

ΜΑΘΗΜΑ 6^ο

1. Το πρόβλημα της εφαπτομένης

Έστω f μια συνάρτηση και $A = (x_0, f(x_0))$ σημείο της γραφικής παράστασης της f . Αν πάρουμε ένα άλλο σημείο $M = (x, f(x))$ της γραφικής παράστασης της f και φέρουμε την ευθεία AM που διέρχεται από τα A και M , παρατηρούμε ότι καθώς το x «προσεγγίζει» το x_0 το σημείο M τείνει να συμπίπτει με το A και επομένως η ευθεία AM παίρνει μια οριακή θέση ε .

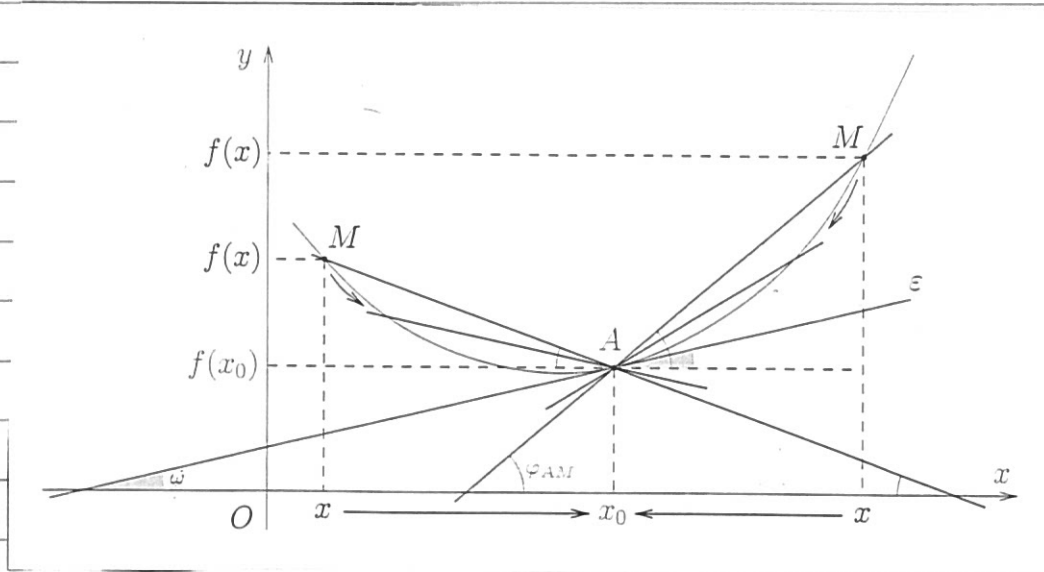
Η οριακή θέση ε της AM καλείται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A .

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AM είναι

$$\lambda = \varepsilon\varphi(\varphi) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Επομένως είναι λογικό να ορίσουμε ως συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ε το όριο

$$\lambda_\varepsilon = \varepsilon\varphi(\omega) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



Ορισμός. Έστω f συνάρτηση και $A = (x_0, f(x_0))$ σημείο της γραφικής παράστασης της f . Εάν $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda \in \mathbb{R}$, τότε η ευθεία που διέρχεται

από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ καλείται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A .

2. Παράγωγος συνάρτησης

Ορισμός. Έστω Δ ένα διάστημα του $\mathbb{R}$, $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση και $x_0 \in \Delta$. Η f καλείται παραγωγίσιμη στο x_0 όταν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός. Το παραπάνω όριο καλείται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$.

Ορισμός. Όταν μία συνάρτηση έχει παράγωγο σε κάθε σημείο x_0 ενός ανοιχτού διαστήματος $\Delta = (a, b)$ λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό. Έτσι, ορίζεται μια νέα συνάρτηση που ονομάζεται παράγωγος πρώτης τάξης στο διάστημα Δ και συμβολίζεται με

$$y' \text{ ή } f'(x) \text{ ή } \frac{dy}{dx} \text{ ή και } \frac{df(x)}{dx}.$$

Κανόνες παραγωγίσιμης

1. $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$, όπου c σταθερά
2. $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
3. $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$$4. \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}, \quad g(x) \neq 0$$

Παράγωγοι στοιχειωδών συναρτήσεων

$$1. (x)' = 1$$

$$2. (c)' = 0, \text{ όπου } c \text{ σταθερά}$$

$$3. (x^v)' = v \cdot x^{v-1} \quad v \in \mathbb{N}^*$$

$$4. (e^x)' = e^x$$

$$5. (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$6. (\eta \mu x)' = \sigma \upsilon \nu x$$

$$7. (\sigma \upsilon \nu x)' = -\eta \mu x$$

$$8. (\epsilon \varphi x)' = \frac{1}{\sigma \upsilon \nu^2 x}$$

$$9. (\sigma \varphi x)' = -\frac{1}{\eta \mu^2 x}$$

$$10. (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Παρ. 1 Να βρεθούν οι παράγωγοι πρώτης τάξης των συναρτήσεων

$$i) f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 6x - 1, \quad ii) y = x^2 \cdot \eta \mu x$$

$$iii) f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

$$iv) f(x) = \frac{\eta \mu x}{1 - \sigma \upsilon \nu x}$$

Λύση

$$i) \text{ Είναι: } f'(x) = (5x^3 - 2x^2 + 6x - 1)' = 5 \cdot (x^3)' - 2 \cdot (x^2)' + 6 \cdot (x)' - 1' \\ = 5 \cdot 3 \cdot x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 6 \cdot 1 - 0 = 15x^2 - 4x + 6$$

$$ii) \text{ Είναι: } y' = (x^2 \cdot \eta \mu x)' = (x^2)' \cdot \eta \mu x + x^2 \cdot (\eta \mu x)' \\ = 2x \cdot \eta \mu x + x^2 \cdot \sigma \upsilon \nu x$$

$$iii) \text{ Είναι: } f'(x) = \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)' = \frac{(x^2 + 1)' \cdot (x^2 - 1) - (x^2 + 1) \cdot (x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} =$$

$$h \quad f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2-1) - 2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3-2x-2x^3-2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

3. Παραγωγή συνθετης συνάρτησης

Αν $y=f(u)$ είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση της μεταβλητής u και $u=u(x)$ είναι επίσης παραγωγίσιμη συνάρτηση της x , τότε η σύνθετη συνάρτηση $(f \circ u)(x) = f(u(x))$, είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση του x και ισχύει

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad (1)$$

Ομοίως αν είναι: $y=f(u)$, $u=u(v)$ και $v=v(x)$ παραγωγίσιμες συνάρτησεις τότε είναι:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} \quad (2)$$

Οι (1) και (2) δίνουν τον κανόνα παραγωγής μιας σύνθετης συνάρτησης και είναι γνωστές με την ονομασία αλυσωτός κανόνας παραγωγής μιας σύνθετης συνάρτησης.

Παρ. 2. Να βρεθούν οι παραγωγοί 1^{ης} τάξης των παρακάτω συνάρτησεων

$$1. [(x^2+1)^3]' = 3 \cdot (x^2+1)^2 \cdot (x^2+1)' = 3 \cdot (x^2+1)^2 \cdot 2x = 6x \cdot (x^2+1)^2$$

$$2. (\sin 2x)' = \cos 2x \cdot (2x)' = 2 \cdot \cos 2x$$

$$3. (e^{-x^2})' = e^{-x^2} \cdot (-x^2)' = e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2x \cdot e^{-x^2}$$

$$4. (\ln x^2)' = \frac{1}{x^2} \cdot (x^2)' = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$$

$$5. (\sin \sqrt{x})' = \cos \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x})' = \cos \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

$$6. (\ln^2 x)' = 2 \ln x \cdot (\ln x)' = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x}{x}$$

$$7. (x \cdot e^{x^2})' = (x)' \cdot e^{x^2} + x \cdot (e^{x^2})' = 1 \cdot e^{x^2} + x \cdot e^{x^2} \cdot (x^2)' = e^{x^2} + 2x^2 \cdot e^{x^2}$$

Ταπ.3 Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

i) $f(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)^3$, ii) $f(x) = \sigma\upsilon\nu^2 3x$

iii) $f(x) = (x-3) \cdot \sqrt{x^2-6x+2}$

iv) $f(x) = 3 \cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}}$

v) $f(x) = \frac{3}{4} \cdot x \cdot \sqrt[3]{x}$

vi) $f(x) = \ln(x+3)$

vii) $f(x) = \ln^2(x+3)$

viii) $f(x) = x \cdot \ln(x^2+1)$

Lösung

$$\begin{aligned} \text{i) } f'(x) &= \left[\left(\frac{x}{x-1} \right)^3 \right]' = 3 \cdot \left(\frac{x}{x-1} \right)^2 \cdot \left(\frac{x}{x-1} \right)' = 3 \cdot \left(\frac{x}{x-1} \right)^2 \cdot \frac{(x)' \cdot (x-1) - x(x-1)'}{(x-1)^2} = \\ &= 3 \cdot \left(\frac{x}{x-1} \right)^2 \cdot \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = 3 \cdot \left(\frac{x}{x-1} \right)^2 \cdot \left(\frac{-1}{(x-1)^2} \right) = \\ &= \frac{-3x^2}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } f'(x) &= (\sigma\upsilon\nu^2 3x)' = 2\sigma\upsilon\nu 3x \cdot (\sigma\upsilon\nu 3x)' = 2\sigma\upsilon\nu 3x \cdot (-\eta\mu 3x) \cdot (3x)' = \\ &= -6\sigma\upsilon\nu 3x \cdot \eta\mu 3x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } f'(x) &= ((x-3) \cdot \sqrt{x^2-6x+2})' = (x-3)' \cdot \sqrt{x^2-6x+2} + (x-3) \cdot (\sqrt{x^2-6x+2})' = \\ &= 1 \cdot \sqrt{x^2-6x+2} + (x-3) \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2-6x+2}} \cdot (x^2-6x+2)' = \\ &= \sqrt{x^2-6x+2} + (x-3) \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2-6x+2}} \cdot (2x-6) = \\ &= \sqrt{x^2-6x+2} + \frac{(x-3)^2}{\sqrt{x^2-6x+2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iv) } f'(x) &= \left(3 \cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} \right)' = 3 \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \\ &= \frac{9}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{v) } f'(x) &= \left(\frac{3}{4} \cdot x \cdot \sqrt[3]{x} \right)' = \left(\frac{3}{4} \cdot x \cdot x^{\frac{1}{3}} \right)' = \left(\frac{3}{4} \cdot x^{\frac{4}{3}} \right)' = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot x^{\frac{4}{3}-1} = \\ &= x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x} \end{aligned}$$

$$vi) f'(x) = (\ln(x+3))' = \frac{1}{x+3} \cdot (x+3)' = \frac{1}{x+3}$$

$$vii) f'(x) = (\ln^2(x+3))' = 2 \cdot \ln(x+3) \cdot (\ln(x+3))' \\ = 2 \cdot \ln(x+3) \cdot \frac{1}{x+3} \cdot (x+3)' = \frac{2 \cdot \ln(x+3)}{x+3}$$

$$viii) f'(x) = (x \cdot \ln(x^2+1))' = (x)' \cdot \ln(x^2+1) + x \cdot (\ln(x^2+1))' \\ = \ln(x^2+1) + x \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot (x^2+1)' = \\ = \ln(x^2+1) + \frac{2x^2}{x^2+1}$$

Παρ. 4

$$\text{Αν } y = \frac{1 - e^{-x^2}}{2x^2}, \text{ τότε } x \cdot y' + 2y = e^{-x^2}$$

Λύση

$$\text{Εξάμε: } y' = \frac{(1 - e^{-x^2})' \cdot 2x^2 - (1 - e^{-x^2}) \cdot (2x^2)'}{(2x^2)^2} =$$

$$= \frac{-e^{-x^2} \cdot (-x^2)' \cdot 2x^2 - (1 - e^{-x^2}) \cdot 4x}{(2x^2)^2} =$$

$$= \frac{2x \cdot e^{-x^2} \cdot 2x^2 - (1 - e^{-x^2}) \cdot 4x}{(2x^2)^2} =$$

$$= \frac{2x \cdot e^{-x^2}}{2x^2} - \frac{(1 - e^{-x^2}) \cdot 4x}{4x^4} =$$

$$= \frac{e^{-x^2}}{x} - \frac{1 - e^{-x^2}}{x^3}, \text{ άρα}$$

$$x \cdot y' + 2y = x \cdot \left(\frac{e^{-x^2}}{x} - \frac{1 - e^{-x^2}}{x^3} \right) + 2 \cdot \frac{1 - e^{-x^2}}{2x^2} =$$

$$= e^{-x^2} - \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} + \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} = e^{-x^2}$$

Παρ. 5.

Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu\sqrt{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$, είναι:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\eta\mu\sqrt{x^2+1})' = \sigma\upsilon\nu\sqrt{x^2+1} \cdot (\sqrt{x^2+1})' \\ &= \sigma\upsilon\nu\sqrt{x^2+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot (x^2+1)' \\ &= \sigma\upsilon\nu\sqrt{x^2+1} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \\ &= \sigma\upsilon\nu\sqrt{x^2+1} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

Παρ. 6.

Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = e^{\eta\mu\ln(x^2+1)}$, είναι:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{\eta\mu\ln(x^2+1)})' = e^{\eta\mu\ln(x^2+1)} \cdot (\eta\mu\ln(x^2+1))' \\ &= e^{\eta\mu\ln(x^2+1)} \cdot \sigma\upsilon\nu\ln(x^2+1) \cdot (\ln(x^2+1))' \\ &= e^{\eta\mu\ln(x^2+1)} \cdot \sigma\upsilon\nu\ln(x^2+1) \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot (x^2+1)' \\ &= e^{\eta\mu\ln(x^2+1)} \cdot \sigma\upsilon\nu\ln(x^2+1) \cdot \frac{2x}{x^2+1} \end{aligned}$$

Παρ. 7.

Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu 3x \cdot \ln(x^2+7)$, είναι:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\eta\mu(3x) \cdot \ln(x^2+7))' = (\eta\mu 3x)' \cdot \ln(x^2+7) + \eta\mu 3x (\ln(x^2+7))' \\ &= \sigma\upsilon\nu 3x \cdot (3x)' \cdot \ln(x^2+7) + \eta\mu 3x \cdot \frac{1}{x^2+7} \cdot (x^2+7)' \\ &= 3 \cdot \sigma\upsilon\nu 3x \cdot \ln(x^2+7) + \eta\mu 3x \cdot \frac{2x}{x^2+7} \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να βρεθούν οι παράγωγοι 1^{ης} τάξης των συναρτήσεων:

(i) $f(x) = e^{2x+1}$, (ii) $f(x) = \ln^2 x - 5 \cdot \ln x + 6x - 2$

(iii) $f(x) = \ln(\ln x)$, (iv) $f(x) = \sin(1 - 2x^2)$

(v) $f(x) = \eta\mu^2(2x+3) \cdot \ln 4x$, (vi) $f(x) = \frac{\varepsilon\varphi x}{1 - \sin x}$

4. Παράγωγοι ανώτερης τάξης

Έστω η συνάρτηση $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ . Όπως είδαμε ορίζεται τότε μια νέα συνάρτηση $f': \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία λέγεται πρώτη παράγωγος της f .

Αν η f' είναι επίσης παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα $E \subseteq \Delta$, τότε λέμε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο E και ορίζεται μια νέα συνάρτηση που λέγεται δεύτερη παράγωγος της f και συμβολίζεται:

$$f'' = (f')' \quad \text{ή} \quad f'' = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

Όμοια ορίζονται οι παράγωγοι n τάξης της f , δηλαδή έχουμε

$$f'''(x) = f^{(3)}(x) \quad \text{ή} \quad \frac{d^3 f}{dx^3}$$

$$f^{(n)}(x) \quad \text{ή} \quad \frac{d^n f}{dx^n}$$

Παρ. 1. Να βρεθεί η 2^η παράγωγος των συναρτήσεων

(i) $f(x) = e^x + x^2$

(ii) $f(x) = \sin(x^2 - 1)$

• $f'(x) = e^x + 2x$

$f'(x) = -\eta\mu(x^2 - 1)(x^2 - 1)'$

• $f''(x) = e^x + 2$

$= -\eta\mu(x^2 - 1) \cdot 2x$

$f''(x) = (-\eta\mu(x^2 - 1))' \cdot 2x +$

$+ (-\eta\mu(x^2 - 1)) \cdot (2x)' =$

$= -\cos(x^2 - 1) \cdot 2x - 2 \cdot \eta\mu(x^2 - 1)$

(iii) $f(x) = e^{x^2} \sqrt{x}$

$$f'(x) = e^{x^2} \cdot (x^2)' - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2x \cdot e^{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (2x)' \cdot e^{x^2} - 2x \cdot (e^{x^2})' - \frac{1}{2} (x^{-\frac{1}{2}})' = \\ &= 2 \cdot e^{x^2} - 2x \cdot e^{x^2} (x^2)' - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-\frac{1}{2}+1} = \\ &= 2e^{x^2} - 4x^2 \cdot e^{x^2} + \frac{1}{4} \cdot x^{\frac{1}{2}} = \\ &= 2 \cdot e^{x^2} - 4x^2 \cdot e^{x^2} + \frac{1}{4} \cdot \sqrt{x} \end{aligned}$$

Παρ. 2. Έστω ότι $y = (x-1)^{\frac{2}{3}}$. Να δείχθει ότι η y ικανοποιεί τη σχέση

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{y^2}$$

Λύση.

Έχουμε $\frac{dy}{dx} = \left((x-1)^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3} \cdot (x-1)^{\frac{2}{3}-1} \cdot (x-1)'$

$$= \frac{2}{3} \cdot (x-1)^{-\frac{1}{3}}, \text{ άρα}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (x-1)^{-\frac{4}{3}} \cdot (x-1)'$$

$$= -\frac{2}{9} \cdot (x-1)^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{(x-1)^{\frac{4}{3}}}$$

$$= -\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{\left((x-1)^{\frac{2}{3}}\right)^2} = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{y^2}$$

Παρ. 3. Αν $f(x) = 2e^{2x} + 3xe^{2x}$, να δείχθει ότι

$$f''(x) - 4 \cdot f'(x) + 4 \cdot f(x) = 0$$

Λύση

Εξάγουμε $f(x) = 2 \cdot e^{2x} + 3 \cdot x \cdot e^{2x}$, τότε

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2 \cdot e^{2x} + 3 \cdot x \cdot e^{2x})' = 2 \cdot e^{2x} \cdot (2x)' + 3 \cdot [(x)' \cdot e^{2x} + x \cdot (e^{2x})'] \\ &= 4e^{2x} + 3 \cdot e^{2x} + 3x \cdot e^{2x} \cdot (2x)' \\ &= 7e^{2x} + 6x \cdot e^{2x} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} f''(x) &= 7 \cdot e^{2x} (2x)' + 6 \cdot [(x)' \cdot e^{2x} + x \cdot (e^{2x})'] \\ &= 14e^{2x} + 6 \cdot e^{2x} + 6 \cdot x \cdot e^{2x} \cdot 2 \\ &= 20e^{2x} + 12x \cdot e^{2x} \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} f''(x) - 4 \cdot f'(x) + 4 \cdot f(x) &= \\ &= (20e^{2x} + 12x \cdot e^{2x}) - 4 \cdot (7e^{2x} + 6x \cdot e^{2x}) + 4 \cdot (2e^{2x} + 3x \cdot e^{2x}) = \\ &= (20e^{2x} - 28e^{2x} + 8e^{2x}) + (12x \cdot e^{2x} - 24x \cdot e^{2x} + 12x \cdot e^{2x}) = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Παρ.4. Να δείχθει ότι η συνάρτηση
 $y = 2 \eta \mu(8x+3) + 5 \cdot \sigma \upsilon \nu(8x+3)$

ικανοποιεί την σχέση

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 64y = 0$$

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε } \frac{dy}{dx} &= 2 \cdot \sigma \upsilon \nu(8x+3) \cdot (8x+3)' + 5 \cdot \eta \mu(8x+3) \cdot (8x+3)' \\ &= 16 \cdot \sigma \upsilon \nu(8x+3) - 40 \cdot \eta \mu(8x+3) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= 16 \cdot (-\eta \mu(8x+3) \cdot (8x+3)') - 40 \cdot \sigma \upsilon \nu(8x+3) \cdot (8x+3)' \\ &= -128 \cdot \eta \mu(8x+3) - 320 \cdot \sigma \upsilon \nu(8x+3) \end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} + 64y &= [-128 \cdot \eta \mu(8x+3) - 320 \cdot \sigma \upsilon \nu(8x+3)] + 64 \cdot [2 \cdot \eta \mu(8x+3) + 5 \cdot \sigma \upsilon \nu(8x+3)] = \\ &= (-128 \cdot \eta \mu(8x+3) + 128 \cdot \eta \mu(8x+3) + \\ &\quad + (-320 \cdot \sigma \upsilon \nu(8x+3) + 320 \cdot \sigma \upsilon \nu(8x+3))) = 0. \end{aligned}$$

Παρ. 5. Αν $f(x) = \ln x$, με $x \in (0, +\infty)$, να δείχθει ότι είναι

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{x^n}, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^*.$$

Απόδειξη

Για $n=1$ είναι $f'(x) = \frac{(-1)^{1-1} \cdot (1-1)!}{x^1} = \frac{(-1)^0 \cdot 0!}{x} = \frac{1}{x}$

που ισχύει.

(Σημείωση: Έξ' ορισμού $0! = 1$)

Υποθέτω ότι ισχύει για n , δηλαδή $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{x^n}$.

Θα δείξω ότι ισχύει και για $n+1$,

δηλαδή $f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}$.

Πραγματικά είναι

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x) \right)' = \left(\frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{x^n} \right)' = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot \left(\frac{1}{x^n} \right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot \frac{-1 \cdot (x^n)'}{x^{2n}} \Rightarrow$$

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n! \cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{(-1)^n \cdot n! \cdot \cancel{(x^{n-1})}}{(\cancel{x^{n-1}})(x^{n+1})} \Rightarrow$$

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}, \text{ συνεπώς η σχέση ισχύει}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Παρ. 6. Αν $f(x) = \frac{1}{1-x}$, με $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, να δείχθει ότι είναι $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Απόδειξη.

Για $n=1$ έχουμε $f'(x) = \frac{1!}{(1-x)^{1+1}} = \frac{1}{(1-x)^2}$, που ισχύει

Υποθέτω ότι ισχύει για n , δηλαδή

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

Θα δείξω ότι ισχύει και για $n+1$, δηλαδή

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

Πραγματικά έχουμε

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = \left(\frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \right)' = n! \left(\frac{1}{(1-x)^{n+1}} \right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{(n+1)}(x) = n! \cdot \left(\frac{-((1-x)^{n+1})'}{(1-x)^{2(n+1)}} \right) = n! \cdot \left[\frac{-(n+1) \cdot (1-x)^{n+1-1} \cdot (-1)}{(1-x)^{2n+2}} \right]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f^{(n+1)}(x) &= \frac{(n+1)! \cdot (1-x)^n}{(1-x)^{n+(n+2)}} = (n+1)! \cdot \frac{(1-x)^n}{(1-x)^n \cdot (1-x)^{n+2}} = \\ &= \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}} \quad \text{Ο.Ε.Δ} \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Αν $f(x) = \sin x + \cos x$, να δείξετε ότι $f(x) + f''(x) = 0$

2) Αν $f(x) = x \cdot e^x$, να δείξετε ότι $f'''(x) - 3f''(x) + 3f'(x) - f(x) = 0$

3) Αν $f(x) = a \cdot e^{2x} - b \cdot e^{-x}$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης
 $A = f''(x) - f'(x) - 2f(x)$.

5. Η έννοια του Διαφορικού

- α) Ονομάζουμε διαφορικό (μια) παραγωγίσιμης στο $[a, b]$ συνάρτησης f , την παράσταση $f'(x) \cdot dx$, όπου dx είναι μια απειροστή μεταβολή του x . Το διαφορικό της f συμβολίζεται df και είναι
$$df = f'(x) \cdot dx$$

Το df παριστάνει την μεταβολή της f όταν η μεταβλητή x μεταβληθεί κατά μια απειροστή ποσότητα dx .

β) Διαφορικά διαφόρων τάξεων

Δεύτερο διαφορικό της συνάρτησης $y = f(x)$ ονομάζουμε το διαφορικό του διαφορικού της $f(x)$, έτσι έχουμε:

$$d^2y = f''(x)dx^2$$

Το 3^ο διαφορικό της $f(x)$ είναι:

$$d^3y = f'''(x) \cdot dx^3$$

Γενικά

$$d^ny = f^{(n)}(x) \cdot dx^n, \text{ οπότε}$$

μπορούμε να γράφουμε ότι:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \dots, \quad f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

γ) Κανόνες διαφορίσθη

1) $dc = 0$ (διαφορικό σταθερής συνάρτησης)

2) $d(c \cdot g) = c \cdot dg$ (c σταθερά)

3) $d[f(x) + g(x)] = df(x) + dg(x)$

4) $d[f(x) \cdot g(x)] = df(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot dg(x)$

5) $d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{df(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot dg(x)}{(g(x))^2}$

Παρ. 1 Έστω η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 - 2$

Το διαφωτισμένο είναι:

$$dy = f'(x) \cdot dx \Rightarrow dy = (3x^2 - 2)' dx$$

$$\Rightarrow dy = 6x dx$$

Στο σημείο $x = 2$, το διαφωτισμένο γίνεται

$$dy = 6 \cdot 2 \cdot dx \Rightarrow dy = 12 dx$$

Αν το x αυξηθεί κατά $dx = 0,01$ θα είναι:

$$dy = 12 \cdot 0,01 = 0,12$$

Αρα η συνάρτηση θα αυξηθεί κατά $dy = 0,12$

Παρ. 2 Να βρεθεί το διαφωτισμένο dy όταν $dx = 0,1$

$$y = x^2 \cdot \ln x$$

Λύση

Εφαρμόζουμε το διαφωτισμένο $dy = f'(x) \cdot dx$ (για την περίπτωση)

$f(x)$ διαφωτισμένο και του τύπου

$$dy = f'(x) \cdot dx, \text{ οπότε έχουμε}$$

$$f'(x) = (x^2 \cdot \ln x)' = (x^2)' \cdot \ln x + x^2 \cdot (\ln x)'$$

$$= 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x$$

$$= 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x$$

$$\text{και } f''(x) = (2x \ln x + x)' = (2x)' \ln x + 2x \cdot (\ln x)' + (x)'$$

$$= (2x)' \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} + 1 = 2 \ln x + 2 + 1 = 2 \ln x + 3$$

$$= 2 \ln x + 3 + 2x \cdot \frac{1}{x} = 2 \ln x + 3 + 2 = 2 \ln x + 5$$

$$= 2 \ln x + 5 + 2x \cdot \frac{1}{x} = 2 \ln x + 5 + 2 = 2 \ln x + 7$$

από

$$dy = [2 \ln x + 5 + 2x \cdot \frac{1}{x}] dx = [2 \ln x + 7] dx$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να βρεθούν τα διαφωτισμένα dy και dx όταν $dx = 0,1$

$$i) y = 2x^2 - x, \text{ όταν } x = 1, dx = 0,1$$

$$ii) y = x^3 + 2x, \text{ όταν } x = -1, dx = 0,02$$

2) Υπολογίστε τα διαφωτισμένα και τις αυξηθεί των: