

ΜΑΘΗΜΑ 4

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Οι

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases} \quad (I)$$

αποτελούν ένα **γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο άγνωστους** (τους x & y).

Λέμε ότι οι πραγματικοί αριθμοί x_0, y_0 είναι μία **λύση** του συστήματος (I) αν βάζοντας όπου x το x_0 και όπου y το y_0 , οι εξισώσεις (I) επαληθεύονται.

Ένα γραμμικό σύστημα το λέμε **συμβιβαστό** αν έχει μία τουλάχιστον λύση και **ασυμβίβαστο** (ή **αδύνατο**) στην αντίθετη περίπτωση, δηλαδή όταν δεν έχει καμμία λύση.

Παράδειγμα. Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Να ελέγξετε αν οι αριθμοί

$$x_0 = 1, y_0 = 3$$

είναι λύση του συστήματος αυτού. Το ίδιο για τους

$$x_0 = 0, y_0 = 4$$

Λύση . Για να είναι οι $x_0=1$, $y_0=3$ λύση του παραπάνω συστήματος θα πρέπει βάζοντας όπου x το 1 και όπου y το 3 οι εξισώσεις του να επαληθεύονται· έχουμε

$$2x_0 - y_0 = 2 \cdot 1 - 3 = -1 \quad \text{και}$$

$$x_0 + y_0 = 1 + 3 = 4$$

Πραγματικά λοιπόν οι 1, 3 αποτελούν μία λύση. Αντίθετα οι $x_0=0$, $y_0=4$ δεν είναι λύση του συστήματος αφού

$$2x_0 - y_0 = 2 \cdot 0 - 4 = -4 \neq -1$$

$$x_0 + y_0 = 0 + 4 = 4$$

δηλαδή οι 0, 4 δεν επαληθεύουν και τις δύο εξισώσεις του συστήματος μας. ■

Ας ξαναπάρουμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases} \quad (I)$$

Ο 2×2 πίνακας

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

που σχηματίζεται από τους συντελεστές των αγνώστων x και y , ονομάζεται **πίνακας του συστήματος**, ενώ ο 2×3 πίνακας

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}$$

που σχηματίζεται από τον προηγούμενο βάζοντας δεξιά του τα δεύτερα μέλη των εξισώσεων (I), ονομάζεται **επαυξημένος πίνα-**

κας του συστήματος. Το σύστημα (I) γράφεται τότε με μορφή γινομένου πινάκων ως εξής:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα. Ας πάρουμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} 7x - 4y = 1 \\ x + 11y = -3 \end{cases}$$

Τότε ο πίνακας του είναι ο

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$$

ενώ ο επαυξημένος πίνακας του είναι ο

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 \\ 1 & 11 & -3 \end{pmatrix}$$

Τέλος με μορφή γινομένου πινάκων, το παραπάνω σύστημα γράφεται

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 1 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

Ότι είπαμε προηγούμενα για τα συστήματα δύο εξισώσεων με δύο άγνωστους, μπορούμε να το περάσουμε σε γραμμικά συστήματα μ εξισώσεων με ν άγνωστους* ας πάρουμε ένα τέτοιο σύστημα

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_{\mu 1}x_1 + \alpha_{\mu 2}x_2 + \dots + \alpha_{\mu n}x_n = \beta_\mu \end{cases} \quad (II)$$

Λέμε ότι οι πραγματικοί αριθμοί

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_v$$

αποτελούν μία **λύση** του (II) αν βάζοντας όπου x_1 το ξ_1 , κ.λ.π., όπου x_v το ξ_v , οι εξισώσεις (II) επαληθεύονται.

Το (II) το λέμε **συμβιβαστό**, αν έχει μία τουλάχιστον λύση και **ασυμβιβαστό** (ή **αδύνατο**) στην αντίθετη περίπτωση.

Ο $\mu \times v$ πίνακας που σχηματίζεται από τους συντελεστές των άγνωστων

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1v} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \dots & \alpha_{\mu v} \end{pmatrix}$$

είναι ο **πίνακας του συστήματος**, ενώ ο $\mu \times (v+1)$ πίνακας

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1v} & \beta_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \dots & \alpha_{\mu v} & \beta_\mu \end{pmatrix}$$

είναι ο **επαυξημένος** πίνακας του συστήματος.

Το (II) με μορφή γινομένου πινάκων γράφεται

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1v} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{\mu 1} & \dots & \alpha_{\mu v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_\mu \end{pmatrix}$$

Στην περίπτωση που

$$\beta_1 = 0, \dots, \beta_\mu = 0$$

το γραμμικό σύστημα (II) λέγεται **ομογενές**.

Το να **λύσουμε** ένα γραμμικό σύστημα σημαίνει να βρούμε **όλες** τις λύσεις του (αν φυσικά υπάρχουν).

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με την λύση ορισμένων απλών γραμμικών συστημάτων.

Σύστημα 2x2 . Ας είναι

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases} \quad (I)$$

Ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο άγνωστους και ας συμβολίσουμε με

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \quad (1)$$

την ορίζουσα που σχηματίζεται από τους συντελεστές των άγνωστων, με

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

την ορίζουσα που προκύπτει από την (1) αν αντικαταστήσουμε τους συντελεστές του x

$$\begin{matrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{matrix}$$

με τα δεύτερα μέλη

$$\begin{matrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{matrix}$$

και τέλος με

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

την ορίζουσα που προκύπτει από την (1) αν αντικαταστήσουμε τους συντελεστές του y

$$\begin{array}{c} \beta_1 \\ \beta_2 \end{array}$$

με τα δεύτερα μέλη

$$\begin{array}{c} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{array}$$

Με τους παραπάνω συμβολισμούς θα δείξουμε ότι:

Αν $\Delta \neq 0$, τότε το σύστημα (I) έχει μοναδική λύση που δίνεται από τις σχέσεις

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad \& \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

(κανόνας του Cramer)

Πραγματικά, πολλαπλασιάζοντας την 1^η εξίσωση του συστήματος με β_2 και την 2^η εξίσωση με $-\beta_1$, και προσθέτοντας κατά μέλη βρίσκουμε

$$\beta_2(\alpha_1 x + \beta_1 y) - \beta_1(\alpha_2 x + \beta_2 y) = \beta_2 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_2$$

οπότε, κάνοντας τις πράξεις

$$(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) x = \beta_2 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_2$$

δηλαδή

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \cdot x = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

καθώς από την υπόθεση έχουμε

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

από την προηγούμενη σχέση βρίσκουμε

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}}$$

Με ανάλογο τρόπο υπολογίζουμε το y :

Πολλαπλασιάζουμε την 1^η εξίσωση με $-\alpha_2$, την 2^η με α_1 και προσθέτουμε κατά μέλη

$$-\alpha_2(\alpha_1 x + \beta_1 y) + \alpha_1(\alpha_2 x + \beta_2 y) = -\alpha_2 \gamma_1 + \alpha_1 \gamma_2$$

ή κάνοντας τις πράξεις

$$(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) y = \alpha_1 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_1$$

δηλαδή

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \cdot y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

και συνεπώς

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}} \quad \blacksquare$$

Ας έλθουμε τώρα να δούμε τί γίνεται στην περίπτωση που η ορίζουσα των συντελεστών των άγνωστων είναι $=0$, δηλαδή όταν

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$

Αν κάποιος από τους συντελεστές των x & y είναι $\neq 0$, π.χ. $\alpha_1 \neq 0$, τότε λύνοντας την 1^η εξίσωση του συστήματος (I) βρίσκουμε

$$x = \frac{\gamma_1 - \beta_1 \lambda}{\alpha_1}, \quad y = \lambda \quad (3)$$

όπου λ αυθαίρετος πραγματικός αριθμός. Θα δείξουμε ότι για να ικανοποιούν οι (3) και τη 2^η εξίσωση του (I) πρέπει κι'αρκεί

$$\Delta_y = 0$$

Πραγματικά, αντικαθιστώντας τις (3) στην $\alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2$, βρίσκουμε

$$\alpha_2 \left(\frac{\gamma_1 - \beta_1 \lambda}{\alpha_1} \right) + \beta_2 \lambda = \gamma_2$$

ή (κάνοντας τις πράξεις)

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0$$

ή (λαμβάνοντας υπόψη τη (2))

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$$

όπως το είπαμε.

Συνοψίζουμε:

Για να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases} \quad (I)$$

διακρίνουμε τις περιπτώσεις.

1. $\Delta \neq 0$, τότε το σύστημα (I) έχει μοναδική λύση που δίνεται από τον κανόνα του Cramer:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad \& \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

2. $\Delta = 0$,

Τότε αν $\alpha_1 \neq 0$ & $\Delta_y = 0$, το σύστημα (I) έχει άπειρες λύσεις τις

$$x = \frac{\gamma_1 - \beta_1 \lambda}{\alpha_1} \quad \& \quad y = \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

ενώ αν κάποια από τις Δ_x, Δ_y είναι $\neq 0$, τότε το σύστημα (I) είναι αδύνατο.

Παράδειγμα 1^ο. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ -2x + 7y = -10 \end{cases}$$

Λύση. Η ορίζουσα των συντελεστών των άγνωστων είναι

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$$

Άρα το σύστημα μας έχει μοναδική λύση που δίνεται από τον

κανόνα του Cramer:

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -10 & 7 \end{vmatrix}}{11} = -\frac{43}{11} \quad \& \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -10 \end{vmatrix}}{11} = -\frac{28}{11}$$

Παράδειγμα 2^ο. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} 4x+2y= 5 \\ 6x \ 3y=-1 \end{cases}$$

Λύση. Η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Στην περίπτωση αυτή υπολογίζουμε τις Δ_x , Δ_y όπως ξέρουμε αν κάποια απ'αυτές είναι $\neq 0$ το σύστημα μας είναι αδύνατο.

Έχουμε

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 13 \neq 0$$

Το σύστημα μας λοιπόν είναι αδύνατο.

ασκησεις λυμενες

1

Ποιά από τα παρακάτω συστήματα έχουν μοναδική λύση;

$$\text{i)} \begin{cases} x+y=4 \\ 3x-y=7 \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} 2x-3y=0 \\ -4x+6y=-1 \end{cases} \quad \text{iii)} \begin{cases} 4x+9y=31 \\ -x+11y=-4 \end{cases}$$

Λύση

Όπως ξέρουμε για να έχει ένα 2×2 σύστημα μοναδική λύση πρέπει και αρκεί η ορίζουσα Δ των συντελεστών των αγνώστων να είναι $\neq 0$.

Για το πρώτο σύστημα έχουμε

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

άρα το i) έχει μοναδική λύση.

Για το δεύτερο σύστημα έχουμε

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

άρα το ii) **δεν** έχει μοναδική λύση.

Τέλος για το iii) έχουμε

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 11 \end{vmatrix} = 53 \neq 0$$

και αυτό λοιπόν έχει μοναδική λύση.

2

Ποιά από τα παρακάτω συστήματα είναι αδύνατα;

$$\text{i)} \begin{cases} 4x+6y=2 \\ 6x+9y=3 \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} 3x-2y=2 \\ 6x-4y=3 \end{cases} \quad \text{iii)} \begin{cases} 7x+y=3 \\ -x-5y=1 \end{cases}$$

Λύση

Όπως ξέρουμε για να είναι ένα 2×2 σύστημα αδύνατο, θα πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων Δ να είναι $=0$ και επί πλέον κάποια από τις Δ_x, Δ_y να είναι $\neq 0$.

Στο σύστημα i) έχουμε

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

και

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

άρα το i) **δεν** είναι αδύνατο.

Στο σύστημα ii) έχουμε

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

και

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 14 \neq 0$$

άρα το ii) είναι αδύνατο.

Τέλος στο σύστημα iii) έχουμε

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -34 \neq 0$$

άρα το iii) **δεν** είναι αδύνατο.

3

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} \chi \sigma\upsilon\alpha - \gamma\eta\mu\alpha = \sigma\upsilon\nu\beta \\ \chi\eta\mu\alpha + \gamma\sigma\upsilon\alpha = \eta\mu\beta \end{cases}$$

Λύση

Η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι

$$\begin{vmatrix} \sigma\upsilon\alpha & -\eta\mu\alpha \\ \eta\mu\alpha & \sigma\upsilon\alpha \end{vmatrix} = \sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha = 1 \neq 0$$

Άρα το σύστημα μας έχει μοναδική λύση που δίνεται με τον πίνακα του Cramer

$$\chi = \frac{\begin{vmatrix} \sigma\upsilon\nu\beta & -\eta\mu\alpha \\ \eta\mu\beta & \sigma\upsilon\alpha \end{vmatrix}}{1} = \sigma\upsilon\nu\beta \sigma\upsilon\alpha + \eta\mu\beta \eta\mu\alpha = \sigma\upsilon\nu(\beta + \alpha)$$

$$\gamma = \frac{\begin{vmatrix} \sigma\upsilon\alpha & \sigma\upsilon\nu\beta \\ \eta\mu\alpha & \eta\mu\beta \end{vmatrix}}{1} = \sigma\upsilon\alpha \eta\mu\beta - \eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu(\beta - \alpha)$$

4

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda x + 4y = 2 \\ 9x + y = 3 \end{cases}$$

Λύση

Η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda & 4 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = \lambda - 36$$

Αν λοιπόν $\lambda \neq 36$, τότε $\Delta \neq 0$ και κατά συνέπεια το σύστημα μας έχει μοναδική λύση που τη βρίσκουμε με τον κανόνα του Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\lambda - 36} = -\frac{10}{\lambda - 36} = \frac{10}{36 - \lambda}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}}{\lambda - 36} = \frac{3\lambda - 18}{\lambda - 36}$$

Αν $\lambda = 36$, τότε το σύστημα μα γίνεται

$$\begin{cases} 36x + 4y = 2 \\ 9x + y = 3 \end{cases}$$

και η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι $= 0$.

Στην περίπτωση αυτή υπολογίζουμε τις Δ_x, Δ_y όπως ξέρουμε αν κάποια απ' αυτές βγεί $\neq 0$, τότε το σύστημα μας είναι αδύνατο.

Έχουμε

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$$

άρα το σύστημα μας για $\lambda = 36$ είναι αδύνατο.

5

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} (\lambda + 1)x + (\lambda - 1)y = \lambda \\ \lambda x + (\lambda + 1)y = \lambda - 1 \end{cases}$$

όπου λ πραγματικός αριθμός

Λύση

Η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & \lambda - 1 \\ \lambda & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 3\lambda + 1$$

Αν λοιπόν $\lambda \neq -1/3$, τότε $\Delta \neq 0$ και συνεπώς το σύστημα μας έχει μοναδική λύση που δίνεται από τον κανόνα του Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & \lambda-1 \\ \lambda-1 & \lambda+1 \end{vmatrix}}{3\lambda+1} = \frac{3\lambda-1}{3\lambda+1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \lambda+1 & \lambda \\ \lambda & \lambda-1 \end{vmatrix}}{3\lambda+1} = \frac{-1}{3\lambda+1}$$

Αν τώρα $\lambda = -\frac{1}{3}$, τότε το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} 2x-4y=-1 \\ -x+2y=-4 \end{cases}$$

και η ορίζουσα του είναι $=0$ · καθώς όμως

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$$

το τελευταίο σύστημα είναι αδύνατο.

6

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda x - y = 2 \\ 4x + \mu y = -1 \end{cases}$$

δύση

Η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 4 & \mu \end{vmatrix} = \lambda\mu + 4$$

Αν $\lambda\mu \neq -4$, τότε $\Delta \neq 0$ και το σύστημα μας έχει μοναδική λύση που δίνεται με τον κανόνα του Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \mu \end{vmatrix}}{\lambda\mu+4} = \frac{2\mu-1}{\lambda\mu+4}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{\lambda\mu+4} = -\frac{\lambda+8}{\lambda\mu+4}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $\lambda\mu = -4$, δηλαδή $\mu = -\frac{4}{\lambda}$. τότε το σύστημα μας γίνεται

$$\begin{cases} \lambda x - y = 2 \\ 4x - \frac{4}{\lambda} y = -1 \end{cases}$$

και η ορίζουσα του είναι

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 4 & -4/\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Για να είναι λοιπόν το σύστημα μας συμβιβαστό θα πρέπει

$$\begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ή} \quad \lambda + 8 = 0 \quad \text{ή} \quad \lambda = -8$$

Η λύση τότε προκύπτει από την 2^η εξίσωση

$$4x - \frac{4}{-8} y = -1$$

δηλαδή

$$x = -1 - \frac{1}{2} \alpha, \quad y = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

7

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} (1+\lambda)x + y = \alpha \\ x + (1+\lambda)y = \beta \end{cases}$$

όπου α, β, λ πραγματικοί αριθμοί.

Λύση

Η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+2)$$

Αν λοιπόν $\lambda \neq 0$ & $\lambda \neq -2$, τότε $\Delta \neq 0$ και το σύστημα μας έχει μο-

ναδική λύση που δίνεται από τον κανόνα του Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & \lambda+1 \end{vmatrix}}{\lambda(\lambda+2)} = \frac{\alpha(\lambda+1) - \beta}{\lambda(\lambda+2)}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1+\lambda & \alpha \\ 1 & \beta \end{vmatrix}}{\lambda(\lambda+2)} = \frac{\beta(\lambda+1) - \alpha}{\lambda(\lambda+2)}$$

Αν τώρα $\lambda=0$, τότε το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} x+y=\alpha \\ x+y=\beta \end{cases},$$

και φανερά για να είναι συμβιβαστό (δηλαδή να έχει λύση) πρέπει $\alpha=\beta$, στην οποία περίπτωση βρίσκουμε

$$x=\alpha-K, \quad y=K \quad (K \in \mathbb{R}).$$

Αν $\lambda=-2$, τότε το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} -x+y=\alpha \\ x-y=\beta \end{cases}$$

Για να είναι συμβιβαστό το παραπάνω σύστημα θα πρέπει

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} -1 & \alpha \\ 1 & \beta \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ή} \quad \alpha+\beta=0$$

τότε λύνοντας την 1^η εξίσωση βρίσκουμε

$$x=K-\alpha, \quad y=K \quad (K \in \mathbb{R}).$$

8

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda x - y = 0 \\ -x + \lambda y = 0 \end{cases}$$

Λύση

Η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$$

Αν λοιπόν $\lambda \neq \pm 1$, τότε $\Delta \neq 0$ και συνεπώς το σύστημα μας έχει μοναδική λύση που δίνεται από τον κανόνα του Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix}}{\Delta} = 0 \quad \& \quad y = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = 0$$

Αν $\lambda = 1$, τότε $\Delta = 0$ και το σύστημα μας γίνεται

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Η λύση είναι, τότε

$$x = K, \quad y = K \quad (K \in \mathbb{R}),$$

τέλος αν $\lambda = -1$, τότε $\Delta = 0$ και το σύστημα μας γίνεται

$$\begin{cases} -x - y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

και η λύση του είναι

$$x = K, \quad y = -K \quad (K \in \mathbb{R}).$$

η μεθοδος των διαδο- χικων απαλοιφων

Μια άλλη μέθοδος για να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα είναι να το αντικαταστήσουμε με ένα άλλο που να έχει τις ίδιες λύσεις με το αρχικό, αλλά να είναι ευκολότερο να λυθεί .

Παράδειγμα 1^ο. Ας πάρουμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 3x + y + 2z = 2 \\ 2x - 2y + z = -6 \end{cases}$$

Πολ/ζοντας την 1η εξίσωσή του με -3 και προσθέτοντας στην 2η εξίσωση βρίσκουμε :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -2y - 4z = 2 \\ 2x - 2y + z = -6 \end{cases}$$

Όμοια πολ/ζοντας την 1η εξίσωση με -2 και προσθέτοντας στην 3η εξίσωση βρίσκουμε :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -2y - 4z = 2 \\ -4y + 3z = -6 \end{cases}$$

Με την παραπάνω διαδικασία λοιπόν διώξαμε (απαλοί - ψαμε) το x από τις δυο τελευταίες εξισώσεις.

Επειδή ο συντελεστής του y στη 2η εξίσωση είναι -2 πολ/ζοντας την εξίσωση αυτή με $-1/2$ βρίσκουμε

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y + 2z = -1 \\ -4y + 3z = -6 \end{cases}$$

δηλαδή κάναμε τον συντελεστή του y (στη 2^η εξίσωση) ίσο με 1.

Τώρα συνεχίζουμε όπως παραπάνω : πολ/ζουμε την 2η εξίσωση με 4 και προσθέτουμε στην 3η εξίσωση, οπότε βρίσκουμε

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y + 2z = -1 \\ 5z = -10 \end{cases}$$

Πολ/ζοντας την 3η εξίσωση με $1/5$ βρίσκουμε

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y + 2z = -1 \\ z = -2 \end{cases}$$

Το τελευταίο σύστημα είναι τώρα εύκολο να λυθεί : πραγματικά, αν αντικαταστήσουμε την τιμή $z = -2$ στην 2η εξίσωση βρίσκουμε $y = 3$ και τέλος βάζοντας $y = 3$ & $z = -2$ στην 1η εξίσωση βρίσκουμε $x = 1$.

Η ζητούμενη λύση είναι λοιπόν

$$x=1, y=3, z=-2.$$

Παράδειγμα 2°. Ας πάρουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ 3x + 3y + z = 9 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

Αρχικά για να κάνουμε τον συντελεστή του x στην 1η εξίσωση ίσο με 1, πολ/ζουμε την εξίσωση αυτή με $1/2$,

οπότε βρίσκουμε

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y + z = 9 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

Πολ/ζουμε τώρα την 1η εξίσωση με -3 και την προσθέ-
τουμε στη 2η, οπότε βρίσκουμε

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ z = 3 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

Εναλλάσσουμε τη θέση της 2ης εξίσωσης με την 3η, οπό-
τε παίρνουμε

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας τώρα το $z=3$ στη 2η εξίσωση βρίσκου-
με $y=0$ και τέλος βάζοντας $y=0$ στην 1η εξίσωση βρί-
σκουμε $x=2$. Η ζητούμενη λύση είναι λοιπόν

$$x = 2, y = 0, z = 3$$

Παράδειγμα 3°. Ας πάρουμε τώρα το σύστημα

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -4 \\ 2x + y - 3z = 4 \end{cases}$$

Για να διώξουμε το x , πολ/ζουμε την 1η εξίσωση με
 -2 και την προσθέτουμε στην 2η εξίσωση, οπότε βρίσκου-
με

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -4 \\ -3y + 3z = 12 \end{cases}$$

Πολ/ζουμε τώρα τη 2η εξίσωση με $-1/3$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -4 \\ y - z = -4 \end{cases} \quad (1)$$

Για να λύσουμε το τελευταίο σύστημα βάζουμε μια αυθαίρετη τιμή στο z ($z = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$) οπότε από την 2η εξίσωση του (1) βρίσκουμε

$$y = \lambda - 4$$

Τότε η 1η εξίσωση των (1) δίνει

$$\begin{aligned} x - 4 - 2y + 3z &= \\ &= -4 - 2(\lambda - 4) + 3\lambda = \lambda + 4 \end{aligned}$$

Το αρχικό μας σύστημα έχει λοιπόν τις λύσεις

$$x = \lambda + 4, \quad y = \lambda - 4, \quad z = \lambda$$

όπου λ αυθαίρετος πραγματικός αριθμός.

Παράδειγμα 4^ο. Ας πάρουμε το σύστημα

$$\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 2x - 2y = -4 \\ 3x + 5y = 26 \end{cases}$$

Για να απαλοίσουμε το x πολ/ζουμε την 1η εξίσωση με -2 και την προσθέτουμε στην 2η εξίσωση, οπότε βρίσκουμε

$$\begin{cases} x + 2y = 10 \\ y = 4 \\ 3x + 5y = 26 \end{cases}$$

Τώρα πολ/ζουμε την 1η εξίσωση με -3 και την προσθέτουμε στην 3η, οπότε βρίσκουμε

$$\begin{cases} x + 2y = 10 \\ y = 4 \\ y = 4 \end{cases}$$

Το τελευταίο σύστημα είναι πανερά ισοδύναμο με το

$$\begin{cases} x+2y = 10 \\ y = 4 \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας την τιμή $y=4$ στην 1η εξίσωση βρίσκουμε $x = 2$. Η ζητούμενη λύση είναι λοιπόν

$$x = 2, y = 4$$

Παράδειγμα 5°. Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{cases} x+2y = 10 \\ 2x-2y = -4 \\ 3x+5y = 20 \end{cases}$$

Όπως πριν, για να απαλοψουμε το x , πολ/ζουμε την 1η εξίσωση με -2 και την προσθέτουμε στη 2η εξίσωση οπότε παίρνουμε

$$\begin{cases} x+2y = 10 \\ y = 4 \\ 3x+5y = 20 \end{cases}$$

Πολ/ζουμε τώρα την 1η εξίσωση με -3 και την προσθέτουμε στην 3η, οπότε βρίσκουμε

$$\begin{cases} x + 2y = 10 \\ y = 4 \\ y = 10 \end{cases}$$

Το προηγούμενο σύστημα (όπως φαίνεται από τις δυο τελευταίες του εξισώσεις) είναι αδύνατο, δηλαδή δεν έχει λύση. ■

Η μέθοδος λοιπόν των διαδοχικών απαλοιφών που χρησιμοποιήσαμε στα παραπάνω παραδείγματα, συνίσταται στο να εφαρμόσουμε μια ή περισσότερες φορές κάποια από τις ακόλουθες **πράξεις** :

1. Να προσθέσουμε ένα πολ/σιο μιας εξίσωσης σε μια άλλη εξίσωση.

2. Να πολ/σουμε μια εξίσωση με ένα μη-μηδενικό πραγματικό αριθμό,

3. Να ανταλλάξουμε αμοιβαία τη θέση δυο εξισώσεων.

Είναι φανερό ότι αν σ'ένα σύστημα εφαρμόσουμε μια από τις πράξεις αυτές, τότε το σύστημα που προκύπτει έχει τις ίδιες λύσεις με το αρχικό.

Ας πάρουμε τώρα τον επαυξημένο πίνακα ενός συστήματος. Αφού οι γραμμές του πίνακα αυτού αντιστοιχούν στις εξισώσεις του συστήματος, οι προηγούμενες πράξεις **1, 2 & 3** αντιστοιχούν στις ακόλουθες πράξεις πάνω στις γραμμές του επαυξημένου πίνακα:

1'. Να προσθέσουμε ένα πολ/σιο μιας γραμμής του επαυξημένου πίνακα, σε μια άλλη γραμμή του,

2'. Να πολ/σουμε μια γραμμή του επαυξημένου πίνακα με έναν μη-μηδενικό πραγματικό αριθμό.

3'. Να ανταλλάξουμε αμοιβαία τη θέση δυο γραμμών του επαυξημένου πίνακα.

Ας πάρουμε να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

Πολ/ζουμε με -2 την 1η εξίσωση και την προσθέτουμε στη 2η, οπότε παίρνουμε :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2y - 7z = -17 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

Πολ/ζουμε με -3 την 2η εξίσωση και την προσθέτουμε στην 1η, οπότε παίρνουμε :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2y - 7z = -17 \\ 3y - 11z = -27 \end{cases}$$

Πολ/ζουμε την 2η εξίσωση με $1/2$, οπότε παίρνουμε

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ y - 7/2z = -17/2 \\ 3y - 11z = -27 \end{cases}$$

Πολ/ζουμε την 2η εξίσωση με -3 και την προσθέτουμε στην 3η οπότε βρίσκουμε

Ο επαυξημένος πίνακας του είναι

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Πολ/ζουμε με -2 την 1η γραμμή του πίνακα και την προσθέτουμε στη 2η οπότε παίρνουμε :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Πολ/ζουμε με -3 την 2η γραμμή του παραπάνω πίνακα και την προσθέτουμε στην 1η, οπότε παίρνουμε :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{pmatrix}$$

Πολ/ζουμε την 2η γραμμή με $1/2$, οπότε παίρνουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{pmatrix}$$

Πολ/ζουμε την 2η γραμμή του παραπάνω πίνακα με -3 και την προσθέτουμε

στη 3η οπότε βρίσκουμε

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ y - 7/2z = -17/2 \\ -1/2z = -3/2 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

Πολ/ζουμε τη 3η εξίσωση με -2, οπότε παίρνουμε

Πολ/ζουμε την 3η γραμμή του παραπάνω πίνακα με -2 οπότε παίρνουμε

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ y - 7/2z = -17/2 \\ z = 3 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Τώρα τα πράγματα είναι εύκολα* αντικαθιστώντας το $z=3$ στη 2η εξίσωση βρίσκουμε $y=2$ και τέλος βάζοντας $y=2$ & $z=3$ στην 1η εξίσωση βρίσκουμε τελικά

$$x=1, y=2, z=3 \quad \blacksquare$$

Ετσι λοιπόν αντί να δουλεύουμε με τις εξισώσεις ενός συστήματος, μπορούμε να δουλεύουμε με τις γραμμές του επαυξημένου πίνακά του προσπαθώντας με τις πράξεις **1', 2' & 3'** να τον φέρουμε σε μια μορφή ανάλογη με εκείνη του προηγούμενου παραδείγματος.

Παράδειγμα 1°. Ας πάρουμε το σύστημα

$$\begin{cases} x - 3y = -1 \\ -2x + 5y = 0 \end{cases}$$

Ο επαυξημένος πίνακάς του είναι ο

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Πολ/ζουμε την 1η γραμμή του με 2 και την προσθέτουμε στην 2η , οπότε βρίσκουμε τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Πολ/ζουμε τη 2η γραμμή του παραπάνω πίνακα με -1, οπότε βρίσκουμε τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Το σύστημα που αντιστοιχεί στον παραπάνω πίνακα είναι το

$$\begin{cases} x - 3y = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

που λύνεται εύκολα * βάζοντας $y=2$ στην 1η εξίσωση βρίσκουμε $x=5$. Η ζητούμενη λύση είναι λοιπόν

$$x=5, y=2$$

Παράδειγμα 2^ο . Ας πάρουμε το σύστημα

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 3 \\ x + \quad \quad 2z = 0 \\ 2x + 4y + \quad z = 3 \end{cases}$$

Ο επαυξημένος πίνακάς του είναι

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Προσπαθούμε με τη βοήθεια των πράξεων **1', 2' & 3'**, να φερούμε τον παραπάνω πίνακα σε μια "τριγωνική" μορφή όπως κάναμε προηγούμενα· έτσι, πολ/ζοντας την 1η γραμμή του με -1 και προσθέτοντας στη 2η γραμμή βρίσκουμε τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Πολ/ζουμε την 1η γραμμή του παραπάνω πίνακα με -2 και τη προσθέτουμε στην 3η γραμμή, οπότε βρίσκουμε τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$

Πολ/ζουμε τώρα την 2η γραμμή με $-1/2$ και την 3η γραμμή με $-1/7$, οπότε βρίσκουμε τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/7 \end{pmatrix}$$

Το σύστημα που αντιστοιχεί στον προηγούμενο πίνακα είναι το

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 3 \\ y + z = 3/2 \\ z = 3/7 \end{cases}$$

και είναι τώρα εύκολο να λυθεί: βάζοντας $z=3/7$ στη 2η εξίσωση, βρίσκουμε $y=15/14$ και τέλος βάζοντας τις τιμές αυτές στην 1η εξίσωση βρίσκουμε $x=-6/7$.

Η ζητούμενη λύση είναι λοιπόν

$$x = -6/7, \quad y = 15/14, \quad z = 3/7.$$

Παράδειγμα 3° . Ας πάρουμε το ομογενές σύστημα

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ 3x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του είναι

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Πολ/ζουμε τη 1η γραμμή του με -2 και την προσθέτουμε στη 2η :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Πολ/ζουμε την 1η γραμμή του με -3 και την προσθέτουμε στην 3η:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Το σύστημα που αντιστοιχεί στον παραπάνω πίνακα είναι το

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

και έχει φανερά τη λύση $x=y=z=0$.

Παράδειγμα 4° . Ας πάρουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 4x+y+2z=1 \\ y+3z=0 \\ x-2z=1 \\ 2x+y+4z=0 \end{cases}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του είναι ο

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Ανταλλάσσουμε την 1η γραμμή με την 3η

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Πολ/ζουμε την 1η γραμμή με -4 και την προσθέτουμε στη 3η :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & -3 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Πολ/ζουμε την 1η γραμμή με -2 και την προσθέτουμε στην 4η :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & -3 \\ 0 & 1 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

Πολ/ζουμε την 2η γραμμή με -1 και την προσθέτουμε στην 3η :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

Πολ/ζουμε με -1 την 2η γραμμή και την προσθέτουμε στην 4η :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Πολ/ζουμε την 3η γραμμή με $1/7$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Πολ/ζουμε τη 3η γραμμή με -5 και την προσθέτουμε στην 4η :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & 0 & 0 & 1/7 \end{pmatrix}$$

Το γραμμικό σύστημα που αντιστοιχεί στον πίνακα αυτό είναι :

$$\begin{cases} x - 2z = 1 \\ y + 3z = 0 \\ z = -3/7 \\ 0 = 1/7 \end{cases}$$

Το οποίο λόγω της τελευταίας σχέσης είναι φανερά αδύνατο. Το αρχικό σύστημά μας, δεν έχει λοιπόν λύση.

ασκησεις λυμενες

1

Να βρήτε τον επαυξημένο πίνακα των ακόλουθων συστημάτων

$$1) \begin{cases} x+3y=0 \\ -x+y=-4 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x-y+2z=4 \\ 4y-3z=0 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x & + z = 3 \\ & y - 2z = 0 \\ 3x + y & - z = -1 \end{cases}$$

Λύση

Όπως ξέρουμε ο επαυξημένος πίνακας ενός συστήματος είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον πίνακα των συντελεστών των αγνώστων, βάζοντας δεξιά του τα δευτερα μέλη του συστήματος. Έτσι ο επαυξημένος πίνακας του πρώτου συστήματος είναι ο

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -4 \end{array} \right)$$

που προκύπτει από τον πίνακα των συντελεστών των αγνώστων

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

βάζοντας δεξιά του τα δεύτερα μέλη

$$0$$

$$-4$$

Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι ο

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι ο επαυξημένος πίνακας του δεύτερου συστήματος και ο

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

είναι ο επαυξημένος πίνακας του τρίτου συστήματος.

2

Να βρήτε το γραμμικό σύστημα που έχει για επαυξημένο πίνακα τον

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & -2 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Λύση

Από τον ορισμό του επαυξημένου πίνακα προκύπτει ότι ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων του ζητούμενου συστήματος είναι ο

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & -2 \\ 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ενώ τα δεύτερα μέλη του είναι τα

$$0$$

$$3$$

αντίστοιχα. Έτσι το

$$\begin{cases} 4x + 8y - 2z = 0 \\ 7x + y = 3 \end{cases}$$

είναι το σύστημα που ψάχνουμε.

3

Να βρείτε το γραμμικό σύστημα που έχει για επαυξημένο πίνακα τον

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Λύση

Ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων του ζητούμενου συστήματος είναι ο

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{array} \right)$$

ενώ τα δεύτερα μέλη του είναι τα

$$-1$$

$$0$$

$$1$$

αντίστοιχα. Έτσι το σύστημα που ψάχνουμε είναι το

$$\begin{cases} 3x + 4y = -1 \\ 2x + 7y = 0 \\ -x + 3y = 1 \end{cases}$$

4

Να δείξετε ότι το γραμμικό σύστημα που έχει για επαυξημένο πίνακα τον

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

είναι αδύνατο

div n

Πραγματικά, το γραμμικό σύστημα που έχει τον παραπάνω πίνακα σαν επαυξημένο είναι το

$$\begin{cases} x - y + 4z = 4 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 2 \end{cases}$$

Το σύστημα αυτό δεν έχει λύση

Πραγματικά αν x_0, y_0, z_0 ήταν μια λύση του, τότε βάζοντας τις τιμές αυτές στην τελευταία εξίσωση θα καταλήγαμε στο άτομο $0=2$. Το σύστημα μας λοιπόν είναι αδύνατο.

5

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Ο επαυξημένος του πίνακα είναι ο

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Πολ/ζουμε την 1η γραμμή του με -2 και την προσθέτουμε στη 2η οπότε βρίσκουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -9 \end{pmatrix}$$

Πολ/ζουμε την 2η γραμμή του παραπάνω πίνακα με $-1/3$ οπότε βρίσκουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

το σύστημα που αντιστοιχεί στον τελευταίο πίνακα είναι το

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ y = 3 \end{cases}$$

και λύνεται εύκολα* βάζοντας $y=3$ στην πρώτη εξίσωση βρίσκουμε $x=2$. Το αρχικό μας σύστημα έχει λοιπόν μια λύση, την $x=2$ & $y=3$.

6

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 6y = 0 \end{cases}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Πολ/ζοντας την 1η γραμμή του με -3 και προσθέτοντας στη 2η γραμμή, βρίσκουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Το σύστημα που αντιστοιχεί στον παραπάνω πίνακα είναι το

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = -3 \end{cases}$$

που είναι αδύνατο (κύττα την άσκηση 4)

7

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} x + y + 2z = 8 \\ -x - 2y + 3z = 1 \\ 3x - 7y + 4z = 10 \end{cases}$$

Πύση

Ο επαυξημένος πίνακας του είναι ο

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

προσθέτουμε την 1η γραμμή του στην 3η :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

Πολ/ζουμε την 1η γραμμή του με -3 και την προσθέτουμε στην 3η γραμμή :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{pmatrix}$$

Πολ/ζουμε την 2η γραμμή με -1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{pmatrix}$$

Πολ/ζουμε την 2η γραμμή με 10 και την προσθέτουμε στην 3η :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -52 & -104 \end{pmatrix}$$

Πολ/ζουμε την 3η γραμμή με $-1/52$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Το σύστημα που αντιστοιχεί στην παραπάνω πίνακα είναι

προσθέτουμε την 1η γραμμή του στην 3η :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

Πολ/ζουμε την 1η γραμμή του με -3 και την προσθέτουμε στην 3η γραμμή :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{pmatrix}$$

Πολ/ζουμε την 2η γραμμή με -1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{pmatrix}$$

Πολ/ζουμε την 2η γραμμή με 10 και την προσθέτουμε στην 3η :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -52 & -104 \end{pmatrix}$$

Πολ/ζουμε την 3η γραμμή με $-1/52$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Το σύστημα που αντιστοιχεί στον παραπάνω πίνακα είναι

το :

$$\begin{cases} x+y+2z=8 \\ y-5z=-9 \\ z=2 \end{cases}$$

και λύνεται εύκολα :

$$x=3, y=1, z=2$$

8

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x-y+z-t=1 \\ x+z=1 \end{cases}$$

Λύση

Ο επαυξημένος του πίνακα είναι ο

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Πολ/ζουμε την 1η γραμμή του με -1 και την προσθέ-
τουμε στη 2η, οπότε παίρνουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Πολ/ζουμε την 1η γραμμή με -1 και την προσθέτουμε στην

3η , οπότε βρίσκουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Πολ/ζουμε την 2η γραμμή με $-1/2$, οπότε βρίσκουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Προσθέτουμε τώρα στην 2η γραμμή στην 3η :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Το σύστημα που αντιστοιχεί στον παραπάνω πίνακα είναι το

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ y + t = 0 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + 0 \cdot t = 0 \end{cases}$$

που φανερά είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ y + t = 0 \end{cases}$$

Βάζοντας αυθαίρετες τιμές στα z & t ($z=\lambda, t=\mu$ με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$) βρίσκουμε $y=-\mu$ και $x=1-\lambda$. Οι λύσεις είναι λοιπόν $x=1-\lambda$, $y=-\mu$, $z=\lambda$, $t=\mu$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).

9

Μια οικογενεια αποτελείται από τον πατέρα, την μητέρα, ένα γιο και μια κόρη. Ο πατέρας είναι δυο χρόνια μεγαλύτερος από την μητέρα. Μετά από δυο χρόνια, ο πατέρας θα είναι τρεις φορές μεγαλύτερος από τον γιό του και ο γιος θα είναι δυο φορές μεγαλύτερος από την κόρη. Τέλος μετά τρία χρόνια η μητέρα θα είναι πέντε φορές μεγαλύτερη από την κόρη. Ποιές είναι οι ηλικίες των μελών της οικογένειας αυτής ;

ή υ ό η

Ας είναι x η ηλικία του πατέρα, y η ηλικία της μητέρας, z η ηλικία του γιου και t η ηλικία της κόρης. Αφού ο πατέρας είναι δυο χρόνια μεγαλύτερος από τη μητέρα θα έχουμε

$$x = y + 2$$

Αφού μετά 2 χρόνια ο πατέρας θα είναι τρεις φορές μεγαλύτερο από τον γιο του θα έχουμε

$$x + 2 = 3z$$

Ομοια ο γιος θα είναι, μετά 2 χρόνια, 2 φορές μεγαλύτερος από τη κόρη οπότε

$$z + 2 = 2t$$

Τέλος μετά 3 χρόνια η μητέρα θα είναι 5 φορές μεγαλύτερη από την κόρη, δηλ.

$$y + 3 = 5t$$

Ξαναγράφοντας τις εξισώσεις παίρνουμε το ακόλουθο γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x - 3z = -2 \\ z - 2t = -2 \\ y - 5t = -3 \end{cases}$$

Λύνοντάς το με την παραπάνω διαδικασία βρίσκουμε

$$\begin{cases} x=34, y=32 \\ z=12, t=7 \end{cases}$$

10

Να βρήτε ακέραιους αριθμούς x, y, z, t έτσι ώστε στην εξίσωση



ο αριθμός των ατόμων καθενός στοιχείου και στα δυο μέλη να είναι ο ίδιος.

Λύση

Βλέπουμε ότι υπάρχουν x άτομα ασβεστίου στο αριστερό μέλος και $3z$ στο δεξιό έτσι

$$x = 3z$$

Επίσης υπάρχουν $3y$ άτομα υδρογόνου στο αριστερό μέλος και $2t$ στο δεξιό * έτσι

$$3y = 2t$$

Ομοια για τον φωσφόρο βρίσκουμε

$$y = 2z$$

και για το οξυγόνο

$$4y = 8z$$

Εχουμε λοιπόν το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} x - 3z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ 3y - 2t = 0 \\ 4y - 8z = 0 \end{cases}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του είναι ο

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Πολ/ζουμε την 2η γραμμή του με -3 και προσθέτουμε στην 3η , οπότε βρίσκουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

πολ/ζουμε την 2η γραμμή με -4 και προσθέτουμε στην 4η γραμμή , οπότε παίρνουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Τέλος πολ/ζουμε την 3η γραμμή με $1/6$ οπότε παίρνουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Το σύστημα που αντιστοιχεί στον παραπάνω πίνακα είναι το

$$\begin{cases} x - 3z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ z - 1/3 t = 0 \end{cases}$$

Βάζοντας μια αυθαίρετη τιμή στο t ($t = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$) βρίσκουμε

$$x = \lambda, y = 2\lambda/3, z = \lambda/3, t = \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Επειδή τα x, y, z, t πρέπει να είναι ακέραιοι αριθμοί (γιατί παριστάνουν αριθμούς ατόμων) επιλέγοντας το λ να είναι ίσο π.χ. με 3, βρίσκουμε

$$x = 3, y = 2, z = 1, t = 3$$

11

Σε μια χώρα υπάρχουν δυο πολιτικά κόμματα, το Α και το Β. Καθένας από τους πολίτες της χώρας αυτής ανήκει σ'ένα από τα δυο κόμματα.

Κατά τη διάρκεια ενός χρόνου τα $4/5$ των μελών του Α κόμματος μένουν στο Α ενώ το $1/5$ πηγαίνει στο Β. Από τα μέλη του Β, τα $3/5$ μένουν στο Β, ενώ τα $2/5$ πηγαίνουν στο Α. Αν μετά τις παραπάνω μεταβολές η δύναμη και των δυο κομμάτων παραμένει η ίδια να βρήτε το ποσοστό των πολιτών της χώρας αυτής που ανήκουν στο Α και στο Β.

Πύλη

Ας είναι x το ποσοστό των πολιτών που ανήκουν στο Α και y το ποσοστό εκείνων που ανήκουν στο Β. Αφού από την υπόθεση καθένας πολίτης ανήκει σ'ένα από τα δυο κόμματα, θα έχουμε

$$x + y = 1$$

Τώρα το κόμμα Α σε διάστημα ενός χρόνου συγκαταεί τα $4/5$ της δύναμής του, ενώ ταυτόχρονα δέχεται και τα $2/5$ των μελών του Β. Αφού μετά τις μεταβολές αυτές η δύναμη του Α παραμένει η ίδια, θα έχουμε

$$4/5x + 2/5y = x \quad \text{ή} \quad -1/5 x + 2/5y = 0$$

Ομοια το Β στο ίδιο διάστημα, συγκαταεί τα $3/5$ της δύναμής του ενώ δέχεται και το $1/5$ των μελών του Α. αφού μετά τις μεταβολές αυτές η δύναμη του Β παραμένει η ίδια, θα έχουμε

$$3/5y + 1/5x = y \quad \text{ή} \quad 1/5 x - 2/5y = 0$$

Εχουμε λοιπόν να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -1/5 x + 2/5y = 0 \\ 1/5 x - 2/5y = 0 \end{cases}$$

απ'όπου βρίσκουμε

$$x = 2/3 \quad \& \quad y = 1/3$$

ασκήσεις αλυτές

Να βρήτε τους επαυξημένους πίνακες των ακόλουθων γραμμικών συστημάτων

$$\begin{cases} 6x - 7y = 3 \\ 2x + y = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 4y - 3z = 0 \\ -x + 7y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ 2y - z + 3t = 0 \\ x + z - t = -1 \end{cases}$$

* * *

Να βρήτε τα γραμμικά συστήματα που ο επαυξημένος πίνακας τους είναι αντίστοιχα

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 7 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

* * *

Να λυθούν τα συστήματα

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 7x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 4x - 6y = 0 \end{cases}$$

* * *

Να λυθούν τα συστήματα

$$\begin{cases} x-2y+z=-1 \\ y+3z=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y+4z-t=2 \\ 4x+2y+3t=0 \end{cases}$$

* * *

Να λυθούν τα συστήματα

$$\begin{cases} x-y=-2 \\ 3x+2y=0 \\ -x+3y=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+y=3 \\ -x+y=7 \\ 3x+4y=5 \end{cases}$$

* * *

Να λυθούν τα συστήματα

$$\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ 3x-y+5z=2 \\ 4x+y-10z=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+2z=6 \\ 3y+3z=9 \end{cases}$$

* * *

Να λυθούν τα συστήματα

$$\begin{cases} 3x-2y-z=-15 \\ 5x+3y+2z=0 \\ 3x+y+3z=11 \\ 11x+7y=-30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y+2z-t=-1 \\ 2x+y-2z-2t=-2 \\ -x+2y-4z+t=1 \\ x-t=1 \end{cases}$$

* * *

Εχουμε τρεις κουμπαράδες και ξέρουμε πόσα λεφτά βρίσκονται σε καθε δυο κουμπαράδες. Είναι δυνατό να βρούμε πόσα λεφτά περιέχει κάθε κουμπαράς;

* * *