

ΜΑΘΗΜΑ 11

1. Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού
 Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$. Αν F είναι μία παράγουσα της f στο $[a, b]$, τότε
- $$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Παρατήρηση

Γεωμετρικά, το ορισμένο ολοκλήρωμα από a έως b δίνει το εμβαδόν του επιπέδου τόπου που ορίζεται από την καμπύλη $y=f(x)$, τον άξονα $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x=a$ και $x=b$, με την προϋπόθεση ότι $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$.

Παράδειγμα 1.

Να υπολογιστεί, αν υπάρχει, το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x^3 dx$

Λύση

Η συνάρτηση x^3 είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$, άρα το ολοκλήρωμα υπάρχει.

Έχουμε ότι

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c, \text{ δηλ. η } \frac{x^4}{4} \text{ παράγουσα της } f(x)$$

άρα

$$\int_0^1 x^3 dx = F(1) - F(0) = \frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Όμοια γράφουμε } \int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{1}{4}$$

Παράδειγμα 2

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \eta \mu x dx$

Λύση.

Η συνάρτηση $f(x) = \eta \mu x$ είναι συνεχής στο $[0, \frac{\pi}{4}]$, οπότε

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \eta \mu x dx = \left[-\sigma \nu x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = - \left[\sigma \nu \left(\frac{\pi}{4} \right) - \sigma \nu 0 \right] = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$$

Ιδιότητες ορισμένων ολοκληρωμάτων

$$1. \int_a^a f(x) dx = 0.$$

$$2. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$3. \int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$4. \int_a^b [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx$$

$$5. \int_a^b f(x) dx = \int_a^x f(x) dx + \int_x^b f(x) dx, \text{ όπου } a \leq x \leq b.$$

Παράδειγμα 3.

$$\begin{aligned} \int_0^1 (3x^2 - 4x + 1) dx &= \left[3 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 = \left[x^3 - 2x^2 + x \right]_0^1 = \\ &= (1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1) - (0^3 - 2 \cdot 0^2 + 0) = 0 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 4.

$$\int_0^{\pi} \sigma \nu x dx = \left[\eta \mu x \right]_0^{\pi} = \eta \mu \pi - \eta \mu 0 = 0$$

Παράδειγμα 5.

$$\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

Παράδειγμα 6.

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$$

Παράδειγμα 7.

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{1}{2x+1} dx &= \left[\frac{1}{2} \cdot \ln(2x+1) \right]_1^3 = \frac{1}{2} \cdot \ln 7 - \frac{1}{2} \cdot \ln 3 \\ &= \frac{1}{2} (\ln 7 - \ln 3) = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{7}{3}\right). \end{aligned}$$

Παράδειγμα 8.

$$\int_0^1 e^{3x} dx = \left[\frac{1}{3} \cdot e^{3x} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \cdot e^{3 \cdot 1} - \frac{1}{3} \cdot e^{3 \cdot 0} = \frac{1}{3} \cdot (e^3 - 1)$$

Παράδειγμα 9.

$$\int_1^e \ln x dx$$

Λύση.

$$\text{Επειδή } \int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx = \int (x)' \cdot \ln x dx =$$

$$= x \cdot \ln x - \int x \cdot (\ln x)' dx = x \cdot \ln x - x, \text{ έπειτα}$$

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln x dx &= [x \cdot \ln x - x]_1^e = (e \cdot \ln e - e) - (1 \cdot \ln 1 - 1) = \\ &= (e \cdot 1 - e) - (1 \cdot 0 - 1) = 1 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 10.

$$\int_0^3 (4x+1)^2 dx = \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{(4x+1)^3}{3} \right]_0^3 = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{(4 \cdot 3 + 1)^3}{3} - \frac{(4 \cdot 0 + 1)^3}{3} \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{13^3}{3} - \frac{1^3}{3} \right) = \frac{1}{4} \cdot 732 = 183.$$

Παράδειγμα 11.

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x \cdot e^x dx$

Λύση

$$\text{Έχουμε ότι } \int x \cdot e^x dx = \int x \cdot (e^x)' dx = x \cdot e^x - \int (x)' \cdot e^x dx$$

$$= x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + c.$$

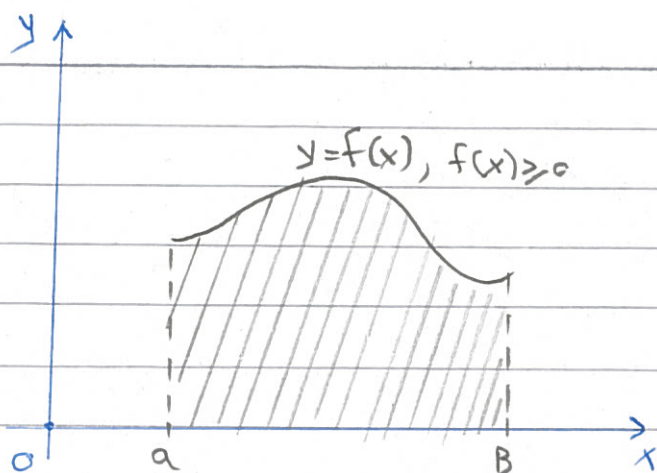
$$\text{οπότε } \int_0^1 x \cdot e^x dx = \left[x \cdot e^x - e^x \right]_0^1 = \left(1 \cdot e^1 - e^1 \right) - \left(0 \cdot e^0 - e^0 \right) = 1.$$

2. Εμβαδόν Επιπέδου Χωρίου

Με την βοήθεια του ορισμένου ολοκληρώματος μπορούμε να υπολογίσουμε εμβαδά επιπέδων χωρίων.

α. Αν μία συνάρτηση $y=f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ με $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [a, b]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από το διάγραμμα της συνάρτησης, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=a$ και $x=b$ δίνεται από το ολοκλήρωμα

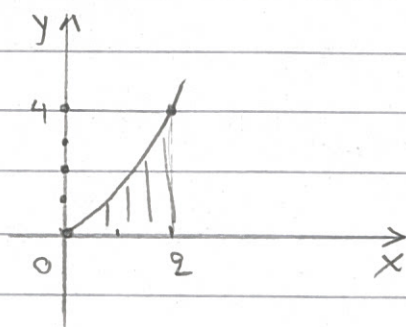
$$E = \int_a^b f(x) dx \quad (\text{σχήμα 1})$$



(σχήμα 1)

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=2$.

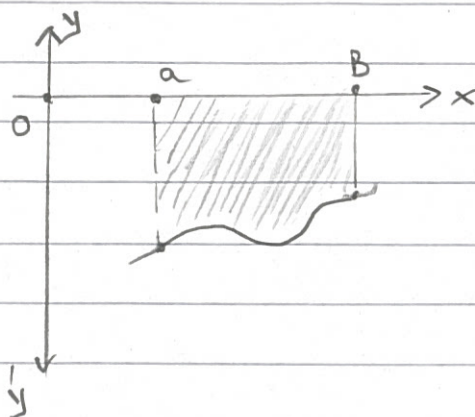
Λύση

Η $f(x) = x^2$ είναι συνεχής στο $[0, 2]$ και $\forall x \in [0, 2]$, έχουμε $f(x) \geq 0$, οπότε

$$E = \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3} \text{ τ.μ.}$$

Β. Εάν η συνάρτηση $y=f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a, B]$ και $\forall x \in [a, B]$ έχουμε $f(x) \geq 0$, τότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη της συνάρτησης, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=a$ και $x=B$ δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$E = - \int_a^B f(x) dx \quad (\text{εξήμα 2})$$



Παράδειγμα

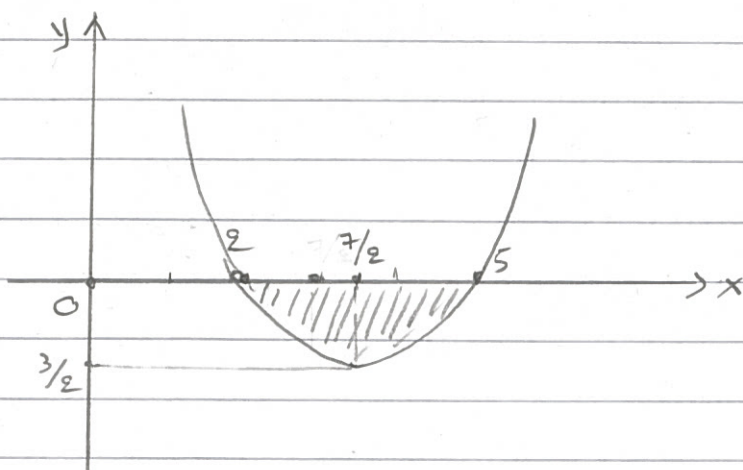
Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 - 7x + 10$ και του άξονα $x'x$.

Λύση

Λύνω την εξίσωση $x^2 - 7x + 10 = 0$ για να βρω τα σημεία τομής της καμπύλης με τον άξονα $x'x$.

$$\text{Επομένως } x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow x = 2, x = 5$$

Η συνάρτηση $x^2 - 7x + 10 \leq 0$ για κάθε $x \in [2, 5]$. Άρα το χωρίο βρίσκεται κάτω από τον άξονα x .

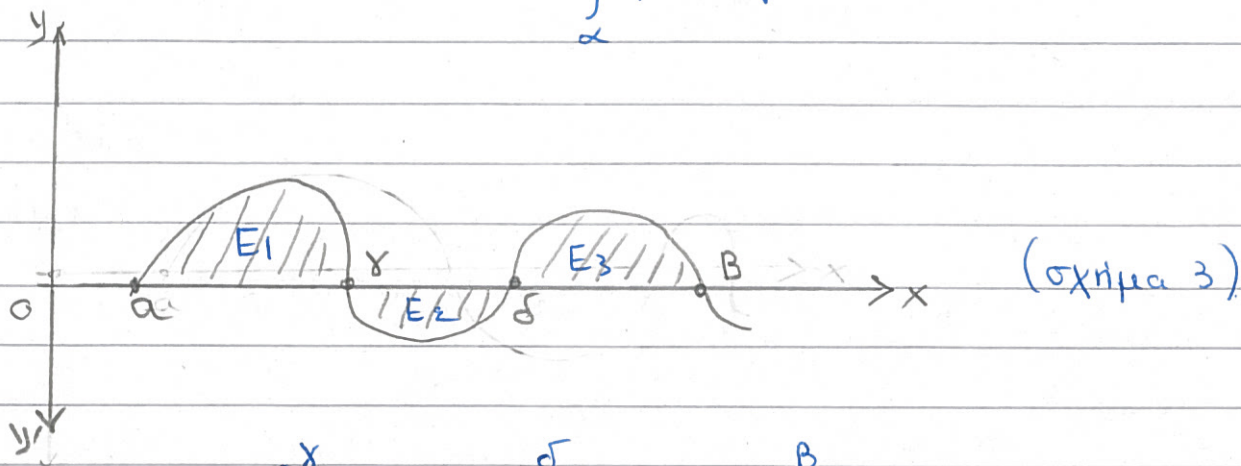


$$E = - \int_2^5 (x^2 - 7x + 10) dx = - \left[\frac{x^3}{3} - 7 \cdot \frac{x^2}{2} + 10x \right]_2^5 =$$

$$= - \left(\left(\frac{5^3}{3} - 7 \cdot \frac{5^2}{2} + 10 \cdot 5 \right) - \left(\frac{2^3}{3} - 7 \cdot \frac{2^2}{2} + 10 \cdot 2 \right) \right) = \frac{9}{2} \text{ τ.μ.}$$

γ. Εάν η συνάρτηση $y=f(x)$ αλλάξει πρόσημο στο $[a, B]$ το εμβαδόν του επιπέδου τόπου του γραμμοσκιασμένου τμήματος είναι:

$$E = E_1 + E_2 + E_3 = \int_a^B |f(x)| dx$$

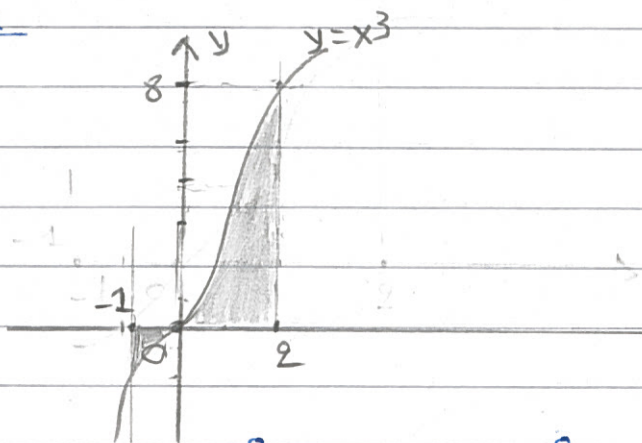


$$E = \int_a^{\gamma} f(x) dx - \int_{\gamma}^{\delta} f(x) dx + \int_{\delta}^B f(x) dx$$

Παράδειγμα 1.

Δίνεται η συνάρτηση $y=x^3$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του επιπέδου τόπου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης y , από τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=-1$ και $x=2$.

Λύση



$$\text{Είναι } E = \int_{-1}^2 |x^3| dx = - \int_{-1}^0 x^3 dx + \int_0^2 x^3 dx$$

$$= - \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 = - \left(\frac{0^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} \right) + \left(\frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} \right) = \frac{1}{4} + \frac{16}{4} = \frac{17}{4}$$

Παράδειγμα 2.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=4$.

Λύση:

Το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από τον τύπο

$$E = \int_0^4 |f(x)| dx = \int_0^4 |x^2 - 4x + 3| dx$$

Κάνω πίνακα προσήμου για την συνάρτηση.
Έχουμε $x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1$ ή $x = 3$, οπότε

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$	

οπότε

$$\begin{aligned} E &= \int_0^1 (x^2 - 4x + 3) dx - \int_1^3 (x^2 - 4x + 3) dx + \int_3^4 (x^2 - 4x + 3) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 3x \right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 3x \right]_1^3 + \left[\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 3x \right]_3^4 \\ &= \left(\frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 \right) - \left(\left(\frac{3^3}{3} - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 \right) - \left(\frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 \right) \right) + \\ &\quad + \left[\left(\frac{4^3}{3} - 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 \right) - \left(\frac{3^3}{3} - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 \right) \right] = \\ &= \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 4 \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τον άξονα $x'x$.

Λύση

Επειδή η άσκηση δεν μας καθορίζει τα όρια ολοκλήρωσης, για να τα προσδιορίσουμε πρέπει να λύσουμε την εξίσωση

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow (x-2) \cdot (x-1)=0 \Rightarrow x=2 \text{ και } x=1.$$

Άρα ζητάμε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες

$$x=1 \text{ και } x=2.$$

Ο πίνακας προσημνου της f είναι:

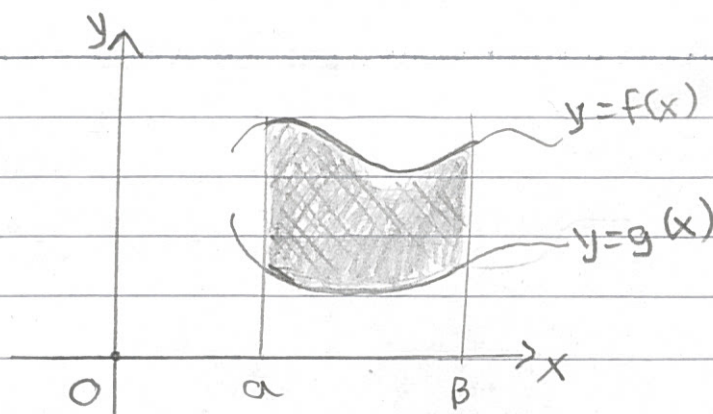
ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΡΟΣΗΜΟΥ				
x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	+

Οότε

$$\begin{aligned} E &= - \int_1^2 (x^2 - 3x + 2) dx = - \left[\frac{x^3}{3} - 3 \cdot \frac{x^2}{2} + 2x \right]_1^2 = \\ &= - \left(\left(\frac{2^3}{3} - 3 \cdot \frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 \right) - \left(\frac{1^3}{3} - 3 \cdot \frac{1^2}{2} + 2 \cdot 1 \right) \right) = \\ &= - \left(\frac{8}{3} - 6 + 4 - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 2 \right) = - \left(\frac{7}{3} - 4 + \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{6} \text{ τμ.} \end{aligned}$$

δ. Το εμβαδόν του επιπέδου τόπου που ορίζεται από τις καμπύλες $f(x), g(x)$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x=a$ και $x=b$, όταν $f(x)-g(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$ είναι:

$$E = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$



ε. Εάν η διαφορά $f(x)-g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $[a, B]$ είναι:

$$E = \int_a^B |f(x)-g(x)| dx$$

Παράδειγμα 1

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=3x^2+1$ και $g(x)=2x+2$.
Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων f, g και τις ευθείες $x=0$ και $x=2$.

Λύση

Το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από τον τύπο

$$E = \int_0^2 |f(x)-g(x)| dx = \int_0^2 |3x^2-2x-1| dx$$

Ο πίνακας προσημίων για τη συνάρτηση $f(x)-g(x)=3x^2-2x-1$ είναι:

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΡΟΣΗΜΟΥ				
x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
$f(x)-g(x)$	+	+	-	+

οπότε

$$E = - \int_0^1 (3x^2-2x-1) dx + \int_1^2 (3x^2-2x-1) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= - \left[\frac{3 \cdot x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} - x \right]_0^2 + \left[\frac{3 \cdot x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} - x \right]_1^2 = \\
&= - \left((2^3 - 2^2 - 2) - (0^3 - 0^2 - 0) \right) + \left((2^3 - 2^2 - 2) - (1^3 - 1^2 - 1) \right) \\
&= 1 + 2 + 1 = 4 \text{ τ.μ.}
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $y = x^2 - 1$ και $2x + y = 2$.

Λύση.

Επειδή δεν μας καθορίζει τα όρια ολοκλήρωσης, για να τα προσδιορίσουμε πρέπει να λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων $y_1 = x^2 - 1$ και $y_2 = 2 - 2x$, του οποίου οι λύσεις μας δίνουν τα σημεία τομής των καμπυλών, που είναι $(-3, 8)$ και $(1, 0)$ και συνεπώς τα όρια ολοκλήρωσης ως προς x είναι $-3, 1$, οπότε

$$\begin{aligned}
E &= \int_{-3}^1 (y_2 - y_1) dx = \int_{-3}^1 [(2 - 2x) - (x^2 - 1)] dx \\
&= \int_{-3}^1 (-x^2 - 2x + 3) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right]_{-3}^1 \\
&= \left(-\frac{1^3}{3} - 1^2 + 3 \cdot 1 \right) - \left(-\frac{(-3)^3}{3} - (-3)^2 + 3 \cdot (-3) \right) \\
&= -\frac{1}{3} + 2 - 9 + 9 + 9 - \frac{3 \cdot 2}{3} \text{ τ.μ.}
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή $y = x^2 - 7x + 6$, τις ευθείες $x = 2$ και $x = 6$ και τον άξονα x .

Λύση

Ο άξονας των x έχει εξίσωση $y = 0$, οπότε με $y = 0$ βρίσκουμε $x^2 - 7x + 6 = 0$ ή $x = 1$ και $x = 6$, που είναι τα σημεία στα οποία η καμπύλη τέμνει τον άξονα x . Είναι $x^2 - 7x + 6 \leq 0$ για κάθε $x \in [1, 6]$, οπότε το χωρίο βρίσκεται κάτω από τον άξονα x .

Επομένως

$$\begin{aligned} E &= - \int_2^6 (x^2 - 7x + 6) dx = - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 6x \right]_2^6 = \\ &= - \left[\left(\frac{6^3}{3} - \frac{7 \cdot 6^2}{2} + 6 \cdot 6 \right) - \left(\frac{2^3}{3} - \frac{7 \cdot 2^2}{2} + 6 \cdot 2 \right) \right] \\ &= - \left[\left(\frac{216}{3} - \frac{7 \cdot 36}{2} + 36 \right) - \left(\frac{8}{3} - 14 + 12 \right) \right] \\ &= - \frac{216}{3} + 126 - 36 + \frac{8}{3} - 14 + 12 = \frac{74}{3} \end{aligned}$$

Άσκηση 1.

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 - 2x - 3$, τον άξονα x και τις ευθείες $x = -3$ και $x = 2$.

Άσκηση 2.

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις παραβολές $y = 6x - x^2$ και $y = x^2 - 2x$.