} - 40 \cdot 5 \right) - \left(\frac{20 \cdot 8}{3} - 80 \right) = \\ &= \frac{20}{3} \cdot (125 - 8) - 120 = \frac{20 \cdot 117}{3} - 120 = \\ &= 20 \cdot 39 - 120 = 660 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.

Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα

$I = \iint_T y dx dy$, όπου ο τόπος T ορίζεται από τις ευθείες $x = 3$, $y = 0$, $y = 2x$.

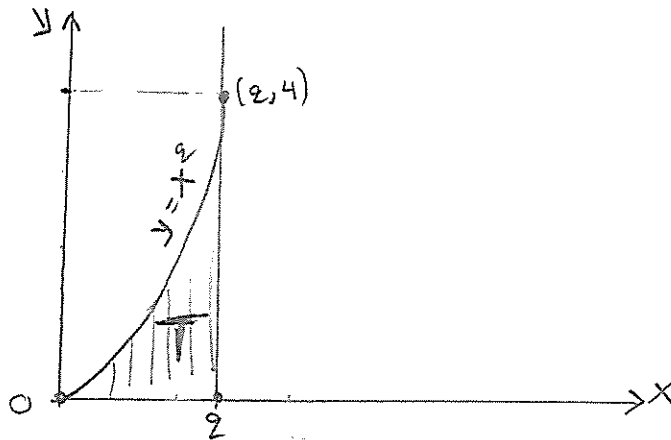
Λύση

$$\begin{aligned}
 \text{Έχουμε: } I &= \int_0^3 dx \int_0^{2x} y dy = \int_0^3 \left(\int_0^{2x} y \cdot dy \right) dx = \\
 &= \int_0^3 \left(\left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{2x} \right) dx = \int_0^3 \left(\frac{(2x)^2}{2} \right) dx = \int_0^3 2x^2 dx = \\
 &= 2 \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 2 \cdot \frac{3^3}{3} = 18.
 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 4.

Να υπολογιστεί το $I = \iint_T (x - y) dx dy$, όπου T είναι ο τόπος που ορίζεται από τις ευθείες $x=0$, $x=2$ και τις καμπύλες $y=0$ και $y=x^2$.

Λύση



Έχουμε

$$I = \int_0^2 dx \int_0^{x^2} (x - y) dy = \int_0^2 \left[\int_0^{x^2} (x - y) dy \right] dx$$

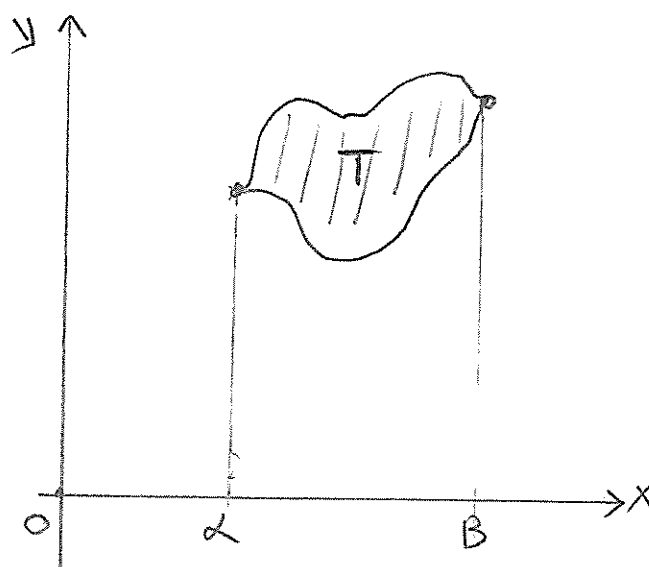
Υπολογίζω πρώτα το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}
 \int_0^{x^2} (x - y) dy &= \left[x \cdot y - \frac{y^2}{2} \right]_0^{x^2} = \left(x \cdot x^2 - \frac{(x^2)^2}{2} \right) - \\
 &= \left(x \cdot 0 - \frac{0^2}{2} \right) = x^3 - \frac{x^4}{2}, \text{ άρα το } I \text{ είναι:}
 \end{aligned}$$

$$I = \int_0^2 \left(x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2^5}{5} =$$

$$= \frac{16}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{32}{5} = 4 - \frac{16}{5} = \frac{20-16}{5} = \frac{4}{5} \quad \blacksquare$$

- 2) Αν ο τόπος ορίζεται από τις καμπύλες $y = \phi_1(x)$ και $y = \phi_2(x)$ που τέμνονται, τότε βρίσκουμε τα σημεία τομής τους λύνοντας το σύστημα $y = \phi_1(x)$, $y = \phi_2(x)$



και έχουμε

$$\iint_T f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy$$

όπου α, β είναι οι τετμημένες των λύσεων του παραπάνω συστήματος.

Το εμβαδόν E του τόπου T δίνεται από την σχέση

$$E = \int_{\alpha}^{\beta} dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} dy$$

Παράδειγμα 5.

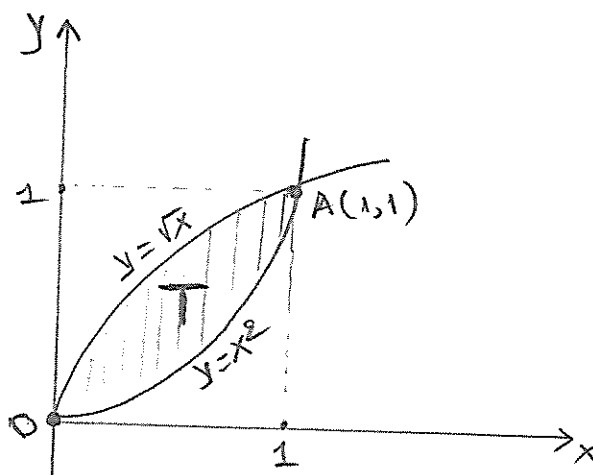
Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα

$I = \iint_T (y^2 + x) dx dy$, όπου ο τόπος T ορίζεται από τις παραβολές $y = x^2$, $y^2 = x$

Λύση

Λύνω το σύστημα των εξισώσεων $y = x^2$ και $y^2 = x$ στο 1^ο τεταρτημόριο, το οποίο είναι ισοδύναμο με το σύστημα

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$



Άρα έχουμε

$$I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (y^2 + x) dy = \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (y^2 + x) dy \right] dx$$

(σημείωση: εδώ $x^2 < \sqrt{x}$ γιατί $x \in (0,1)$)

! Για το σύστημα

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x^2 = \sqrt{x} \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4 = x \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4 - x = 0 \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x^3 - 1) = 0 \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Υπολογίζω το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}
 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (y^2 + x) dy &= \left[\frac{y^3}{3} + x \cdot y \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} = \\
 &= \left(\frac{(\sqrt{x})^3}{3} + x \cdot \sqrt{x} \right) - \left(\frac{(x^2)^3}{3} + x \cdot x^2 \right) = \\
 &= \frac{x \cdot \sqrt{x} + 3x \cdot \sqrt{x}}{3} - \frac{x^6}{3} + x^3 = \frac{4x\sqrt{x}}{3} - \frac{x^6}{3} + x^3, \text{ άρα} \\
 I &= \int_0^1 \left(\frac{4}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \cdot x^6 + x^3 \right) dx = \left[\frac{4}{3} \cdot \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{1}{5} \cdot \frac{x^7}{7} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \\
 &= \left[\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^7}{7} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{8}{15} \cdot 1^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} - \frac{1}{4} = \dots
 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 6.

Να βρεθεί το εμβαδόν E του τόπου T στο προηγούμενο παράδειγμα

Λύση

Έχουμε

$$E = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy \right) dx$$

αλλά

$$\int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy = [y]_{x^2}^{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - x^2$$

οπότε

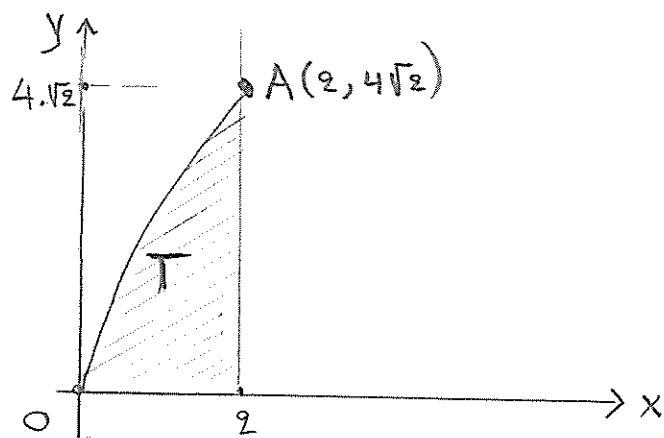
$$E = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^2 \right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \left[\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \cdot x^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \quad \text{τ.μ.} \quad \blacksquare$$

Παράδειγμα 7.

Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα

$$I = \iint_T (x^2 + y) dx dy \quad \text{όταν } x=2, y=0, y=\sqrt{8} \cdot x$$

Λύση

Έχουμε

$$I = \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{8}x} (x^2 + y) dy \right) dx$$

Υπολογίζω πρώτα το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{8}x} (x^2 + y) dy &= \left[x^2 \cdot y + \frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{8}x} = x^2 \cdot \sqrt{8} \cdot x + \frac{8x^2}{2} = \\ &= x^3 \cdot \sqrt{8} + 4x^2 \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 (\sqrt{8} \cdot x^3 + 4x^2) dx = \left[\sqrt{8} \cdot \frac{x^4}{4} + 4 \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \\ &= \sqrt{8} \cdot \frac{16}{4} + 4 \cdot \frac{8}{3} = 4 \cdot (\sqrt{8} + \frac{8}{3}) \end{aligned}$$

Ασκήσεις

1) Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα

$$I = \iint_T (x + 2y) dx dy, \text{ όπου ο τόπος } T \text{ ορίζεται)}$$

από τις ευθείες $x = 2$, $x = 3$, $y = x$, $y = 2x$

2) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου T που ορίζεται από τις ευθείες $x = 1$, $x = 2$ και $y = x$.