

ΜΑΘΗΜΑ 2

μκν πίνακες

Ένας πίνακας δεν είναι παρά ένα ορθογώνιο σχήμα από αριθμούς, π.χ. οι

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 2 \\ -7 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad (7 \quad 2)$$

είναι πίνακες

Όπως βλέπουμε οι παραπάνω πίνακες διαφέρουν ως προς το μέγεθος: ο πρώτος δηλαδή έχει 3 γραμμές και 2 στήλες, ο δεύτερος έχει 2 γραμμές και 2 στήλες, ο τρίτος έχει 3 γραμμές και 1 στήλη, ο τέταρτος έχει 1 γραμμή και 2 στήλες κ.λ.π. Το μέγεθος λοιπόν ενός πίνακα προσδιορίζεται από δύο αριθμούς: ο πρώτος μας λέει πόσες γραμμές έχει ο πίνακας μας και ο δεύτερος πόσες στήλες έχει.

Ένα πίνακα με μ γραμμές και ν στήλες τον λέμε $\mu\kappa\nu$ πίνακα

Συνήθως χρησιμοποιούμε κεφαλαία γράμματα για να σημειώσουμε ένα πίνακα· έτσι π.χ. γράφουμε

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = (4 \quad -1 \quad 3), \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{κ.λ.π.}$$

Αν A είναι ένας $\mu\kappa\nu$ πίνακας, συμβολίζουμε με a_{ij} το στοιχείο του που βρίσκεται στη διασταύρωση της i -γραμμής και της j -στήλης του. Έτσι ένας $\mu\kappa\nu$ πίνακας A γράφεται γενικά

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \dots & \alpha_{\mu \nu} \end{pmatrix}$$

ή σύντομα

$$A = (\alpha_{ij})$$

Σ' ένα $\nu \times \nu$ πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \dots & \alpha_{\nu \nu} \end{pmatrix}$$

τα στοιχεία $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{\nu\nu}$ λέμε ότι αποτελούν την **κύρια διαγώνιο** του.

Δύο $\mu \times \nu$ πίνακες A και B λέμε ότι είναι **ίσοι**, αν τα ομοθέσια στοιχεία τους συμπίπτουν.

Για 3×2 πίνακες έχουμε λοιπόν

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \\ \beta_{31} & \beta_{32} \end{pmatrix}$$

αν και μόνον αν

$$\alpha_{11} = \beta_{11} \quad , \quad \alpha_{12} = \beta_{12}$$

$$\alpha_{21} = \beta_{21} \quad , \quad \alpha_{22} = \beta_{22}$$

$$\alpha_{31} = \beta_{31} \quad , \quad \alpha_{32} = \beta_{32}$$

Θα πρέπει εδώ να σημειώσουμε ότι δύο πίνακες με διαφορετικό μέγεθος δεν θεωρούνται ποτέ ίσοι.

Παράδειγμα 1^ο. Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Οι Α και Γ δεν είναι ίσοι μεταξύ τους γιατί δεν έχουν το ίδιο μέγεθος: ο Α είναι 3x1 πίνακας ενώ ο Γ είναι 2x2 πίνακας.

Οι Α και Β επίσης δεν είναι ίσοι μεταξύ τους γιατί ενώ κι' οι δύο τους είναι 3x1 πίνακες, τα στοιχεία τους που βρίσκονται στην (2,1)-θέση είναι διαφορετικά μεταξύ τους: $-7 \neq 2$.

Παράδειγμα 2^ο. Να βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ από τη σχέση

$$\begin{pmatrix} 4 & \alpha - \beta & \beta + \gamma \\ 3\delta + \gamma & 2\alpha - 4\delta & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 1 \\ 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Σύμφωνα με τον ορισμό, αν δύο πίνακες είναι ίσοι τα ομοθέσια στοιχεία τους συμπέτουν. Έτσι από την προηγούμενη ισότητα παίρνουμε

$$\begin{aligned} \alpha - \beta &= 8 & \beta + \gamma &= 1 \\ 3\delta + \gamma &= 7 & 2\alpha - 4\delta &= 6 \end{aligned}$$

απ' όπου βρίσκουμε

$$\alpha = 5, \quad \beta = -3, \quad \gamma = 4, \quad \delta = 1. \quad \blacksquare$$

προσθεση πινακων

Αν Α και Β είναι δύο μχν πίνακες, τότε το **άθροισμα** τους $A+B$ είναι ο μχν πίνακας που προκύπτει αν προσθέσουμε τα ομοθέσια στοιχεία τους.

Θα πρέπει να τονίσουμε ότι **πίνακες με διαφορετικό μέγεθος δεν μπορούν να προστεθούν.**

Παράδειγμα. Ας πάρουμε τους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Τότε σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό

$$\begin{aligned} A+B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(-1) & 0+0 & -1+2 \\ 0+4 & 1+(-1) & 2+0 \\ 4+0 & 0+1 & 0+(-1) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Το άθροισμα $A+\Gamma$ **δεν ορίζεται** γιατί ο A είναι 3×3 πίνακας ενώ ο Γ είναι 2×2 , έχουν δηλαδή διαφορετικό μέγεθος. ■

Όπως και για τους 2×2 πίνακες η πρόσθεση μκν πινάκων είναι **αντιμεταθετική**, δηλαδή

$$A+B=B+A$$

για κάθε μκν πίνακες A και B .

Είναι ακόμη **προσεταιριστική**, δηλαδή

$$A+(B+\Gamma)=(A+B)+\Gamma$$

για κάθε μκν πίνακες A, B και Γ .

Ο μκν πίνακας που όλα τα στοιχεία του είναι μηδενικά ονομάζεται **μηδενικός** πίνακας και συμβολίζεται απλά O , δηλαδή

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Για παράδειγμα ο

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ είναι ο μηδενικός } 3 \times 2 \text{ πίνακας}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ είναι ο μηδενικός } 2 \times 2 \text{ πίνακας}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ είναι ο μηδενικός } 3 \times 1 \text{ πίνακας}$$

$$(0 \ 0) \text{ είναι ο μηδενικός } 1 \times 2 \text{ πίνακας κ.λ.π.}$$

Αν τώρα A είναι ένας οποιοσδήποτε $m \times n$ πίνακας, τότε είναι φανερό ότι

$$A + O = A$$

δηλαδή αν ο μηδενικός $m \times n$ πίνακας προστεθεί σ' ένα οποιοδήποτε $m \times n$ πίνακα, τον αφήνει αναλλοίωτο.

Τέλος για οποιοδήποτε $m \times n$ πίνακα A , ο $m \times n$ πίνακας που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε καθένα από τα στοιχεία του A με το αντίθετο του, ονομάζεται **αντίθετος του A** και συμβολίζεται $-A$.

Για παράδειγμα αν

$$A = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ τότε } -A = \begin{pmatrix} -(-2) \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ή, αν

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \text{ τότε } -A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \text{ κ.λ.π.}$$

Αν σ' ένα $m \times n$ πίνακα A προσθέσουμε τον αντίθετο του, τότε βρίσκουμε τον μηδενικό $m \times n$ πίνακα:

$$A + (-A) = O$$

Για παράδειγμα

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+2 \\ 7-7 \\ 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & 1-1 & -1+1 \\ 2-2 & 2-2 & -2+2 \\ 3-3 & 3-3 & -3+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

πολ/σμος αριθμου επι πινακα

Αν λ είναι ένας πραγματικός αριθμός και A είναι ένας $m \times n$ πίνακας, τότε το γινόμενο

$$\lambda A$$

είναι ο $m \times n$ πίνακας που προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε καθένα από τα στοιχεία του A με το λ .

Έχουμε τις ακόλουθες ιδιότητες.

$$\begin{aligned} \lambda(A+B) &= \lambda A + \lambda B \\ (\lambda + \mu)A &= \lambda A + \mu A \\ (\lambda \mu)A &= \lambda(\mu A) \end{aligned}$$

καθώς και την

$$\lambda A = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \quad \eta \quad A = 0$$

Παράδειγμα 1^ο. Ας είναι

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Να υπολογίσετε τους πίνακες

$$-2A \quad \text{και} \quad 3A - 5B$$

Λύση. Έχουμε

$$-2A = -2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 0 & -2 \cdot 1 \\ -2 \cdot 2 & -2 \cdot 3 \\ -2 \cdot 4 & -2 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -4 & -6 \\ -8 & -10 \end{pmatrix}$$

και

$$\begin{aligned} 3A - 5B &= 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 9 \\ 12 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ -10 & -10 \\ -15 & -15 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -4 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2^ο. Μαγικά τετράγωνα

Ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

έχει την ακόλουθη "μαγική" ιδιότητα:

- το άθροισμα των στοιχείων καθεμίας γραμμής του είναι =15
- το άθροισμα των στοιχείων καθεμίας στήλης του είναι =15
- το άθροισμα των στοιχείων καθεμίας από τις δύο διαγώνιες του είναι =15

Αλλά και ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

έχει την ίδια μαγική ιδιότητα: αν αθροίσουμε τα στοιχεία μίας οποιασδήποτε γραμμής του θα βρούμε αποτέλεσμα 0 και το ίδιο αποτέλεσμα θα βρούμε αν αθροίσουμε τα στοιχεία μίας οποιασδήποτε στήλης του ή διαγωνίου του.

Αν προσθέσουμε τώρα αυτούς τους δύο "μαγικούς" πίνακες θα

βρούμε τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 2 \\ 2 & 5 & 8 \\ 8 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

που είναι κι' αυτός μαγικός,

Ακόμη αν πολλαπλασιάσουμε τον μαγικό πίνακα

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 2 \\ 2 & 5 & 8 \\ 8 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

με ένα οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό, π.χ. με το $1/2$ βρίσκουμε τον πίνακα

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 8 & 2 \\ 2 & 5 & 8 \\ 8 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 & 4 & 1 \\ 1 & 5/2 & 4 \\ 4 & 1 & 5/2 \end{pmatrix}$$

που κι' αυτός είναι μαγικός, αφού το άθροισμα των στοιχείων κάθε μίας γραμμής του, στήλης του ή διαγωνίου του είναι $=7,5$. ■

γινόμενο πινάκων

Ο μηχανισμός με τον οποίο ορίσαμε το γινόμενο των 2×2 πινάκων στην αρχή του βιβλίου, εξακολουθεί να "δουλεύει" και σε άλλες περιπτώσεις. Έτσι αν A είναι ο 2×3 πίνακας

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και B είναι ο 3×2 πίνακας

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix},$$

τότε

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 5 = 13 \\ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 8 \\ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & & 8 \\ 2 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 5 = 9 & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & & 8 \\ 9 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 5 \end{pmatrix}$$

δηλαδή

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$$

Και γενικά, αν A είναι ένας $m \times n$ πίνακας και B ένας $n \times k$ πίνακας (δηλαδή οι **στήλες** του A είναι σε πλήθος όσες και οι **γραμμές** του B) τότε το γινόμενο τους AB είναι ο $m \times k$ πίνακας του οποίου το στοιχείο c_{ij} του βρίσκεται στην (i,j) -θέση δίνεται από τη σχέση

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

δηλαδή προκύπτει αν "πολλαπλασιάσουμε" την i -γραμμή του A με την j -στήλη του B:

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ \alpha_{i1} & \dots & \alpha_{in} \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots & \begin{pmatrix} \beta_{1j} \\ \vdots \\ \beta_{nj} \end{pmatrix} & \dots \end{pmatrix}$$

Από τον προηγούμενο ορισμό συγάγουμε ότι, όταν έχουμε να κάνουμε μόνο με $n \times n$ πίνακες, τότε το γινόμενο **ορίζεται πάντοτε**. Το γινόμενο πινάκων (εφόσον βέβαια ορίζεται) έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\begin{aligned} A(B\Gamma) &= (AB)\Gamma \\ A(B+\Gamma) &= AB+A\Gamma \quad \& \quad (A+B)\Gamma = A\Gamma+B\Gamma \\ \lambda(AB) &= (\lambda A)B = A(\lambda B) \end{aligned}$$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τετράγωνοι πίνακες που έχουν το 1 στη κύρια διαγώνιο τους και παντού αλλού το 0, π.χ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ κ.λ.π.}$$

Ένας πίνακας αυτού του είδους λέγεται **μοναδιαίος**· συμβολίζουμε με I_n (ή απλά I όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης) τον μοναδιαίο $n \times n$ πίνακα.

Η ονομασία του δικαιολογείται από το ακόλουθο γεγονός:

Αν A είναι ένας $n \times n$ πίνακας, τότε

$$A \cdot I_n = A = I_m \cdot A$$

Τέλος όπως το κάναμε για τους 2×2 πίνακες, μπορούμε να ορίσουμε τη n -στή δύναμη ενός οποιονδήποτε **τετράγωνου** πίνακα A ως εξής:

$$A^0 = I, \quad A^1 = A, \quad A^2 = AA, \dots, \quad A^{n+1} = A^n \cdot A$$

Έχουμε τους ακόλουθους κανόνες

$$(A^\mu)^\nu = A^{\mu\nu} \quad \& \quad A^\mu \cdot A^\nu = A^{\mu+\nu}$$

Παράδειγμα 1^ο Ας υποθέσουμε ότι ο A είναι ένας 2×2 πίνακας

και ο Γ είναι ένας 4×4 πίνακας. Εάν B είναι ένας πίνακας τέτοιος ώστε το γινόμενο $A(B\Gamma)$ να ορίζεται, να βρήτε το μέγεθος του πίνακα B .

Λύση. Ας υποθέσουμε ότι ο B είναι ένας $\mu \times \nu$ πίνακας. Αφού το γινόμενο $B\Gamma$ ορίζεται ο B οφείλει να έχει τόσες στήλες όσες είναι και οι γραμμές του Γ , δηλαδή τέσσερες. Με άλλα λόγια $\nu=4$.

Ο $B\Gamma$ λοιπόν είναι ένας $\mu \times 4$ πίνακας. Αφού το γινόμενο $A(B\Gamma)$ ορίζεται και ο A έχει 2 στήλες, μοιραία ο $B\Gamma$ θα πρέπει να έχει 2 γραμμές, δηλαδή $\mu=2$.

Έτσι λοιπόν ο B είναι ένας 2×4 πίνακας.

Παράδειγμα 2^ο Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 7 \\ 3 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Ορίζεται το γινόμενο AB ; αν ναι, να βρήτε το στοιχείο του AB που βρίσκεται στην 2^η γραμμή και την 3^η στήλη

Λύση.

Αφού ο A είναι 3×2 πίνακας και ο B είναι 2×3 πίνακας, το γινόμενο τους AB ορίζεται και είναι ένας 3×3 πίνακας. Το στοιχείο c_{ij} που βρίσκεται στην i -γραμμή και την j -στήλη στον πίνακα AB προκύπτει, όπως ξέρουμε, αν "πολλαπλασιάσουμε" την i -γραμμή του A με την j -στήλη του B .

Στην προκειμένη περίπτωση μας ζητείται το στοιχείο c'_{23} · θα το βρούμε αν "πολλαπλασιάσουμε" την 2^η γραμμή του A με την 3^η στήλη του B :

$$c_{23} = 3 \cdot 7 + 2 \cdot 0 = 21$$

Παράδειγμα 3^ο Δίνονται οι ακόλουθοι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 \\ -1 & 7 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Να βρήτε την 1^η γραμμή του πίνακα AB.

Λύση .Ο AB είναι ένας 3x3 πίνακας του οποίου το στοιχείο c_{ij} που βρίσκεται στην (i,j) -θέση προκύπτει αν "πολλαπλασιάσουμε" την i-γραμμή του A με την j-στήλη του B. Εδώ ζητάμε να βρούμε την 1^η γραμμή του πίνακα AB, δηλαδή τα στοιχεία

$$c_{11} \quad c_{12} \quad c_{13}$$

Έχουμε

$$c_{11} = 3 \cdot 4 + 4 \cdot (-1) + 1 \cdot 4 = 13$$

$$c_{12} = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 7 + 1 \cdot 3 = 31$$

$$c_{13} = 3 \cdot 7 + 4 \cdot 6 + 1 \cdot 4 = 49$$

Η 1^η γραμμή λοιπόν του AB είναι η

$$(13 \quad 31 \quad 49)$$

Παράδειγμα 4^ο Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Αφού ο A έχει 2 στήλες και ο B έχει 2 γραμμές το γινόμενο AB ορίζεται και είναι

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

Με το παράδειγμα αυτό δείχτηκε ότι η σχέση $AB=O$ δεν συνεπάγεται αναγκαστικά $A=O$ ή $B=O$.

Παράδειγμα 5^ο Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ \& \& } B_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Τα γινόμενα AB_1 & AB_2 ορίζονται και είναι

$$AB_1 = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -14 & -2 \\ -7 & -1 \end{pmatrix} \text{ και } AB_2 = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -14 & -2 \\ -7 & -1 \end{pmatrix}$$

δηλαδή $AB_1 = AB_2$.

Μέ το παραπάνω παράδειγμα δείξαμε ότι:

$AB_1 = AB_2$ και $A \neq 0$, δεν συνεπάγεται αναγκαστικά $B_1 = B_2$.

Παράδειγμα 6^ο Να βρήτε την n -στή δύναμη του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Λύση . Έχουμε

$$\begin{aligned} A^2 = AA &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2A \end{aligned}$$

δηλαδή $A^2 = 2A$.

(1)

Συνεχίζοντας παίρνουμε

$$A^3 = A^2 A = (2A)A = 2A^2 = 2(2A) = 2^2 A$$

Θα δείξουμε επαγωγικά ότι

$$A^n = 2^{n-1} A$$

Για $n=2,3$ μόλις το δείξαμε. Ας υποθέσουμε ότι η σχέση ισχύει για τον φυσικό αριθμό k , δηλαδή ότι

$$A^k = 2^{k-1} A \quad (2)$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει και για τον $k+1$:

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k A \stackrel{(2)}{=} (2^{k-1} A) A = 2^{k-1} A^2 = \\ &\stackrel{(1)}{=} 2^{k-1} (2A) = 2^k A \end{aligned}$$

όπως το θέλαμε. Η πρόταση μας λοιπόν ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό n . ■

αντιστρεψιμότητα

Λέμε ότι ο $n \times n$ πίνακας A είναι **αντιστρέψιμος** αν υπάρχει $n \times n$ πίνακας A' τέτοιος ώστε

$$AA' = I = A'A$$

Ο A' είναι τότε μοναδικός με την ιδιότητα αυτή^(*), συμβολίζεται A^{-1} και ονομάζεται ο **αντίστροφος** του A .

α) Αν οι πίνακες A & B είναι αντιστρέψιμοι, τότε και ο AB είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

β) Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε και ο A^{-1} είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

(*) και η απόδειξη γίνεται όπως ακριβώς στους 2×2 πίνακες

ασκήσεις λυμένες

1

Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Να εκτελεστούν, όπου είναι δυνατό, οι ακόλουθοι πολλαπλασιασμοί:

$$AB, BA, A\Gamma, \Gamma A, B\Gamma$$

답

Αφού ο A έχει 3 στήλες και ο B έχει 3 γραμμές το γινόμενο AB ορίζεται και είναι

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Αφού ο B έχει 3 στήλες και ο A έχει 2 γραμμές το γινόμενο BA δεν ορίζεται.

Αφού ο A έχει 3 στήλες και ο Γ έχει 3 γραμμές το γινόμενο AΓ ορίζεται και είναι

$$A\Gamma = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Αφού ο Γ έχει 1 στήλη και ο A έχει 2 γραμμές το γινόμενο ΓA δεν ορίζεται.

Τέλος, αφού ο B έχει 3 στήλες και ο Γ έχει 3 γραμμές το γινόμενο BΓ ορίζεται και είναι

$$B\Gamma = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2

Να βρήτε τον άγνωστο πίνακα X στην ακόλουθη σχέση

$$X \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Λύση

Για να έχει νόημα η παραπάνω σχέση θα πρέπει ο X να είναι 3×2 πίνακας.

Απ' την άλλη μεριά παρατηρούμε ότι ο πίνακας $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Έτσι πολλαπλασιάζοντας την αρχική σχέση από δεξιά με τον

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \text{ παίρνουμε}$$

$$X = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 6 \\ -8 & -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -3/2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

3

Να βρήτε τους άγνωστους 3×2 πίνακες X & Y που ικανοποιούν τις σχέσεις

$$-2X + 7Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Λύση

Πολλαπλασιάζουμε την 2^{η} των σχέσεων με 2 και την προσθέτουμε

στην $1^{\text{η}}$, οπότε παίρνουμε

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Αντικαθιστώντας τον πίνακα Y που βρήκαμε στην $2^{\text{η}}$ των αρχικών σχέσεων παίρνουμε

$$X - 3 \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και άρα}$$

$$X = \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ 6 & 5 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$$

4

Να βρείτε την n -στή δύναμη του πίνακα

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Λύση

Έχουμε

$$J^2 = J \cdot J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3J \quad \text{και}$$

$$J^3 = J^2 \cdot J = (3J)J = 3J^2 = 3(3J) = 3^2 J$$

Θα δείξουμε επαγωγικά ότι

$$J^n = 3^{n-1} J.$$

Για $v=2,3$ μόλις το δείξαμε. Ας υποθέσουμε ότι η σχέση ισχύει για τον φυσικό αριθμό κ , δηλαδή ότι

$$J^{\kappa} = 3^{\kappa-1} J$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει και για τον $\kappa+1$:

$$\begin{aligned} J^{\kappa+1} &= J^{\kappa} \cdot J = (3^{\kappa-1} J) J = 3^{\kappa-1} J^2 = \\ &= 3^{\kappa-1} (3J) = 3^{\kappa} J \end{aligned}$$

όπως το θέλαμε. Η πρόταση μας λοιπόν ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό v .

5

Να δείξετε ότι

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^v = \begin{pmatrix} 1 & v & \frac{v(v+1)}{2} \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Δύση

Θα δουλέψουμε με επαγωγή πάνω στο v .

Για $v=1$, το πράγμα είναι φανερό.

Ας υποθέσουμε ότι η σχέση ισχύει για τον φυσικό αριθμό κ , δηλαδή ότι

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\kappa} = \begin{pmatrix} 1 & \kappa & \frac{\kappa(\kappa+1)}{2} \\ 0 & 1 & \kappa \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για τον $\kappa+1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\kappa+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\kappa} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\kappa} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} 1 & \kappa & \frac{\kappa(\kappa+1)}{2} \\ 0 & 1 & \kappa \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & \kappa+1 & \frac{(\kappa+1)(\kappa+2)}{2} \\ 0 & 1 & \kappa+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Η σχέση μας λοιπόν ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό n .

6

Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Να δείξετε ότι $A^4 = I$ και ότι ο A είναι αντιστρέψιμος. Στη συνέχεια να βρείτε τον A^{-1} .

Λύση

Έχουμε

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ και}$$

$$A^4 = A^2 A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Η σχέση

$$A^4 = I$$

που μόλις αποδείξαμε, γράφεται

$$A \cdot A^3 = I = A^3 \cdot A$$

και μας λέει ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και ότι ο αντίστροφος

του είναι ο A^3 :

$$\begin{aligned} A^{-1} = A^3 = A^2 A &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

7

Ας είναι

$$M(\alpha) = \begin{pmatrix} 2^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι

$$M(\alpha)M(\beta) = M(\alpha + \beta)$$

και ότι ο $M(\alpha)$ είναι αντιστρέψιμος. Τέλος να υπολογίσετε τον $[M(\alpha)]^{-1}$

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned} M(\alpha)M(\beta) &= \begin{pmatrix} 2^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^\beta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2^{\alpha+\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M(\alpha+\beta) \end{aligned}$$

Αν στη σχέση

$$M(\alpha)M(\beta) = M(\alpha + \beta)$$

βάλουμε $\beta = -\alpha$, βρίσκουμε

$$M(\alpha)M(-\alpha) = M(\alpha - \alpha) = M(0) = \begin{pmatrix} 2^0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

δηλαδή $M(\alpha)M(-\alpha) = I$ και όμοια

$$M(-\alpha)M(\alpha) = M(-\alpha + \alpha) = M(0) = I$$

Έτσι ο $M(\alpha)$ είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφος του είναι ο $M(-\alpha)$, δηλαδή

$$[M(\alpha)]^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{-\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ασκησεις αλυτες

Να εκτελέσετε τους ακόλουθους πολλαπλασιασμούς

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

* * *

Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Να βρήτε το στοιχείο που βρίσκεται στη 2^η γραμμή και την 3^η στήλη στον πίνακα ΑΒΓ.

* * *

Να εκτελέσετε τους παρακάτω πολλαπλασιασμούς

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

* * *

Ας είναι

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Να βρήτε τον A^2 .

* * *

Ας είναι

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

και B ένας οποιοσδήποτε 3×3 πίνακας.

Να δείξετε ότι οι στήλες του πίνακα BA είναι όλες ίσες μεταξύ τους.

* * *

Αν οι A & B είναι 3×3 πίνακες και ο A έχει μία γραμμή που αποτελείται από μηδενικά, τότε και ο AB έχει μία γραμμή που αποτελείται από μηδενικό.

* * *

Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Να βρήτε

- i) την 1^η γραμμή του πίνακα AB
- ii) τη 2^η στήλη του πίνακα BA
- iii) την 3^η γραμμή του πίνακα BB

* * *

Να βρήτε τον A^V , όταν

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

* * *

Δίνεται ο πίνακας

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & 7 & -4 \\ 1 & 4 & 8 \\ 8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Να δείξετε ότι $A^4 = I$ και ότι ο A είναι αντιστρέψιμος. Να υπολογίσετε τον A^{-1} .

* * *

Να δείξετε ότι ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

Ικανοποιεί τη σχέση

$$A^3 + 4A^2 + 6A + 4I = 0$$

Στη συνέχεια να δείξετε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και να βρήτε τον αντίστροφο του.

* * *

Αν $A^2 = A$ και $A \neq I$, τότε ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

* * *