

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

1) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^1 (x+1)e^x dx$$

Απάντ. $I = e$.

2) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x+5}}$$

Απάντ. $I = \sqrt{2x+5} + c$

3) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int \eta \mu^9 x \cos x dx$$

Απάντηση Το ολοκλήρωμα γράφεται

$$I = \int \eta \mu^9 x \cdot (\eta \mu x)' dx$$

Θέτουμε $\eta \mu x = t$ και $dt = (\eta \mu x)' dx$, οπότε

$$I = \int t^9 dt = \frac{t^{10}}{10} + c \quad \text{και με αντικατάσταση στην}$$

αρχική μεταβλητή έχουμε $I = \frac{\eta \mu^{10} x}{10} + c$

4) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{(x+3)}{(x^2+6x)^{1/3}} dx$

Απάντ. $I = \frac{3}{4} (x^2+6x)^{2/3} + c$

5) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int \sqrt[3]{1+3\eta\mu x} \cdot \varsigma\upsilon\nu x \, dx$$

Απάντηση

Θέτω $1+3\eta\mu x = t$ οπότε $dt = (1+3\eta\mu x)' dx$
 ή $dt = 3\varsigma\upsilon\nu x \, dx \Rightarrow \varsigma\upsilon\nu x \cdot dx = \frac{dt}{3}$

Επομένως $I = \int \sqrt[3]{t} \cdot \frac{dt}{3}$ ή $I = \frac{1}{3} \int t^{\frac{1}{3}} dt$

ή $I = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + c = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = \frac{t^{\frac{4}{3}}}{4} + c$

Αντικαθιστώντας, έχουμε

$$I = \frac{(1+3\eta\mu x)^{\frac{4}{3}}}{4} + c.$$

6) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^{16} x \cdot \varsigma\upsilon\nu x \, dx$$

Απάντηση

Θέτω $\eta\mu x = t \Rightarrow dt = (\eta\mu x)' dx$ ή $dt = \varsigma\upsilon\nu x \, dx$

Αλλάζω και τα όρια του ολοκληρώματος ως προς t .

Για $x=0 \Rightarrow t = \eta\mu 0 = 0$ (χρησιμοποιώ τη σχέση $\eta\mu x = t$)

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \eta\mu \frac{\pi}{2} = 1$

οπότε $I = \int_0^1 t^{16} dt = \left[\frac{t^{17}}{17} \right]_0^1 = \frac{1}{17} - 0 = \frac{1}{17}$

7. Να υπολογιστεί το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^1 e^{x^2-x+1} \cdot (2x-1) \cdot dx$$

Απάντηση

Θέτω $x^2-x+1 = t \Rightarrow dt = (x^2-x+1)' dx \Rightarrow dt = (2x-1) dx$
και

για $x=0 \Rightarrow t=1$

για $x=1 \Rightarrow t=1$, οπότε

$$I = \int_1^1 e^t dt = 0$$

8. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^1 (x^2+1)^{10} \cdot x dx$$

Απάντηση

Θέτω $t = x^2+1$, οπότε $dt = (x^2+1)' dx$

$$\text{ή } dt = 2x dx \Rightarrow \frac{dt}{2} = x \cdot dx$$

Από τη σχέση $t = x^2+1$ έχουμε:

για $x=0 \Rightarrow t=1$

για $x=1 \Rightarrow t=2$

οπότε το ολοκλήρωμα γίνεται

$$I = \int_1^2 t^{10} \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{t^{11}}{11} \right]_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2^{11}}{11} - \frac{1^{11}}{11} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2^{11}-1}{11} \right) = \frac{1023}{11}$$

9. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 5x + 6$, τις ευθείες $x = 0$, $x = 5$ και τον άξονα Ox .

Απάντ. $\frac{19}{2}$ τ.μ.

10. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2 - x^2$, $g(x) = x^2$ και τις ευθείες $x = -2$, $x = 2$.

Απάντηση

Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$.

Έχουμε

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2 - x^2 = x^2 \Rightarrow 2 - 2x^2 = 0 \text{ ή } 2(1 - x^2) = 0$$

άρα

$$1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

Άρα τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι $A = (-1, 1)$ και $B = (1, 1)$.

Το πρόσημο του $f(x) - g(x) = 2(1+x) \cdot (1-x)$ δίνεται από τον πίνακα

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$2(1-x^2)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Έχουμε $E = \int_{-2}^2 |f(x) - g(x)| dx =$

$$= 2 \int_{-2}^{-1} (1-x^2) dx + 2 \int_{-1}^1 (1+x^2) dx - 2 \int_1^2 (1-x^2) dx = \dots = 9 \text{ τ.μ.}$$