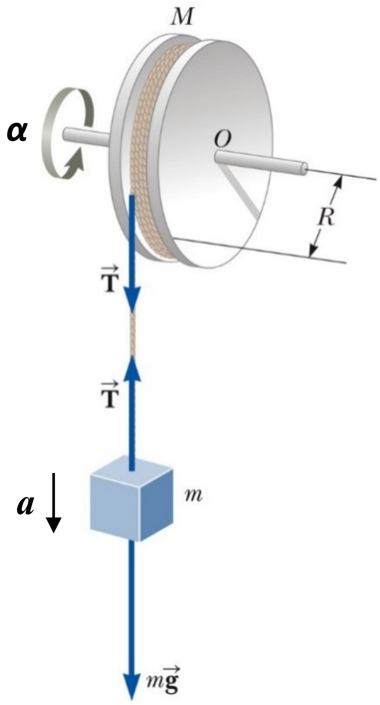
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2025

ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ (ΤΕ)

Τετάρτη, 22 Ιανουαρίου 2025, 11:00 – 13:00 αιθ. ΒΠ1_11, ΒΠ1_12 ΖΕΠ.
Εισηγητής: Κώστας Φιλιππίδης (kphilippides@uowm.gr)



ΘΕΜΑ 1. [3]

Το σύστημα αφήνεται από την ηρεμία όταν το βαρίδιο βρίσκεται σε ύψος h = 14 m πάνω από το έδαφος. Το νήμα είναι αβαρές και μη εκτατό και ξετυλίγεται χωρίς να γλιστράει, ενώ η τροχαλία περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από τον σταθερό άξονα που περνάει από το κέντρο της Ο.

$m = 10$ kg, $M = 8$ kg, $I = \frac{1}{2}MR^2$, g=9,8 N/kg

Η ακτίνα της τροχαλίας δεν δίνεται επειδή δεν χρειάζεται στα επόμενα ερωτήματα (απλοποιείται).

1) Τι ταχύτητα έχει το βαρίδιο όταν έχει κατέβει 3,5 m και τι κινητική ενέργεια έχει η τροχαλία την ίδια στιγμή ;

2) Πότε το βαρίδιο φτάνει στο έδαφος ;

3) Πόση είναι η τάση του νήματος

Αφού το νήμα ξετυλίγεται χωρίς να ολισθαίνει η γραμμική επιτάχυνση των σημείων της περιμέτρου της τροχαλίας $a_{\gamma\rho\alpha\mu} = \alpha R$ είναι ίση με την επιτάχυνση a του βαριδίου.

$$a = a_{\gamma\rho\alpha\mu} \Rightarrow a = \alpha R \Rightarrow \alpha = \frac{a}{R}$$

Με την ίδια σχέση συνδέεται και η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας με την ταχύτητα του βαριδίου

$$\upsilon = \upsilon_{\gamma\rho\alpha\mu} \Rightarrow \upsilon = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{\upsilon}{R}$$

Για τον ίδιο λόγο το μήκος του τόξου που έχει ξετυλιχτεί το νήμα είναι ίσο με την κατακόρυφη μετατόπιση του βαριδίου

$$y = s \Rightarrow y = \theta R \Rightarrow \theta = \frac{y}{R}$$

Γράφουμε το 2ο νόμο του Νεύτωνα (θεμελιώδης νόμος μηχανικής) στην κατάλληλη μορφή για τα δύο σώματα

Μεταφορική βαριδίου: $\sum F = ma \Rightarrow B - T = ma$ (1)

Στροφική κίνηση τροχαλίας : $\sum \tau = I\alpha_{\omega} \Rightarrow TR = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \frac{a}{R} \Rightarrow T = \frac{1}{2}Ma$ (2)

Προσθέτοντας τις (1) και (2) βρίσκουμε την a και

$$(1)+(2):\ B - T + T = ma + \frac{1}{2}Ma \Rightarrow mg = a \cdot \left(m + \frac{M}{2}\right) \Rightarrow a = \frac{mg}{m + \frac{M}{2}} \Rightarrow a = \frac{(10)(9,8)}{10 + \frac{8}{2}} = \frac{98}{14} = 7 \text{ m/s}^2$$

Αντικαθιστώντας στην (2) θα μπορούσαμε να βρούμε και την τάση του νήματος T που δεν ζητείται.

$$T = \frac{1}{2}Ma = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28 \text{ N}$$

Η κατακόρυφη κίνηση του βαριδίου είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη και περιγράφεται από τις εξισώσεις : $y = \frac{1}{2}at^2$, $\upsilon = at$, $\upsilon^2 = 2ay$

Η περιστροφή της ράβδου είναι ομαλά επιταχυνόμενη και περιγράφεται από τις εξισώσεις :

$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2$, $\omega = \alpha t$, $\omega^2 = 2\alpha\theta$

Οπότε για y= 3,5 m : $\upsilon^2 = 2ay = 2(7)(3,5) = 49 \Rightarrow$

$$\boxed{\upsilon = 7\ \text{m/s}}$$

$$K_{\tau\rho o\chi} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\left(\frac{\upsilon}{R}\right)^2 = \frac{1}{4}M\upsilon^2 = \frac{1}{4}(5)(49) \Rightarrow$$

$$\boxed{K_{\tau\rho o\chi} = 61,25\ \text{J}}$$

Το βαρίδιο φτάνει στο έδαφος όταν y=h :

$$y = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2(14)}{7}} \Rightarrow$$

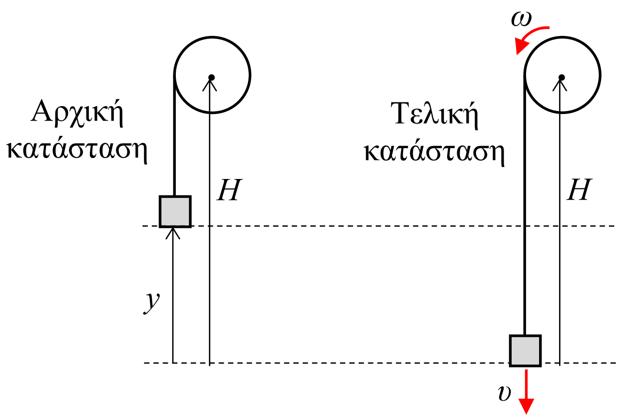
$$\boxed{t = 2\ \text{s}}$$

Την ταχύτητα του βαριδίου θα μπορούσαμε να την βρούμε και από τη διατήρηση της ενέργειας χωρίς να ξέρουμε την επιτάχυνση. Θέτουμε το μηδέν της δυναμικής ενέργειας στα 3,5 m κάτω από την αρχική θέση του βαριδίου. Έστω ότι το κέντρο της τροχαλίας απέχει από αυτό το σημείο κατακόρυφη απόσταση H.

$$E_{\alpha\rho\chi} = E_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow K_{\beta\alpha\rho,\alpha\rho\chi} + U_{\beta\alpha\rho,\alpha\rho\chi} + K_{\tau\rho o\chi,\alpha\rho\chi} + U_{\tau\rho o\chi,\alpha\rho\chi} = K_{\beta\alpha\rho,\tau\varepsilon\lambda} + U_{\beta\alpha\rho,\tau\varepsilon\lambda} + K_{\tau\rho o\chi,\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\rho o\chi,\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow$$

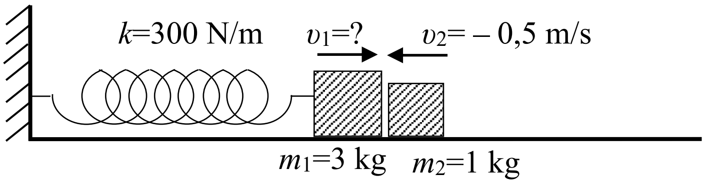
$$0 + mgy + 0 + \cancel{MgH} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + 0 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \cancel{MgH} \Rightarrow mgy = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\left(\frac{\upsilon}{R}\right)^2 \Rightarrow$$

$$mgy = \frac{1}{2}\upsilon^2\left(m + \frac{M}{2}\right) \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2mgy}{m + \frac{M}{2}}} = \sqrt{\frac{2(10)(9,8)(3,5)}{10+4}} = \sqrt{\frac{(98)(7)}{14}} = \sqrt{49} = 7\ \text{m/s}$$



ΘΕΜΑ 2ο [3]

Το σώμα 1, που είναι συνδεδεμένο με το ελατήριο, εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A_1=10 cm. Τη στιγμή που περνάει από τη θέση ισορροπίας του, κινούμενο προς τα δεξιά, συγκρούεται κεντρικά και **ελαστικά** με το σώμα 2. Το δάπεδο είναι λείο.



Να βρείτε :

2.1 Την ταχύτητα υ_1 του σώματος 1 πριν την κρούση

2.2 Τις ταχύτητες u_1 και u_2 των σωμάτων μετά την κρούση

2.2 Το νέο πλάτος A_2 της ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα 1 μετά την κρούση

ΛΥΣΗ

2.1 Η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης είναι : $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m_1}} = \sqrt{\dfrac{300}{3}} = \sqrt{100} = 10 \text{ rad/s}$.

Όταν περνάει από τη θέση ισορροπίας έχει τη μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης που δίνεται από τον τύπο :

$\upsilon_{\max} = A\omega \Rightarrow \quad \upsilon_1 = A_1\omega = (0{,}1)(10) = 1 \text{ m/s}$

2.2 Στην ελαστική κρούση διατηρείται και η ορμή και η κινητική ενέργεια

$$\left.\begin{aligned} p_1 + p_2 &= p_1' + p_2' \\ K_1 + K_2 &= K_1' + K_2' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1u_1 + m_2u_2 \quad (1) \\ &\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 \quad (2) \end{aligned}$$

Αυτές είναι δύο εξισώσεις για τους δύο αγνώστους u_1 και u_2. Όμως η δεύτερη είναι δευτέρου βαθμού. Μαζεύοντας μαζί τις μεταβλητές με δείκτη 1 στο αριστερό σκέλος και τις μεταβλητές με δείκτη 2 στο δεξί σκέλος κάθε εξίσωσης, διαιρώντας τις εξισώσεις μεταξύ τους και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα της διαφοράς τετραγώνων $\upsilon^2 - u^2 = (\upsilon - u)(\upsilon + u)$, βρίσκουμε μια τρίτη γραμμική εξίσωση που αντικαθιστά την δευτεροβάθμια.

$$\left.\begin{aligned} m_1\left(\upsilon_1^2 - u_1^2\right) &= m_2\left(u_2^2 - \upsilon_2^2\right) \quad (2) \\ m_1\left(\upsilon_1 - u_1\right) &= m_2\left(u_2 - \upsilon_2\right) \quad (1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\cancel{m_1\left(\upsilon_1 - u_1\right)}\left(\upsilon_1 + u_1\right)}{\cancel{m_1\left(\upsilon_1 - u_1\right)}} = \frac{\cancel{m_2\left(u_2 - \upsilon_2\right)}\left(u_2 + \upsilon_2\right)}{\cancel{m_2\left(u_2 - \upsilon_2\right)}} \Rightarrow \upsilon_1 + u_1 = u_2 + \upsilon_2 \quad (3)$$

Έτσι έχουμε τελικά δύο γραμμικές εξισώσεις (δηλ. πρώτου βαθμού) για τους δύο αγνώστους u_1 και u_2 , που λύνονται εύκολα.

$$\boxed{\begin{aligned} m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 &= m_1u_1 + m_2u_2 \quad (1) \\ \upsilon_1 + u_1 &= \upsilon_2 + u_2 \quad (3) \end{aligned}}$$

Είτε θυμόμαστε τον τύπο της λύσης της ελαστικής κρούσης για την u_1 απ'έξω :

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2 = \frac{3-1}{3+1}(1) + \frac{2 \cdot 1}{3+1}(-0{,}5) = 0{,}5 - 0{,}25 = 0{,}25 \text{ m/s}$$

είτε αντικαθιστούμε τα νούμερα και λύνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} 3(1) + 1(-0{,}5) &= 3u_1 + 1u_2 \quad (1) \\ 1 + u_1 &= -0{,}5 + u_2 \quad (3) \end{aligned}$$

Λύνουμε την (3) ως προς u_2 : $u_2 = 1{,}5 + u_1$ και την αντικαθιστούμε στην (1): $2{,}5 = 3u_1 + 1{,}5 + u_1$, για να βρούμε την u_1 : $2{,}5 = 3u_1 + 1{,}5 + u_1 \Rightarrow 4u_1 = 1 \Rightarrow u_1 = \dfrac{1}{4} = 0{,}25 \text{ m/s}$

Μετά από την (3) βρίσκουμε την u_2 :

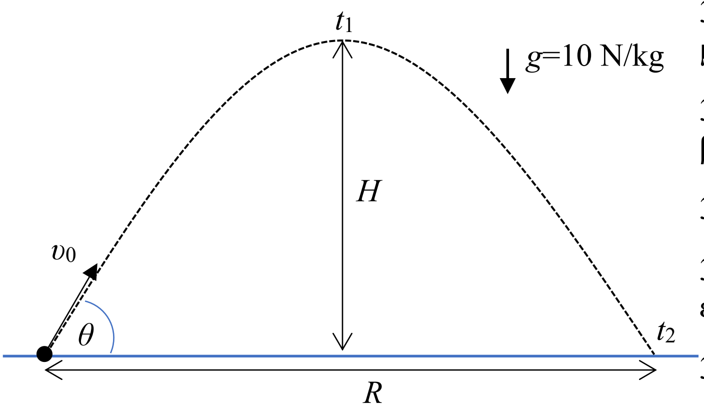
$$u_2 = \upsilon_1 + u_1 - \upsilon_2 = 1 + 0{,}25 - (-0{,}5) = 1{,}75 \text{ m/s}$$

2.3 Αφού η κρούση έγινε στη θέση ισορροπίας, το σώμα 1 θα ξεκινήσει από εκεί μια νέα ταλάντωση με το ίδιο ω, αλλά με νέα μέγιστη ταχύτητα u_1 και άρα νέο πλάτος:

$$u_1 = A_2\omega \Rightarrow A_2 = \frac{u_1}{\omega} = \frac{0,25}{10} = 0,025 = 2,5 \text{ cm}$$

ΘΕΜΑ 3ο [4]

Τη χρονική στιγμή t=0, βλήμα μάζας m=0,1 kg, εκτοξεύεται από μηδενικό ύψος (y_0=0), με αρχική ταχύτητα μέτρου υ_0= 100 m/s, υπό γωνία θ=65°, πάνω από οριζόντιο έδαφος. Αγνοώντας την αντίσταση του αέρα να βρείτε:



3.1 Τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία θα φτάσει στο μέγιστο ύψος

3.2 Το μέγιστο ύψος H και τη δυναμική ενέργεια του βλήματος εκεί

3.3 Την κινητική ενέργεια που έχει στο μέγιστο ύψος

3.4 Τη χρονική στιγμή t_2 στην οποία θα χτυπήσει στο έδαφος

3.5 Το βεληνεκές R.

ΛΥΣΗ

Εξισώσεις πλάγιας βολής:

$$\upsilon_x = \upsilon_0 \cos\theta = \sigma\tau\alpha\theta \quad (1) \qquad \upsilon_y = \upsilon_{0y} - gt \quad (2)$$

$$x = \upsilon_x t \quad (3) \qquad y = \upsilon_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (4)$$

$$\upsilon_x = \upsilon_0 \cos\theta = (100)(\cos 65^{\circ}) = (100)(0,422618) = 42,26 \text{ m/s}$$

$$\upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\theta = (100)(\sin 65^{\circ}) = (100)(0,906308) = 90,63 \text{ m/s}$$

Ενέργεια (διατηρείται) : $E = K + U = K_0 + U_0 = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 + mgy_0 = \frac{1}{2}(0,1)(100)^2 + (0,1)(10)(0) = 500 \text{ J}$

3.1 Όταν φτάσει στο μέγιστο ύψος η κατακόρυφη ταχύτητα γίνεται μηδέν. Από την (2) :

$$\upsilon_y = 0 \Rightarrow\ 0 = \upsilon_{0y} - gt_1 \Rightarrow t_1 = \frac{\upsilon_{0y}}{g} = \frac{90,63}{10} = 9,063 \text{ s}$$

3.2 Από την (4) βρίσκουμε το y εκείνη τη στιγμή, το οποίο είναι το μέγιστο ύψος

$$H = y(t_1) \Rightarrow H = \upsilon_{0y}t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = \upsilon_{0y}\frac{\upsilon_{0y}}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{\upsilon_{0y}}{g}\right)^2 = \frac{\upsilon_{0y}^2 - \upsilon_{0y}^2/2}{g} = \frac{\upsilon_{0y}^2}{2g} = \frac{90,63^2}{2(10)} = 410,7 \text{ m}$$

Η δυναμική ενέργεια είναι : $U = mgy \Rightarrow U_{top} = mgH = (0,1)(10)(410,7) = 410,7 \text{ J}$.

3.3 Στο μέγιστο ύψος η ταχύτητα έχει μόνο οριζόντια (x) συνιστώσα.

$$K_{top} = \frac{1}{2}m\upsilon_{0x}^2 = \frac{1}{2}(0,1)(42,26)^2 = 89,3 \ \text{(SI)}$$

Ή από την ενέργεια : $E = K_{top} + U_{top} \Rightarrow K_{top} = E - U_{top} = 500 - 410,7 = 89,3 \text{ J}$

3.4 Όταν το βλήμα χτυπήσει στο έδαφος, το y θα είναι μηδέν

$$y(t_2) = 0 \Rightarrow \upsilon_{0y}t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2 = 0 \Rightarrow \left(\upsilon_{0y} - \frac{1}{2}gt_2\right)t_2 = 0 \Rightarrow \upsilon_{0y} - \frac{1}{2}gt_2 = 0 \Rightarrow t_2 = \frac{2\upsilon_{0y}}{g} = 2t_1 = 2(9,063) = 18,126 \text{ s}$$

3.5 Από την (3) βρίσκουμε το x εκείνη τη στιγμή, που είναι το βεληνεκές

$$R = x(t_2) \Rightarrow R = \upsilon_x t_2 = (42,26)(18,126) = 766 \text{ m}$$