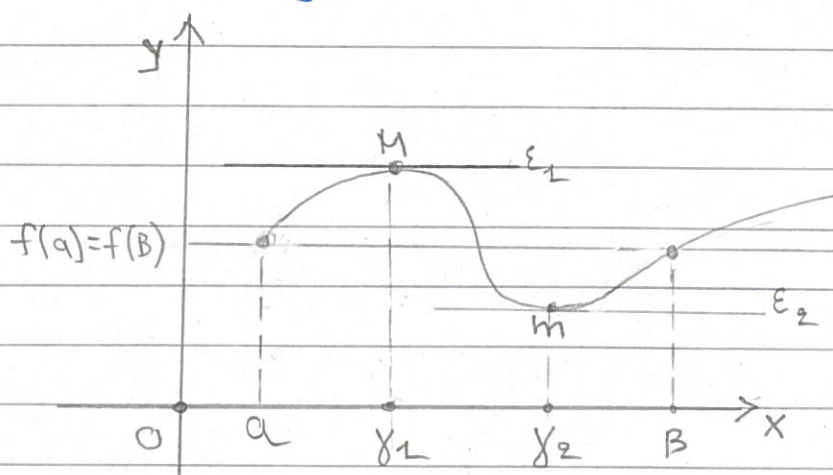


ΜΑΘΗΜΑ 8°

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

1. Θεώρημα του Rolle

Αν μια συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) και είναι $f(a) = f(b)$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο γ στο (a, b) , τέτοιο ώστε $f'(\gamma) = 0$.



Το Θ. Rolle γεωμετρικά σημαίνει ότι επειδή η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και έχει παράγωγο για κάθε $x \in (a, b)$, η $y = f(x)$ έχει εφαπτομένη σε κάθε σημείο της.

Επειδή $f(a) = f(b)$, θα υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο γ εσωτερικό του διαστήματος $[a, b]$, στο οποίο η εφαπτομένη της καμπύλης θα είναι παράλληλη προς τον άξονα Ox .

Παράδειγμα 1.

Να βρεθεί η τιμή γ , για την οποία ισχύει το Θ. Rolle για την συνάρτηση $f(x) = x^3 - 12x$, στο διάστημα $0 \leq x \leq 2\sqrt{3}$.

Λύση

Η $f(x)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0, 2\sqrt{3}]$.

Έχουμε $f(0)=0$ και

$$\begin{aligned} f(2\sqrt{3}) &= (2\sqrt{3})^3 - 12 \cdot (2\sqrt{3}) = 8 \cdot (\sqrt{3})^3 - 24\sqrt{3} \\ &= 8 \cdot 3\sqrt{3} - 24\sqrt{3} = 0 \end{aligned}$$

Η παράγωγος της $f(x) = x^3 - 12x$ είναι $f'(x) = 3x^2 - 12$

$$\text{και } f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2.$$

Συνεπώς, η ζητούμενη τιμή είναι 2.

Παράδειγμα 2

Έστω f συνάρτηση, συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, b) . Να αποδειχθεί ότι εάν $f(a) = f(b) = 0$, τότε για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_\xi \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε $\xi \cdot f(x_\xi) + f'(x_\xi) = 0$.

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = e^{\xi x} \cdot f(x)$. Η $g(x)$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle, αφού

$$g(a) = e^{\xi a} \cdot f(a) = 0$$

$$g(b) = e^{\xi b} \cdot f(b) = 0$$

λόγω της υπόθεσης $f(a) = 0 = f(b)$.

Κατά συνέπεια υπάρχει ένα $x_\xi \in (a, b)$ έτσι ώστε $g'(x_\xi) = 0$, δηλαδή

$$g'(x_\xi) = e^{\xi \cdot x_\xi} \cdot \xi \cdot f(x_\xi) + e^{\xi \cdot x_\xi} \cdot f'(x_\xi) = 0$$

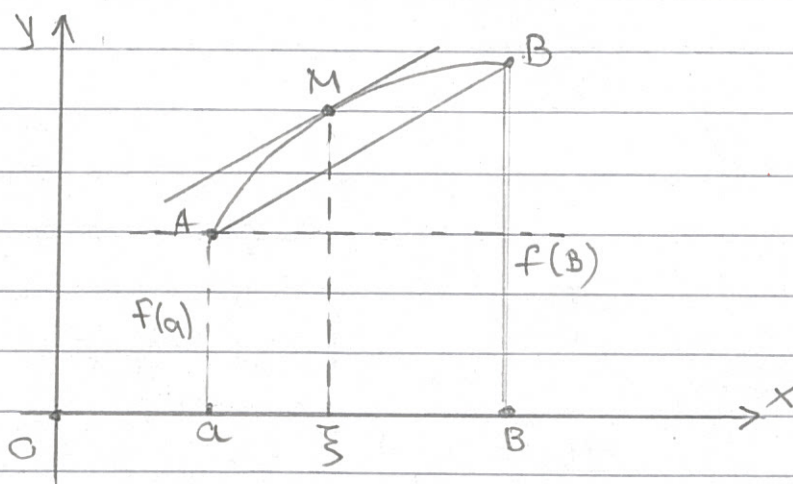
οπότε αν πολλαπλασιάσουμε με το $e^{-\xi \cdot x_\xi} > 0$, έχουμε

$$\xi \cdot f(x_\xi) + f'(x_\xi) = 0.$$

2. Θεώρημα της Μέσης Τιμής του Lagrange

Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο $[a, B]$ και παραγωγίσιμη στο (a, B) , τότε υπάρχει ένα σημείο ξ στο (a, B) , τέτοιο ώστε

$$\frac{f(B) - f(a)}{B - a} = f'(\xi)$$



- Το Θ. Lagrange αποτελεί γενίκευση του Θ. Rolle (αν $f(a) = f(B)$ ταυτίζεται με το Θ. Rolle).
- Στα σημεία M οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες προς τη χορδή AB, δηλαδή

$$f'(\xi) = \frac{f(B) - f(a)}{B - a}$$

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η τιμή ξ για την οποία ισχύει το Θεώρημα της Μέσης Τιμής, για την συνάρτηση $f(x) = 3x^2 + 4x - 3$, όταν $a = 1$, $B = 3$.

Λύση

Έχουμε

$$f(a) = f(1) = 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 3 = 4$$

$$f(B) = f(3) = 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 - 3 = 36$$

$$f'(x) = 6x + 4$$

οπότε έχουμε:

$$f'(\xi) = \frac{f(B) - f(a)}{B - a} \text{ και με αντικατάσταση}$$

$$6\xi + 4 = \frac{36 - 4}{3 - 1} \Rightarrow 6\xi = 16 - 4 \Rightarrow 6\xi = 12 \Rightarrow \underline{\xi = 2}.$$

Παράδειγμα 2.

Έστω f συνάρτηση, συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, b) . Να αποδειχθεί ότι εάν $f(a) = a$ και $f(b) = b$, τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in (a, b)$ με $x_1 \neq x_2$ τέτοια, ώστε $f'(x_1) + f'(x_2) = 2$.

Λύση.

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την συνάρτηση f στο διάστημα

$\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ υπάρχει $x_1 \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(x_1) = \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right) - a}{\frac{b-a}{2}}.$$

Επίσης από το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την συνάρτηση f στο διάστημα

$\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ υπάρχει $x_2 \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(x_2) = \frac{b - f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\frac{b-a}{2}}.$$

Συνεπώς,

$$f'(x_1) + f'(x_2) = \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right) - a}{\frac{b-a}{2}} + \frac{b - f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\frac{b-a}{2}} = 2.$$

3. Θεώρημα του Cauchy

Αν οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι συνεχείς στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμες στο (a, b) , τότε υπάρχει ένα σημείο ξ στο (a, b) , τέτοιο ώστε

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad a < \xi < b$$

όπου $g(a) \neq g(b)$ και οι $f'(x)$ και $g'(x)$ δεν είναι συγχρόνως μηδέν. Η ειδική περίπτωση $g(x) = x$ δίνει το Θ. Lagrange. Το Θεώρημα Cauchy λέγεται και γενικευμένο Θεώρημα μέσης τιμής.

Παράδειγμα 1.

Να βρεθεί η τιμή ξ για την οποία ισχύει το Θεώρημα Cauchy για τις συναρτήσεις $f(x) = 3x + 2$, $g(x) = x^2 + 1$ στο διάστημα $[1, 4]$.

Λύση

Έχουμε

$$f(a) = f(1) = 3 \cdot 1 + 2 = 5$$

$$f(b) = f(4) = 3 \cdot 4 + 2 = 14$$

$$f'(x) = 3$$

και

$$g(a) = g(1) = 1^2 + 1 = 2$$

$$g(b) = g(4) = 4^2 + 1 = 17$$

$$g'(x) = 2x$$

οπότε, με αντικατάσταση στον τύπο $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$

έχουμε

$$\frac{3}{2\xi} = \frac{14 - 5}{17 - 2} \Rightarrow \frac{3}{2\xi} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$\text{ή } 6\xi = 15 \Rightarrow \xi = \frac{5}{2}$$

Παράδειγμα 2.

Εξετάστε αν οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 2x + 3$ και $g(x) = x^2 - 7x + 20$ ικανοποιούν τις συνθήκες του Θεωρήματος Cauchy στο διάστημα $[1, 4]$ και να βρεθούν οι αντίστοιχες τιμές του ξ .

Λύση.

Οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι συνεχείς στο διάστημα $[1, 4]$ και παραγωγίσιμες στο διάστημα $(1, 4)$.

Επομένως οι συναρτήσεις αυτές ικανοποιούν τις συνθήκες του Θεωρήματος Cauchy.

Επι πλέον έχουμε

$$f(a) = f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 = 4 - 2 = 2$$

$$f(b) = f(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 + 3 = 11$$

$$f'(x) = 2x - 2$$

και

$$g(a) = g(1) = 1^2 - 7 \cdot 1 + 20 = 14$$

$$g(b) = g(4) = 4^2 - 7 \cdot 4 + 20 = 8$$

$$g'(x) = 2x - 7$$

οπότε

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \quad \text{ή} \quad \frac{2\xi - 2}{2\xi - 7} = \frac{9}{-6} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{ή} \quad (2\xi - 2) \cdot 2 = (2\xi - 7) \cdot (-3)$$

$$\text{ή} \quad 4\xi - 4 = -6\xi + 21$$

$$\text{ή} \quad 10\xi = 25 \quad \text{ή} \quad \xi = \frac{25}{10} \quad \text{ή} \quad \xi = \frac{5}{2}$$

Επομένως η αντίστοιχη τιμή του ξ είναι $\xi = \frac{5}{2}$.

4. Πολυώνυμο Taylor

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 μέχρι n -τάξης, δηλαδή ορίζονται οι αριθμοί $f^{(k)}(x_0)$ για $k=1, 2, 3, \dots, n$

Το πολυώνυμο

$$p_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

λέγεται πολυώνυμο Taylor n -τάξης της συνάρτησης f στο x_0 .

- Αν $x_0=0$ το πολυώνυμο Taylor n -τάξης παίρνει τη μορφή

$$p_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Το πολυώνυμο αυτό ονομάζεται πολυώνυμο Macclaurin n -τάξης της $f(x)$.

- Το ανάπτυγμα Taylor n -τάξης της $f(x)$ στο σημείο x_0 είναι:

$$f(x) = p_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1} \quad \text{ή}$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

όπου ξ είναι ένα σημείο του διαστήματος (a, b) το οποίο βρίσκεται πολύ κοντά στο x_0 .

Ειδικότερα, για $x_0=0$, ο προηγούμενος τύπος είναι το ανάπτυγμα κατά Macclaurin της $f(x)$.

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί το πολυώνυμο Taylor 4-τάξης
της συνάρτησης

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$$

στο σημείο $x_0 = 2$.

Λύση

Το ζητούμενο πολυώνυμο έχει τη μορφή

$$p_4(x) = f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f^{(3)}(2)}{3!}(x-2)^3 + \frac{f^{(4)}(2)}{4!}(x-2)^4$$

Έχουμε

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$$

$$f(2) = 11$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$$

$$f'(2) = 7$$

$$f''(x) = 6x - 4$$

$$f''(2) = 8$$

$$f^{(3)}(x) = 6$$

$$f^{(3)}(2) = 6$$

$$f^{(4)}(x) = 0$$

$$f^{(4)}(2) = 0$$

οπότε αντικαθιστώντας στον προηγούμενο τύπο
βρίσκουμε

$$\begin{aligned} p_4(x) &= 11 + \frac{7}{1!}(x-2) + \frac{8}{2!}(x-2)^2 + \frac{6}{3!}(x-2)^3 + \frac{0}{4!}(x-2)^4 \\ &= 11 + 7(x-2) + 4(x-2)^2 + (x-2)^3 \end{aligned}$$

—|—

Παράδειγμα 2

Να υπολογιστεί το πολυώνυμο MacLaurin n -τάξης της συνάρτησης $f(x) = e^x$.

Λύση

Το πολυώνυμο αυτό δίνεται από τον τύπο

$$p_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

Έχουμε $f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 1$ και $f(0) = 1$
οπότε

$$p_n(x) = 1 + \frac{1}{1!} \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{1}{n!} \cdot x^n$$

Το ανάπτυγμα της $f(x) = e^x$ στο $x=0$ είναι

$$\begin{aligned} f(x) &= p_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \\ &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \end{aligned}$$

όπου ξ ένας αριθμός "πολύ κοντά στο μηδέν".

Παράδειγμα 3

Να βρεθεί το πολυώνυμο Taylor n -τάξης της συνάρτησης $f(x) = \ln x$ στο σημείο $x_0 = 1$.

Λύση

Το πολυώνυμο αυτό γράφεται

$$p_n(x) = \ln(1) + \frac{\ln'(1)}{1!} (x-1) + \frac{\ln''(1)}{2!} (x-1)^2 + \dots + \frac{\ln^{(n)}(1)}{n!} (x-1)^n$$

όπως έχουμε αποδείξει η n -οστή παράγωγος της συνάρτησης $\ln x$ δίνεται από την σχέση

$$\ln^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{x^n} \quad \text{και άρα}$$

$$ln^{(n)}(1) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!$$

Συνεπώς έχουμε

$$ln'(1) = 1, ln''(1) = -1, ln^{(3)}(1) = 2!, \dots,$$

Τελικά έχουμε

$$p_n(x) = (x-1) - \frac{1}{2} \cdot (x-1)^2 + \frac{1}{3} \cdot (x-1)^3 - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot (x-1)^n.$$

Παράδειγμα 4

Να υπολογιστεί το πολυώνυμο Macclaurin n -τάξης της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Λύση

Το πολυώνυμο αυτό δίνεται από τον τύπο

$$p_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

στην προκειμένη περίπτωση έχουμε

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

$$\text{οπότε } f'(0) = 1, f''(0) = 2, f^{(3)}(0) = 6, \dots, f^{(n)}(0) = n!$$

Τελικά έχουμε

$$p_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$$

Το ανάπτυγμα Macclaurin της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{1-x}$ είναι

$$f(x) = p_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} =$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \frac{1}{(1-\xi)^{n+2}} \cdot x^{n+1}$$

όπου ξ είναι αριθμός "πολύ κοντά στο 0".