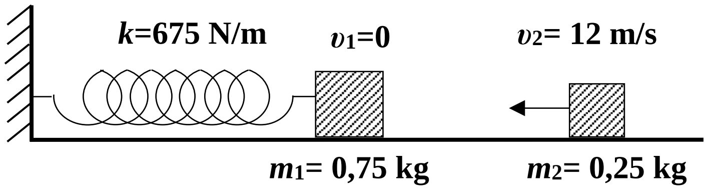
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2022-23

ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ (ΤΕ)

Τρίτη, 5 Σεπτεμβρίου 2023, 10:00-11:30, αίθουσα ΒΠ1_11, ΒΠ1_12 ΖΕΠ
Εισηγητής: Κώστας Φιλιππίδης (kphilippides@uowm.gr)

ΘΕΜΑ 1ο [3]

Το σώμα 1 που είναι συνδεδεμένο με το ελατήριο ισορροπεί ακίνητο, με το ελατήριο στο φυσικό του μήκος. Το δάπεδο είναι λείο. Τα δύο σώματα συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά.



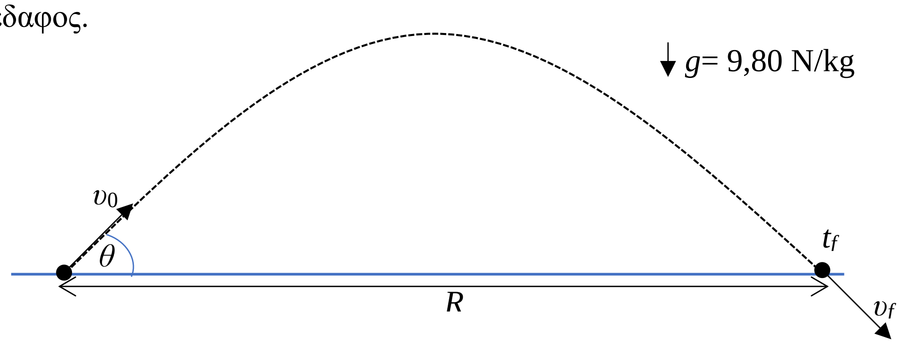
Να βρείτε :

1.1 Την ταχύτητα u_2 του σώματος 2, μετά την κρούση [1]

1.2 Το πλάτος *A* της ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα 1 μετά την κρούση [2]

ΘΕΜΑ 2ο [3]

Τη χρονική στιγμή t=0, βλήμα εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα μέτρου υ_0= 20 m/s, υπό γωνία θ=40^o πάνω από οριζόντιο έδαφος.



Αγνοώντας την αντίσταση του αέρα να υπολογίσετε:

2.1 Τη χρονική στιγμή t_f στην οποία θα χτυπήσει στο έδαφος

2.2 Το μέτρο της ταχύτητας με την οποία προσκρούει στο έδαφος

2.3 Το βεληνεκές *R*.

ΘΕΜΑ 3ο [4]

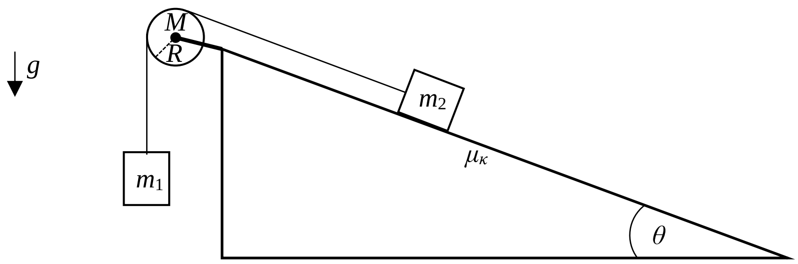
Το κεκλιμένο δάπεδο δεν είναι λείο. Η τροχαλία περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από κάθετο άξονα που περνάει από το κέντρο της ενώ το νήμα είναι μη εκτατό και δεν γλιστράει πάνω της αλλά γυρνάει μαζί της.

Αριθμητικά δεδομένα: θ= 16^o, M= 2 kg, $I_{τροχ} = \frac{1}{2}MR^2$, m_1= 10 kg, m_2= 26 kg, μ_κ= 0,1 , g= 9,80 N/kg

3.1 Να μεταφέρετε το παρακάτω σχήμα στο γραπτό σας, να επιλέξετε μια αυθαίρετη φορά για την επιτάχυνση με την οποία θα κινηθούν τα σώματα και να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που δρουν πάνω στα σώματα 1 και 2 και τις δυνάμεις που προκαλούν περιστροφή στην τροχαλία [1]

3.2 Να γράψετε τις εξισώσεις του 2ου νόμου του Νεύτωνα για τη μεταφορική κίνηση των σωμάτων 1 και 2 και την περιστροφική κίνηση της τροχαλίας και να κάνετε τις απαραίτητες απλοποιήσεις στην τελευταία εξίσωση ώστε να απαλειφθεί η ακτίνα της τροχαλίας *R* [0,8]

3.3 Να λύσετε τις παραπάνω 3 εξισώσεις και να βρείτε: την επιτάχυνση των σωμάτων [1] και τις τάσεις στα δύο τμήματα του νήματος [1]. Προς τα πού θα επιταχυνθεί το σώμα 1; Προς τα πάνω ή προς τα κάτω; [0,2]



ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα 1ο

1.1

Μπορούν να χρησιμοποιηθούν κατευθείαν οι τύποι της ελαστικής κρούσης βλήματος με ταχύτητα υ_2 σε ακίνητο στόχο ($\upsilon_1 = 0$):

$$u_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_2 = \frac{0,25 - 0,75}{0,75 + -0,25}(12) = -\frac{0,50}{1,00}(12) = -6 \text{ m/s} \qquad \text{προς τα δεξιά}$$

$$u_1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2 = \frac{2(0,25)}{0,75 + 0,25}(12) = +6 \text{ m/s} \qquad \text{προς τα αριστερά}$$

Αλλιώς πρέπει να επιλυθεί το δευτεροβάθμιο σύστημα που προκύπτει από την διατήρηση της ορμής (1) και την διατήρηση της κινητικής ενέργειας (2):

$$\left.\begin{array}{ll} m_2\upsilon_2 = m_1u_1 + m_2u_2 & (1) \\ \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 & (2) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} (0,25)(12) = 0,75u_1 + 0,25u_2 & (1) \\ (0,25)(12)^2 = 0,75u_1^2 + 0,25u_2^2 & (2) \end{array}$$

Όλα επί 4

$12 = 3u_1 + u_2 \qquad (1)$

$144 = 3u_1^2 + u_2^2 \qquad (2)$

Λύνουμε την (1) ως προς u_2 και αντικαθιστούμε στην (2)

$u_2 = 12 - 3u_1 \qquad (1)$

$144 = 3u_1^2 + \left(12 - 3u_1\right)^2 \qquad (2)$

Οι πράξεις στη δευτεροβάθμια είναι :

$$144 = 3u_1^2 + \left(12 - 3u_1\right)^2 \Rightarrow \cancel{144} = 3u_1^2 + \cancel{144} - 72u_1 + 9u_1^2 \Rightarrow 12u_1^2 - 72u_1 = 0 \Rightarrow 12u_1(u_1 - 6) = 0$$

Άρα $u_1 = 0$ που απορρίπτεται (μη κρούση) ή $u_1 = +6$ m/s

Αντικαθιστώντας στην (1) βρίσκουμε και την u_2: $12 = 3u_1 + u_2 \Rightarrow 12 = 3(6) + u_2 \Rightarrow u_2 = 12 - 18 = -6$ m/s

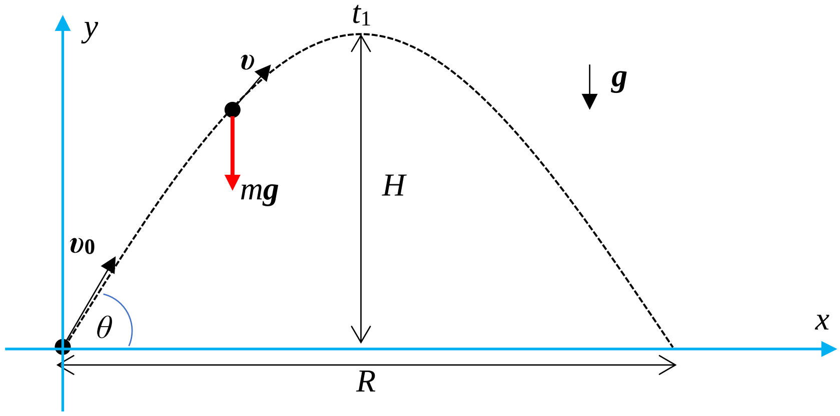
1.2

Στην απλή αρμονική ταλάντωση η ενέργεια διατηρείται. Το σώμα 1 θα φτάσει στη μέγιστη απομάκρυνση (πλάτος) από το σημείο ισορροπίας όταν το ελατήριο θα το σταματήσει. Τότε όλη η αρχική του κινητική ενέργεια θα έχει γίνει δυναμική ενέργεια του ελατηρίου. Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου δίνεται από τον τύπο $U_{\varepsilon\lambda\alpha\tau}(x) = \frac{1}{2}kx^2$

$$K_0 + U_{\varepsilon\lambda\alpha\tau}(0) = K_A + U_{\varepsilon\lambda\alpha\tau}(A) \Rightarrow \frac{1}{2}m_1u_1^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow A = u_1\sqrt{\frac{m_1}{k}} = 6\sqrt{\frac{0,75}{675}} = 0,20 \text{ m}$$

Θέμα 2ο

Πλάγια βολή.



Στην οριζόντια διεύθυνση, όπου δεν υπάρχει καμία δύναμη, το βλήμα κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα $\upsilon_x = \upsilon_0 \cos\theta = (20)(\cos 40^o) = 15,32$ m/s

Στην κατακόρυφη διεύθυνση όπου υπάρχει η σταθερή δύναμη του βάρους προς τα κάτω, το βλήμα κάνει ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση (κατακόρυφη βολή) με σταθερή επιτάχυνση αντίθετη της αρχικής του ταχύτητας: $a = \dfrac{F_{net\,y}}{m} = \dfrac{-mg}{m} = -g = -9,80\ \text{m/s}^2$ και αρχική ταχύτητα

$\upsilon_{y0} = \upsilon_0 \sin\theta = (20)(\sin 40^o) = 12,85575 = 12,86$ m/s

Οπότε ισχύουν οι εξισώσεις :	$\upsilon_x = \upsilon_0 \cos\theta = \sigma\tau\alpha\theta$ (1) $\quad \upsilon_y = \upsilon_{y0} - gt$ (2) $x = \upsilon_x t$ (3) $\quad y = \upsilon_{y0} t - \frac{1}{2} g t^2$ (4)

2.1 Θέτοντας $y = 0$ στην (4) βρίσκουμε το χρόνο πτήσης t_f :

$$y = \upsilon_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow\ 0 = \upsilon_0 t_f - \frac{1}{2} g t_f^2 \Rightarrow\ t_f = \frac{2\upsilon_{0y}}{g} = \frac{2\upsilon_0 \sin\theta}{g} = \frac{2(20)\sin 40^o}{9,80} = 2,62362 \simeq 2,62 \text{ s}$$

2.2 Ο πιο γρήγορος τρόπος να βρούμε το μέτρο της ταχύτητας είναι να χρησιμοποιήσουμε διατήρηση της ενέργειας. Η δυναμική ενέργεια της βαρύτητας κοντά στην επιφάνεια της Γης εξαρτάται από την απομάκρυνση από το έδαφος και δίνεται από τον τύπο $U_{\beta\alpha\rho}(y) = mgy$. Άρα είναι μηδέν και την αρχική στιγμή της εκτόξευσης και την τελική στιγμή της πρόσκρουσης στο έδαφος αφού και τις δύο φορές $y = 0$. Οπότε το μέτρο της ταχύτητας πρόσκρουσης θα είναι το ίδιο με το μέτρο της ταχύτητας εκτόξευσης.

$$K_0 + U_0 = K_f + U_f \Rightarrow \frac{1}{2} m\upsilon_0^2 + mg0 = \frac{1}{2} m\upsilon_f^2 + mg0 \Rightarrow \upsilon_0^2 = \upsilon_f^2 \Rightarrow \upsilon_f = \upsilon_0 = 20 \text{ m/s}$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε το μέτρο $\upsilon_f = |\vec{\upsilon}_f| = \sqrt{\upsilon_{f\,x}^2 + \upsilon_{f\,y}^2}$ και από τις κινηματικές σχέσεις των συνιστωσών της ταχύτητας (1) και (2)

Η *x* συνιστώσα παραμένει σταθερή $\upsilon_{fx} = \upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\theta$, ενώ η *y* συνιστώσα προκύπτει να έχει την αντίθετη τιμή από την αρχική $\upsilon_{fy} = \upsilon_{0y} - gt_f = \upsilon_{0y} - g\dfrac{2\upsilon_{0y}}{g} = \upsilon_{0y} - 2\upsilon_{0y} = -\upsilon_{0y}$

Οπότε όταν προσθέσουμε τα τετράγωνα θα πάρουμε την ίδια τιμή με την αρχική

$$\upsilon_f = |\vec{\upsilon}_f| = \sqrt{\upsilon_{fx}^2 + \upsilon_{fy}^2} = \sqrt{\upsilon_{0x}^2 + (-\upsilon_{0y})^2} = \sqrt{\upsilon_{0x}^2 + \upsilon_{0y}^2} = \upsilon_0$$

Με νούμερα

$\upsilon_{x\,f} = 15,32$ m/s $\quad$ και $\quad \upsilon_{y\,f} = \upsilon_{y0} - gt_f = 12,85575 - (9,80)(2,62362) = -12,85573 = -12,86$ m/s

$$\upsilon_f = |\vec{\upsilon}_f| = \sqrt{\upsilon_{f\,x}^2 + \upsilon_{f\,y}^2} = \sqrt{(15,32)^2 + (-12,86)^2} = \sqrt{234,7024 + 165,3796} = \sqrt{400,082} = 20,002 \simeq 20 \text{ m/s}$$

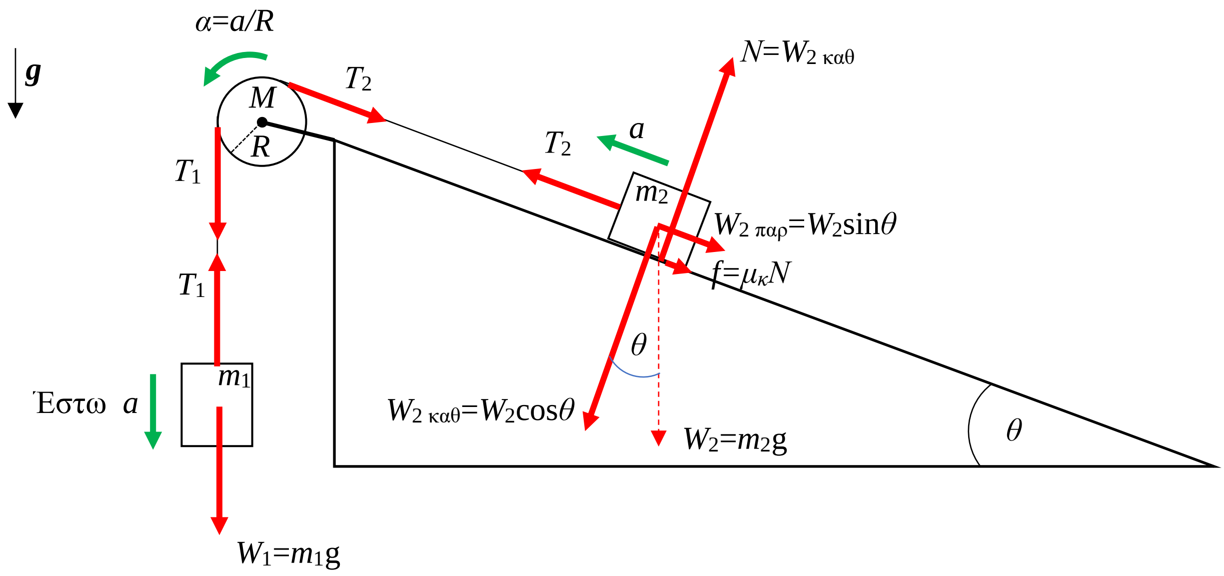
2.3

Θέτοντας $t = t_f$ στην (3) βρίσκουμε το βεληνεκές

$$x = \upsilon_{0x} t \Rightarrow R = \upsilon_0 \cos\theta \cdot\ t_f = \upsilon_0 \cos\theta \frac{2\upsilon_0 \sin\theta}{g} \Rightarrow \quad R = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\theta}{g} = \frac{(20)^2 (\sin 80^o)}{9,80} = 40,20 \text{ m}$$

Θέμα 3ο

3.1



3.2

Επειδή το νήμα είναι στην περίμετρο της τροχαλίας και δεν γλιστράει πάνω της, η γραμμική (επιτρόχια) επιτάχυνση των σημείων της περιμέτρου θα είναι ίση με αυτήν των σημείων του νήματος που είναι ίση με την επιτάχυνση των σωμάτων 1 και 2 επειδή το νήμα είναι μη εκτατό: $a_{\gamma\rho\alpha\mu} = a \Rightarrow \alpha R = a$

$$m_1 g - T_1 = m_1 a \quad (1)$$

$$T_2 - m_2 g\sin\theta - \mu_\kappa m_2 g\cos\theta = m_2 a \quad (2)$$

$$T_1 R - T_2 R = I\alpha \Rightarrow (T_1 - T_2)\cancel{R} = \frac{1}{2}M\cancel{R}^{\cancel{2}}\frac{a}{\cancel{R}} \Rightarrow T_1 - T_2 = \frac{1}{2}Ma \quad (3)$$

3.3

$$(1)+(2)+(3):\; m_1 g - \cancel{T_1} + \cancel{T_2} - m_2 g\sin\theta - \mu_\kappa m_2 g\cos\theta + \cancel{T_1} - \cancel{T_2} = m_1 a + m_2 a + \frac{1}{2}Ma$$

$$a = g\,\frac{m_1 - m_2(\sin\theta + \mu_\kappa\cos\theta)}{m_1 + m_2 + M/2} = 9{,}8\,\frac{10 - 26[\sin(16^o) + 0{,}1\cos(16^o)]}{10 + 26 + 2/2} = 0{,}088504 \simeq 0{,}089\ \text{m/s}^2$$

Η επιτάχυνση βγήκε θετική άρα η φορά της είναι όπως στο σχήμα και το σώμα 1 θα επιταχυνθεί προς τα κάτω και θα τραβήξει το σώμα 2 προς τα πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο. Αν έβγαινε αρνητική θα συνέβαινε το αντίθετο.

$$(1):\; T_1 = m_1(g - a) = 10(9{,}8 - 0{,}0885) = 97{,}11496 \simeq 97{,}115\ \text{N}$$

$$(2):\; T_2 = m_2(a + g(\sin\theta + \mu_\kappa\cos\theta)) = 97{,}02645 \simeq 97{,}026\ \text{N}$$

$$\text{Έλεγχος (3)}:\; T_1 - T_2 = \frac{1}{2}Ma \Rightarrow 97{,}115 - 97{,}026 = \frac{1}{2}2\cdot\ 0{,}089 \Rightarrow\ 0{,}089 = 0{,}089\ \ \text{OK}$$