

9ο ΜΑΘΗΜΑ

Αόριστο Ολοκλήρωμα

Ορισμός. Μια συνάρτηση $F(x)$ ονομάζεται αρχική ή παράγουσα ή αντιπαράγωγος μιας συνάρτησης $f(x)$ σε ένα διάστημα $[a, b]$ εάν και μόνον εάν υπάρχει η παράγωγος της $F(x)$ σε κάθε σημείο του διαστήματος $[a, b]$ και είναι

$$F'(x) = f(x)$$

Αν η $F(x)$ είναι μια παράγουσα της $f(x)$, τότε και κάθε συνάρτηση $F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$ θα είναι παράγουσα της $f(x)$, γιατί

$$[F(x) + c]' = F'(x)$$

Παράδειγμα 1.

Η συνάρτηση $F(x) = \frac{x^3}{3} + 5$, $x \in [0, 1]$, είναι παράγουσα της συνάρτησης $f(x) = x^2$ στο $[0, 1]$, γιατί

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + 5 \right)' = \frac{3 \cdot x^2}{3} = x^2$$

Παράδειγμα 2.

Η συνάρτηση $F(x) = \sin x - 50$, $x \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσα της συνάρτησης $f(x) = \cos x$ στο $\mathbb{R}$ γιατί

$$F'(x) = (\sin x - 50)' = \cos x$$

Παράδειγμα 3.

Η συνάρτηση $F(x) = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$, είναι παράγουσα της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$ στο $(0, +\infty)$ γιατί

$$F'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Παράδειγμα 4.

Η συνάρτηση $F(x) = e^x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσα της

συνάρτησης $f(x) = e^x$, γιατί
 $F'(x) = (e^x + 1)' = e^x$

Ορισμός. Αν η συνάρτηση $F(x)$ είναι μια παραγώγου της συνάρτησης $f(x)$, τότε το σύνολο των παραγώγων της συνάρτησης f , δηλαδή το σύνολο των συναρτήσεων $F(x) + c$, με $c \in \mathbb{R}$, ονομάζεται αόριστο ολοκλήρωμα της συνάρτησης f και συμβολίζεται με $\int f(x) dx$ δηλαδή

$$\int f(x) dx = F(x) + c.$$

Η συνάρτηση $f(x)$ λέγεται ολοκληρωτέα συνάρτηση και το $\int$ είναι το σύμβολο της ολοκλήρωσης.

Η διαδικασία εύρεσης ενός αορίστου ολοκληρώματος μιας συνάρτησης $f(x)$ ονομάζεται ολοκλήρωση της $f(x)$ και είναι ουσιαστικά μία αντίστροφη διαδικασία της παραγωγής.

Αόριστα ολοκληρώματα Βασικών συναρτήσεων

$$1. \int 0 dx = c, x \in \mathbb{R}$$

$$2. \int 1 dx = x + c, x \in \mathbb{R}$$

$$3. \int \frac{1}{x} dx = \ln x + c, x \in (0, +\infty)$$

$$4. \int x^v dx = \frac{x^{v+1}}{v+1} + c, x \in \mathbb{R} - \{-1\},$$

$$5. \int e^x dx = e^x + c, x \in \mathbb{R}$$

$$6. \int \sin x dx = -\cos x + c, x \in \mathbb{R}$$

$$7. \int \sin x dx = -\cos x + c, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$8. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c, \quad x \in \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$9. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c, \quad x \in (k\pi, (k+1)\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$10. \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + c, \quad x \in (0, +\infty)$$

Παραδείγματα.

$$1. \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$2. \int x^{-6} dx = \frac{x^{-6+1}}{-6+1} + c = \frac{x^{-5}}{-5} + c = -\frac{1}{5} \cdot x^{-5} + c$$

$$3. \int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c = \frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x} + c$$

$$4. \int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + c = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{4} \cdot \sqrt[3]{x^4} + c$$

$$5. \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c$$

Ιδιότητες Αορίστου Ολοκληρώματος -
Κανόνες ολοκλήρωσης

$$1. \int [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx$$

$$2. \int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx$$

$$3. \int [a \cdot f_1(x) + b \cdot f_2(x)] dx = a \cdot \int f_1(x) dx + b \cdot \int f_2(x) dx$$

$$4. \int [a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0] dx = a_n \int x^n dx + \dots + a_1 \int x dx + a_0 \int dx =$$

$$= a_v \cdot \frac{x^{v+1}}{v+1} + a_{v-1} \cdot \frac{x^v}{v} + \dots + a_1 \cdot \frac{x^2}{2} + a_0 \cdot x + c$$

5. Αν στο $\int f(x) dx$ η συνάρτηση $f(x)$ είναι παράγωγος μιας συνάρτησης $F(x)$, δηλαδή $f(x) = F'(x)$, τότε

$$f(x) dx = F'(x) dx = dF(x) \quad [\text{διαφορικό συνάρτησης}]$$

ενότι

$$\int f(x) dx = \int dF(x) = F(x) + c.$$

Παραδείγματα.

$$1. \int (x + e^x + 7) dx = \frac{x^2}{2} + e^x + 7x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$2. \int (2 \cdot x^3 - 3 \cdot \eta \mu x + 5 \cdot \sqrt{x}) dx = \int 2 \cdot x^3 dx - \int 3 \cdot \eta \mu x dx + 5 \cdot \int x^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$= 2 \cdot \frac{x^4}{4} + 3 \cdot \sigma \upsilon \nu x + 5 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c =$$

$$= \frac{1}{2} x^4 + 3 \sigma \upsilon \nu x + \frac{10}{3} \cdot \sqrt{x^3} + c.$$

$$3. \int (1 - x^2) \cdot \sqrt{x} dx = \int (1 - x^2) \cdot x^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \int (x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{5}{2}}) dx = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{7} \cdot x^{\frac{7}{2}} + c$$

$$4. \int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + x \cdot \sqrt[4]{x} \right) dx = 3 \cdot \int x^{-\frac{1}{3}} dx + \frac{1}{2} \cdot \int x^{-\frac{1}{2}} dx + \int x^{\frac{5}{4}} dx =$$

$$= 3 \cdot \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{\frac{9}{4}}}{\frac{9}{4}} + c =$$

$$= 3 \cdot \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{4}{9} \cdot x^{\frac{9}{4}} + c$$

$$= \frac{9}{2} \cdot \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x} + \frac{4}{9} \cdot \sqrt[4]{x^9} + c.$$

$$\begin{aligned}
 5. \quad \int \frac{x^2 + 2x - 5}{x^2} dx &= \int \frac{x^2}{x^2} dx + \int \frac{2x}{x^2} dx - \int \frac{5}{x^2} dx \\
 &= \int dx + 2 \cdot \int \frac{1}{x} dx - 5 \cdot \int x^{-2} dx \\
 &= x + 2 \ln|x| - 5 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + c = x + 2 \ln|x| + \frac{5}{x} + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6. \quad \int \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - 3 \right) dx &= \int 3 \cdot \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx - 3 \int dx = \\
 &= 3 \cdot \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} \cdot \int x^{-\frac{1}{2}} dx - 3 \int dx = \\
 &= 3 \cdot \ln|x| + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - 3x + c = 3 \cdot \ln|x| + \sqrt{x} - 3x + c
 \end{aligned}$$

Παράδειγματα ολοκλήρωσης σύνθετων συναρτήσεων

$$1. \int \sin 3x dx = -\frac{1}{3} \cos 3x + c.$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\sin 3x$ είναι η παράγωγος της συνάρτησης $(-\frac{1}{3} \cos 3x)$, δηλαδή $\sin 3x = (-\frac{1}{3} \cos 3x)'$ και άρα $\sin 3x dx = (-\frac{1}{3} \cos 3x)' dx = d(-\frac{1}{3} \cos 3x)$

διαφορικό συνάρτησης (ιδιότητα 5)

$$\text{Επομένως } \int \sin 3x dx = \int d(-\frac{1}{3} \cos 3x) = -\frac{1}{3} \cos 3x + c.$$

$$2. \int e^{-x} dx = -e^{-x} + c$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση e^{-x} είναι η παράγωγος της συνάρτησης $(-e^{-x})$, δηλαδή

$$e^{-x} = (-e^{-x})'$$

$$\text{οπότε } e^{-x} dx = (-e^{-x})' dx = d(-e^{-x})$$

$$\text{άρα } \int e^{-x} dx = \int d(-e^{-x}) = -e^{-x} + c$$

$$3. \int e^{-2x} dx = \frac{1}{2} e^{-2x} + c$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση e^{-2x} είναι παράγωγος της συνάρτησης $-\frac{1}{2} e^{-2x}$, δηλαδή $e^{-2x} = \left(-\frac{1}{2} \cdot e^{-2x}\right)'$ οπότε

$$e^{-2x} dx = \left(-\frac{1}{2} \cdot e^{-2x}\right)' dx = d\left(-\frac{1}{2} e^{-2x}\right)$$

έτσι

$$\int e^{-2x} dx = \int d\left(-\frac{1}{2} e^{-2x}\right) = -\frac{1}{2} e^{-2x} + c$$

$$4. \int \frac{1}{3x-5} dx = \frac{1}{3} \ln|3x-5| + c$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\frac{1}{3x-5}$ είναι παράγωγος της συνάρτησης $\frac{1}{3} \ln|3x-5|$, δηλαδή $\frac{1}{3x-5} = \left(\frac{1}{3} \cdot \ln|3x-5|\right)'$, οπότε

$$\frac{1}{3x-5} dx = \left(\frac{1}{3} \cdot \ln|3x-5|\right)' dx = d\left(\frac{1}{3} \cdot \ln|3x-5|\right)$$

και άρα

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{3x-5} dx &= \int d\left(\frac{1}{3} \cdot \ln(3x-5)\right) dx \\ &= \frac{1}{3} \cdot \ln|3x-5| + c \end{aligned}$$

$$5. \int (3x-5)^7 dx = \frac{1}{24} \cdot (3x-5)^8 + c$$

$$\text{καθώς } (3x-5)^7 = \left(\frac{1}{24} \cdot (3x-5)^8\right)'$$

$$\text{έχουμε } (3x-5)^7 dx = \left(\frac{1}{24} \cdot (3x-5)^8\right)' dx$$

$$= d\left(\frac{1}{24} \cdot (3x-5)^8\right), \text{ οπότε}$$

$$\int (3x-5)^7 dx = \int d\left(\frac{1}{24} \cdot (3x-5)^8\right) = \frac{1}{24} (3x-5)^8 + c$$

$$6. \int (2x+3)^{-4} dx = -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(2x+3)^3} + C$$

Παρατηρούμε ότι $(2x+3)^{-4} = \left(-\frac{1}{6} \cdot (2x+3)^{-3}\right)'$
 οπότε

$$(2x+3)^{-4} dx = \left(-\frac{1}{6} \cdot (2x+3)^{-3}\right)' dx = d\left(-\frac{1}{6} \cdot (2x+3)^{-3}\right)$$

οπότε

$$\int (2x+3)^{-4} dx = \int d\left(-\frac{1}{6} (2x+3)^{-3}\right) = -\frac{1}{6} \cdot (2x+3)^{-3} + C$$

$$7. \int \sinh(1+4x) dx = \frac{1}{4} \cdot \cosh(1+4x) + C$$

Καθώς $\sinh(1+4x) = \left(\frac{1}{4} \cdot \cosh(1+4x)\right)'$ έχουμε

$$\begin{aligned} \sinh(1+4x) dx &= \left(\frac{1}{4} \cdot \cosh(1+4x)\right)' dx \\ &= d\left(\frac{1}{4} \cdot \cosh(1+4x)\right) \end{aligned}$$

οπότε

$$\int \sinh(1+4x) dx = \frac{1}{4} \cdot \cosh(1+4x) + C$$

$$8. \int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}} = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{5x-2} + C$$

Καθώς $(5x-2)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{5} \cdot \sqrt{5x-2}\right)'$

$$\begin{aligned} \text{έχουμε } (5x-2)^{-\frac{1}{2}} dx &= \left(\frac{2}{5} \cdot (5x-2)^{\frac{1}{2}}\right)' dx \\ &= d\left(\frac{2}{5} \cdot (5x-2)^{\frac{1}{2}}\right) \end{aligned}$$

οπότε

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}} = \int d\left(\frac{2}{5} \cdot (5x-2)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{5x-2} + C$$