

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5^{ου} Μαθήματος

ΑΣΚΗΣΗ 1. (Αντίστροφη πίνακα 3×3)

Να δείξετε ότι ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο αντίστροφός του.

Λύση

Έχουμε $\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot (3 + 10) = -39 \neq 0$
 άρα ο A είναι αντιστρέψιμος.

Σχηματίζουμε τον πίνακα που προκύπτει από τον A αν στη θέση καθενός στοιχείου του βάλουμε την ελάσυνά του με ένα $+$ ή $-$ μπροστά ανάλογα με την θέση του.

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 15 & 1 \\ -6 & -9 & -2 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}.$$

Ο αντίστροφος του πίνακα A θα προκύψει από τον

παραπάνω πίνακα αν τις γραμμές του τη κάνουμε
στήλες και πολλαπλασιάσουμε με $\frac{1}{\det A} = -\frac{1}{39}$,

δηλαδή

$$A^{-1} = -\frac{1}{39} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -6 & 0 \\ 15 & -9 & 0 \\ 1 & -2 & 13 \end{pmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2. (χαρακτηριστικό πολυώνυμο - ιδιοτιμές)
Να βρεθούν τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα και
οι ιδιοτιμές των ακόλουθων πινάκων

α) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

β) $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

γ) $\Gamma = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Λύση

α) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A
είναι

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} -1-x & 2 \\ 0 & 4-x \end{pmatrix} = (-1-x) \cdot (4-x)$$

οπότε οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι οι ρίζες
του $p_A(x)$, δηλαδή $x = -1$ και $x = 4$.

Ο πίνακας των ιδιοτιμών του είναι

$$L_A = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 4 \end{pmatrix}$$

β) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα Β είναι

$$p_B(x) = \det \begin{pmatrix} -1-x & 0 & 0 \\ 2 & 3-x & 0 \\ 0 & -2 & 4-x \end{pmatrix} = (-1-x)(3-x)(4-x)$$

οπότε οι ιδιοτιμές του πίνακα Β είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $p_B(x)$, δηλαδή $x = -1, x = 3, x = 4$.

Ο πίνακας των ιδιοτιμών του Β είναι

$$L_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

γ) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα Γ είναι

$$\begin{aligned} p_\Gamma(x) &= \det \begin{pmatrix} 3-x & 2 & 0 \\ -1 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 1-x \end{pmatrix} = \\ &= (1-x) \cdot \begin{vmatrix} 3-x & 2 \\ -1 & -x \end{vmatrix} = (1-x) \cdot [(3-x) \cdot (-x) - 2 \cdot (-1)] = \\ &= (1-x)(x^2 - 3x + 2) \end{aligned}$$

Βρίσκω τη ρίζες του τριωνύμου $x^2 - 3x + 2$
 $\Delta = 9 - 8 = 1 \neq 0$, οπότε $x_1 = 2$ και $x_2 = 1$

άρα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο παίρνει τη μορφή

$$p_\Gamma(x) = (x-1)^2 \cdot (x-2)$$

και συνεπώς οι ιδιοτιμές του πίνακα Γ είναι $x = 1$ (διπλή), $x = 2$.

Ο πίνακας των ιδιοτιμών του Γ είναι:

$$L_\Gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 3. (Συστήματα 3x3)

Να λύθούν τα συστήματα

$$(\Sigma_1): \begin{cases} x + 2y - 2z = -7 \\ -x + y + 3z = 3 \\ 2x - y + 2z = 8 \end{cases}$$

Λύση

Η ορίζουσα του συστήματος είναι:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 + 16 + 2 = 23 \neq 0$$

Άρα το σύστημα (Σ_1) έχει μοναδική λύση που δίνεται από τον τύπο

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -7 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 8 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{23} = \frac{-7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 8 & -1 \end{vmatrix}}{23} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -7 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 2 & 8 & 2 \end{vmatrix}}{23} = \frac{1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}}{23} = -2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -7 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}}{23} = \frac{1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} - 7 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{23} = 2$$

Άρα $(x, y, z) = (1, -2, 2)$.

$$(\Sigma_2): \begin{cases} x - 2y + z = -1 \\ 3x + 4y - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Λύση

Η ορίζουσα του συστήματος (Σ_2) είναι:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 6 = +4$$

Αρα το σύστημα έχει μια και μοναδική λύση την

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{4} = \frac{(-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}{4} = \frac{(-1) \cdot (-1)}{4} = \frac{1}{4}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{4} = \frac{1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{1}{4}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{4} = \frac{(-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{(-1) \cdot (-7)}{4} = \frac{7}{4}$$

άρα η λύση του συστήματος (Σ_2) είναι:

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{7}{4} \right)$$

$$(\Sigma_3): \begin{cases} x + 2z = 6 \\ -3x + 4y + 6z = 30 \\ -x - 2y + 3z = 8 \end{cases}$$

Λύση

Η ορίζουσα του συστήματος (Σ_3) είναι:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 24 + 20 = 44 \neq 0$$

Άρα το σύστημα έχει μία και μοναδική λύση

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{vmatrix}}{44} = \frac{6 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 30 & 4 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}}{44} = \frac{6 \cdot (24) + 2 \cdot 28}{44} = \frac{50}{11}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}}{44} = \frac{1 \cdot \begin{vmatrix} 30 & 6 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} - 6 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 30 \\ -1 & 8 \end{vmatrix}}{44} = \frac{-36}{44} = -\frac{9}{11}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{vmatrix}}{44} = \frac{1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 30 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}{44} = \frac{92 + 60}{44} = \frac{38}{11}$$

Άρα η λύση του συστήματος (Σ_3) είναι:

$$(x, y, z) = \left(\frac{50}{11}, -\frac{9}{11}, \frac{38}{11} \right).$$

• Παραδείγματα συστημάτων 3×3 , όπου $\Delta = 0$

Παράδειγμα 1. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} 2x - y - z = a \\ -x + 4y - 3z = 0 \\ x - y = 1 + a \end{cases}$$

Λύση

Η ορίζουσα του συστήματος είναι

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Προσβέτω} \\ \text{2η κ' 3η στην 1η} \end{array} \begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Παρατηρώ ότι στην ορίζουσα D έχω υποορίζουσα 2ης τάξης $\neq 0$.

Παίρνω την υποορίζουσα $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$

Για να είναι το σύστημα συμβιβαστό πρέπει η 3ης τάξης ορίζουσα

$$\Delta'_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1+a \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Η } \Delta'_1 = -(-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & a \\ -1 & 1+a \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & a \\ 1 & 1+a \end{vmatrix} =$$

$$= [(-1) \cdot (1+a) + a] + 4 \cdot [2(1+a) - a] = 7 + 4a$$

άρα $\Delta'_1 = 7 + 4a$.

1η περίπτωση

αν $7 + 4a = 0$, δηλαδή $a = -\frac{7}{4}$, τότε το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} 2x - y - z = -\frac{7}{4} \\ -x + 4y - 3z = 0 \\ x - y = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Από τις δύο πρώτες εξισώσεις του συστήματος θεωρώ το σύστημα

$$\begin{cases} 2x - y = -\frac{7}{4} + z \\ -x + 4y = 3z \end{cases}$$

Η λύση αυτού είναι:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{7}{4} + z & -1 \\ 3z & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{4 \cdot (-\frac{7}{4} + z) + 1 \cdot 3z}{9} = \frac{7z - 7}{9}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -\frac{7}{4} + z \\ -1 & 3z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{2 \cdot (3z) - (-1) \cdot (-\frac{7}{4} + z)}{9} = \frac{7z - \frac{7}{4}}{9}$$

Επομένως για $a = -\frac{7}{4}$, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις τ.η.

$$(x, y, z) = \left(\frac{7z - 7}{9}, \frac{7z - \frac{7}{4}}{9}, z \right), \text{ όπου } z \in \mathbb{R}$$

Αν $a \neq -\frac{7}{4}$ τότε $\Delta'_1 \neq 0$ και το σύστημα είναι αδύνατον.

Παράδειγμα 2. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} (1+a) \cdot x + y + z = 1 \\ x + (1+a) \cdot y + z = 1 \\ x + y + (1+a) \cdot z = 1 \end{cases}$$

Λύση

Η ορίζουσα του συστήματος είναι

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+3 & 1 & 1 \\ a+3 & 1+a-1 & 1 \\ a+3 & 1 & 1+a \end{vmatrix} =$$

$$(a+3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = (a+3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = (a+3) \cdot a^2$$

i) αν $a \neq -3$ και $a \neq 0$, τότε $\Delta \neq 0$. Επομένως το σύστημα έχει μια και μοναδική λύση την

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix}}{(a+3) \cdot a^2} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}}{(a+3) \cdot a^2} = \frac{a^2}{(a+3) \cdot a^2} = \frac{1}{a+3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix}}{(a+3) \cdot a^2} = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}}{(a+3) \cdot a^2} = \frac{a^2}{(a+3) \cdot a^2} = \frac{1}{a+3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{(a+3) \cdot a^2} = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{(a+3) \cdot a^2} = \frac{a^2}{(a+3) \cdot a^2} = \frac{1}{a+3}$$

Επομένως η λύση είναι $(x, y, z) = \left(\frac{1}{a+3}, \frac{1}{a+3}, \frac{1}{a+3} \right)$.

ii) αν $a = -3$, το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases}$$

και η ορίζουσα του $\Delta = 0$.

Η υποορίζουσα $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$.
Εξετάζω την ορίζουσα

$$\Delta' = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ οπότε παίρνοντας τις δύο}$$

πρώτες εξισώσεις του ανωτέρω συστήματος έχω το σύστημα

$$\begin{cases} -2x + y = 1 - z \\ x - 2y = 1 - z \end{cases}$$

Οι λύσεις αυτού είναι

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-z & 1 \\ 1-z & -2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{3z-3}{3} = z-1 \quad \text{κ' } y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1-z \\ 1 & 1-z \end{vmatrix}}{3} = \frac{-3+3z}{3} = z-1$$

Επομένως στην περίπτωση αυτή, δηλ. όταν $a = -3$ έχουμε άπειρες λύσεις τις

$$(x, y, z) = (z-1, z-1, z), \text{ όπου } z \in \mathbb{R}.$$

iii) αν $a = 0$, τότε το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Παρατηρώ ότι όλες οι εξισώσεις 2^{ης} τάξης είναι ίσες με μηδέν, οπότε παίρνουμε έναν συντελεστή $\neq 0$, π.χ

Έστω ότι παίρνω τον συντελεστή του x , δηλ. το $1 \neq 0$
καθώς οι αριθμοί

$$\begin{vmatrix} a_1 & \delta_1 \\ a_2 & \delta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{και} \quad \begin{vmatrix} a_1 & \delta_1 \\ a_3 & \delta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις

$$(x, y, z) = (1 - y - z, y, z) \text{ όπου } y, z \in \mathbb{R}.$$

—