

10^ο ΜΑΘΗΜΑ

ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

1. Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Έστω f, g δύο συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο διάστημα Δ με συνεχείς παραγώγους. Όταν η προ-ολοκλήρωση συνάρτηση είναι γινόμενο των δύο αυτών συναρτήσεων εκ των οποίων η μία είναι (ή μπορεί) να γραφεί ως παράγωγος, τότε ισχύει ο τύπος

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)dx$$

Παράδειγμα 1.

$$\begin{aligned}\int \ln x &= \int 1 \cdot \ln x dx = \int (x)' \cdot \ln x dx = \\ &= x \cdot \ln x - \int x \cdot (\ln x)' dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \cdot \ln x - \int 1 dx = x \cdot \ln x - x + c\end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.

$$\begin{aligned}\int x \cdot \ln x dx &= \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \cdot \ln x dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot (\ln x)' dx \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x}{2} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + c = \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{4} \cdot x^2 + c\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.

$$\begin{aligned}\int e^x \cdot x \cdot dx &= \int (e^x)' \cdot x \cdot dx = e^x \cdot x - \int e^x \cdot (x)' dx \\ &= e^x \cdot x - \int e^x dx = e^x \cdot x - e^x + c.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 4.

$$\begin{aligned}\int e^x \cdot x^2 dx &= \int (e^x)' \cdot x^2 dx = e^x \cdot x^2 - \int e^x \cdot (x^2)' dx \\ &= e^x \cdot x^2 - \int e^x \cdot (2x) dx = e^x \cdot x^2 - 2 \cdot \int e^x \cdot x \cdot dx \\ &= e^x \cdot x^2 - 2 \cdot (e^x \cdot x - e^x) + c\end{aligned}$$

Παράδειγμα 5.

$$\begin{aligned}\int x \cdot \eta\mu x dx &= - \int (\sigma\upsilon\nu x)' \cdot x \cdot dx = \\ &= - \sigma\upsilon\nu x \cdot x + \int \sigma\upsilon\nu x \cdot (x)' dx = -x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \int \sigma\upsilon\nu x dx \\ &= -x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x + c\end{aligned}$$

Παράδειγμα 6.

$$\begin{aligned}\int x^2 \cdot \eta\mu x dx &= - \int x^2 \cdot (\sigma\upsilon\nu x)' dx = -x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu x + \int (x^2)' \cdot \sigma\upsilon\nu x dx \\ &= -x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu x + 2 \int x \cdot \sigma\upsilon\nu x dx = \\ &= -x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu x + 2 \cdot \int x \cdot (\eta\mu x)' dx = \\ &= -x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu x + 2 \cdot \left[x \cdot \eta\mu x - \int (x)' \cdot \eta\mu x dx \right] = \\ &= -x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu x + 2x \cdot \eta\mu x - 2 \int \eta\mu x dx = \\ &= -x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu x + 2x \cdot \eta\mu x + 2 \sigma\upsilon\nu x + c.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 7.

$$\begin{aligned}\int x \cdot \sin x \, dx &= \int x \cdot (\eta \mu x)' \, dx = x \cdot \eta \mu x - \int (x)' \cdot \eta \mu x \, dx \\ &= x \cdot \eta \mu x - \int 1 \cdot \eta \mu x \, dx = x \cdot \eta \mu x + \cos x + c\end{aligned}$$

Παράδειγμα 8.

$$\begin{aligned}\int x^2 \cdot \sin x \, dx &= \int x^2 \cdot (\eta \mu x)' \, dx = x^2 \cdot \eta \mu x - \int (x^2)' \cdot \eta \mu x \, dx \\ &= x^2 \cdot \eta \mu x - \int (2x) \cdot \eta \mu x \, dx \\ &= x^2 \cdot \eta \mu x - 2 \int x \cdot \eta \mu x \, dx \\ &= x^2 \cdot \eta \mu x + 2 \cdot \int x \cdot (\sigma \upsilon \nu x)' \, dx \\ &= x^2 \cdot \eta \mu x + 2 \cdot \left[x \cdot \sigma \upsilon \nu x - \int (x)' \cdot \sigma \upsilon \nu x \, dx \right] \\ &= x^2 \cdot \eta \mu x + 2x \cdot \sigma \upsilon \nu x - 2 \cdot \int 1 \cdot \sigma \upsilon \nu x \, dx \\ &= x^2 \cdot \eta \mu x + 2x \cdot \sigma \upsilon \nu x - 2 \eta \mu x + c\end{aligned}$$

2. Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Σε πολλές περιπτώσεις ένα ολοκλήρωμα γίνεται απλούστερο όταν κάνουμε μια κατάλληλη αντικατάσταση της ανεξάρτητης μεταβλητής. Αυτή εφαρμόζεται σε ολοκληρώματα της μορφής

$$\int f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) \, dx \quad (1)$$

Θέτουμε $\varphi(x)=t$, οπότε $\varphi'(x) \cdot dx = dt$
 οπότε το ολοκλήρωμα (1) γίνεται

$$\int f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) dx = \int f(t) dt$$

Μετά την ολοκλήρωση επιστρέφουμε στην αρχική μεταβλητή με την αντικατάσταση $t=\varphi(x)$

Παράδειγμα 1.

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int \sqrt{\eta\mu x} \cdot \epsilon\upsilon\nu x \, dx$$

Λύση

Θέτω $\eta\mu x = t \Rightarrow dt = (\eta\mu x)' dx$ ή $dt = \epsilon\upsilon\nu x \cdot dx$
 οπότε το ολοκλήρωμα γίνεται

$$I = \int \sqrt{t} \, dt = \int t^{\frac{1}{2}} \, dt = \frac{2}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}} + c$$

οπότε επιστρέφοντας στην αρχική μεταβλητή έχουμε

$$I = \frac{2}{3} \cdot \eta\mu^{\frac{3}{2}} x + c$$

Παράδειγμα 2.

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{6x+3}}$$

Λύση

Θέτω $6x+3 = t \Rightarrow dt = (6x+3)' dx$ ή $dt = 6 \cdot dx$
 οπότε $dx = \frac{dt}{6}$

Το ολοκλήρωμα γίνεται

$$I = \int \frac{\frac{dt}{6}}{\sqrt{t}} = \frac{1}{6} \cdot \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right) + C$$

$$\text{ή } I = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot \sqrt{t} + C = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{t} + C$$

Επιστρέφουμε στην αρχική μεταβλητή πάλι με αντικατάσταση, οπότε

$$I = \frac{1}{3} \sqrt{6x+3} + C$$

Παράδειγμα 3.

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int e^{2x+3} dx$$

Λύση

Θέτω $t = 2x+3$, τότε είναι $dt = (2x+3)' \cdot dx$

$$\text{ή } dt = 2 \cdot dx \text{ ή } dx = \frac{dt}{2}$$

οπότε έχω

$$I = \int e^t \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C$$

Επιστρέφω στην αρχική μεταβλητή με αντικατάσταση και τελικά

$$I = \frac{1}{2} \cdot e^{2x+3} + C$$

Παράδειγμα 4.

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{x \cdot dx}{1+x^2}$$

Λύση

Θέτουμε $1+x^2=t$ οπότε είναι $dt=(1+x^2)'dx$
 ή $dt=2x dx$ ή $\frac{dt}{2}=x \cdot dx$
 και το ολοκλήρωμα γίνεται

$$I = \frac{\frac{1}{2} dt}{t} = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \cdot \ln|t| + c, \text{ οπότε}$$

$$I = \frac{1}{2} \cdot \ln(1+x^2) + c.$$

Παράδειγμα 5:

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int (\ln x)^3 \frac{dx}{x}$$

Λύση

Θέτω $\ln x = t$, οπότε $dt = (\ln x)' dx$
 ή $dt = \frac{1}{x} dx$
 επομένως το ολοκλήρωμα γίνεται

$$I = \int t^3 \cdot dt = \frac{t^4}{4} + c$$

οπότε τελικά

$$I = \frac{(\ln x)^4}{4} + c$$

Παράδειγμα 6:

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{3x^2}{(2+x^3)^3} dx$$

Λύση

Θέτω $2+x^3=t$, οπότε είναι $dt=(2+x^3)'.dx$
 ή $dt=3x^2 \cdot dx$

επομένως το ολοκλήρωμα γίνεται

$$I = \int \frac{dt}{t^3} = \int t^{-3} dt = \frac{t^{-3+1}}{-3+1} + c = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^2} + c$$

οπότε τελικά

$$I = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2+x^3)^2} + c.$$

Παράδειγμα 7.

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int x \cdot \sqrt{x-5} dx$$

Λύση.

Θέτουμε $t = \sqrt{x-5} \Rightarrow t^2 = x-5 \Rightarrow x = t^2+5$
 οπότε είναι $dx = (t^2+5)'dt$ ή $dx = 2t \cdot dt$
 και το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned} I &= \int (t^2+5) \cdot t \cdot 2t \cdot dt = 2 \cdot \int (t^4 + 5t^2) dt \\ &= 2 \cdot \frac{t^5}{5} + 10 \cdot \frac{t^3}{3} + c \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην αρχική μεταβλητή έχουμε:

$$I = \frac{2}{5} (x-5)^{\frac{5}{2}} + \frac{10}{3}$$

Παράδειγμα 8.

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x}} dx$$

Λύση

Θέτω $\sqrt[6]{x} = t \Rightarrow x = t^6$, οπότε $\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{t^6} = t^2$
 και $\sqrt{x} = \sqrt{t^6} = t^3$

ενίση) είναι $dx = (t^6)' dt$ ή $dx = 6 \cdot t^5 dt$

Αντικαθιστώντας στο ολοκλήρωμα (1) έχουμε

$$I = \frac{t^3 - 1}{t^2 - t} \cdot 6 \cdot t^5 dt \quad \text{ή}$$

$$I = 6 \cdot \int \frac{(t-1) \cdot (t^2+t+1) \cdot t^5 \cdot dt}{t \cdot (t-1)}$$

$$= 6 \cdot \int \frac{(t^2+t+1) \cdot t^5 \cdot dt}{t} =$$

$$= 6 \cdot \int (t^2+t+1) \cdot t^4 \cdot dt =$$

$$= 6 \cdot \int (t^6 + t^5 + t^4) dt = \frac{6}{7} \cdot t^7 + t^6 + \frac{6}{5} t^5 + C$$

Αντικαθιστώντας στο αρχικό ολοκλήρωμα, έχουμε

$$I = \frac{6}{7} \cdot (\sqrt[6]{x})^7 + (\sqrt[6]{x})^6 + \frac{6}{5} (\sqrt[6]{x})^5 + C$$

ή

$$I = \frac{6}{7} (x^{\frac{1}{6}})^7 + x + \frac{6}{5} (x^{\frac{1}{6}})^5 + C$$

$$= \frac{6}{7} \cdot x^{\frac{7}{6}} + x + \frac{6}{5} \cdot x^{\frac{5}{6}} + C$$

Άσκηση

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

1. $\int (x^2 + 1) \cdot \eta \mu 3x dx$

2. $\int x^3 \cdot e^x dx$

3. $\int \eta \mu^9 x \sigma \upsilon \nu x dx$

4. $\int (4x + 7)^{20} dx$