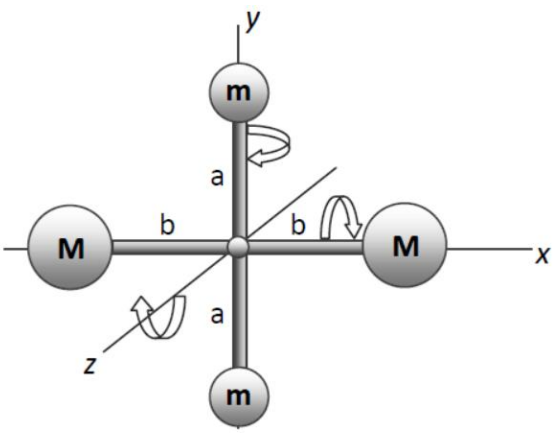
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑΤΑ: ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ και ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΑΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2021-22

ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ (ΤΕ)

Τετάρτη, 15 Ιουνίου 2022, 16:30-18:30 αιθ. 2104
Εισηγητής: Κώστας Φιλιππίδης (kphilippides@uowm.gr)

Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα και αξίας 2,5 μονάδων. $\boxed{g = 9{,}80 \text{ N/kg}}$

ΘΕΜΑ 1.



Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα σύστημα 4 μαζών που συνδέονται με άκαμπτες αβαρείς ράβδους. m=5 kg, M=10 kg, a=b=40 cm

1) Υπολογίστε τις ροπές αδράνειας I_x, I_y και I_z για περιστροφή γύρω από τους αντίστοιχους ορθογώνιους άξονες x, y και z.

2) Υπολογίστε τη ροπή (σε N·m) που πρέπει να ασκεί ένας κινητήρας προσαρμοσμένος στον άξονα z για να επιταχύνει το σύστημα σε ταχύτητα 1800 rpm (στροφές το λεπτό) μέσα σε 4 s.

1 rpm = revolution per minute = $=\dfrac{2\pi}{60}$ rad/s

Λύση

1.1 r_{ix} είναι η απόσταση της μάζας i από τον άξονα x. Π.χ. : $r_{mx} = a, \quad r_{Mx} = 0$

$$I_x = \sum_{i=1}^{4} m_i r_{ix}^2 = ma^2 + ma^2 + M\cdot 0^2 + M\cdot 0^2 = 2ma^2 = 2(5)(0,4)^2 = 1,6 \text{ kg}\cdot \text{m}^2$$

Παρομοίως : $I_y = \sum_{i=1}^{4} m_i r_{iy}^2 = m\cdot 0^2 + m\cdot 0^2 + Mb^2 + Mb^2 = 2Mb^2 = 2(10)(0,4)^2 = 3,2 \text{ kg}\cdot \text{m}^2$

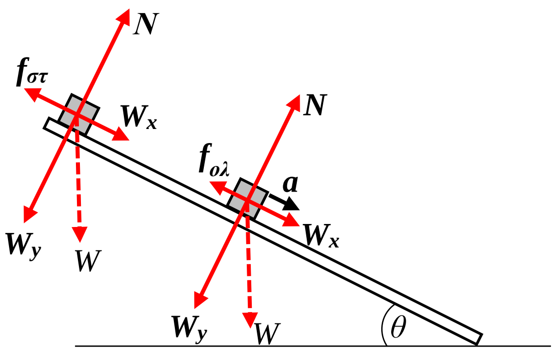
$$I_z = \sum_{i=1}^{4} m_i r_{ix}^2 = ma^2 + ma^2 + Mb^2 + Mb^2 = 2ma^2 + 2Mb^2 = 2(5)(0,4)^2 + 2(10)(0,4)^2 = 4,8 \text{ kg}\cdot \text{m}^2$$

1.2 $\omega_{\tau\varepsilon\lambda} = n_{\tau\varepsilon\lambda}\dfrac{2\pi}{60} = 1800\dfrac{2\pi}{60} = 60\pi \text{ rad/s}$

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_{\tau\varepsilon\lambda} - \omega_{\alpha\rho\chi}}{\Delta t} = \frac{60\pi - 0}{4} = 15\pi \text{ rad/s}^2$$

$$\tau_z = I_z\alpha = (4,8)(15\pi) = 226,2 \text{ N}\cdot \text{m}$$

ΘΕΜΑ 2.



Κύβος από αλουμίνιο ισορροπεί πάνω σε κεκλιμένο φύλλο χάλυβα του οποίου αυξάνουμε λίγο λίγο τη γωνία κλίσης.

1) Σε ποια γωνία θ, ο κύβος μόλις και θα αρχίσει να ολισθαίνει;
(συντελεστής στατικής τριβής αλουμινίου-χάλυβα=0,61)

2) Αφού αρχίσει να ολισθαίνει ο κύβος στη γωνία που βρήκατε στο ερώτημα 1, με τι επιτάχυνση a, θα κινείται;
(συντελεστής τριβής ολίσθησης αλουμινίου-χάλυβα=0,47)

Λύση

2.1 Κατάργηση ισορροπίας και έναρξη ολίσθησης όταν η γωνία θ μόλις και υπερβεί την τιμή όπου οι δυνάμεις ισορροπούν:

$$\left.\begin{array}{l}\sum F_x \geq 0 \Rightarrow W_x \geq f_{\sigma\tau,\max} \Rightarrow mg\sin\theta = \mu_{\sigma\tau} N \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow W_y = N \Rightarrow mg\cos\theta = N\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\cancel{mg}\sin\theta}{\cancel{mg}\cos\theta} \geq \frac{\mu_{\sigma\tau}\cancel{N}}{\cancel{N}} \Rightarrow \tan\theta \geq \mu_{\sigma\tau} \Rightarrow$$

$$\boxed{\theta_{o\rho} = \tan^{-1}\left(\mu_{\sigma\tau}\right) = \tan^{-1}\left(0,61\right) = 31,38^{o}}$$

2.2 Αφού χαθεί η ισορροπία και ξεκινήσει η ολίσθηση, η τριβή μετατρέπεται σε τριβή ολίσθησης και άρα ελαττώνεται. Εφαρμόζουμε το 2^{o} νόμο του Νεύτωνα για να βρούμε την επιτάχυνση κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου.

Κάθετα στο κεκλιμένο επίπεδο ο κύβος συνεχίζει να ισορροπεί:

$\sum F_y = 0 \Rightarrow N = W_y \Rightarrow N = mg\cos\theta_{o\rho}$

Κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου υπάρχει συνισταμένη δύναμη $\sum F_x \neq 0$ που προκαλεί επιτάχυνση, επειδή πλέον $W_x = f_{\sigma\tau,\max} > f_{o\lambda}$

$$a = \frac{\sum F_x}{m} = \frac{W_x - f_{o\lambda}}{m} = \frac{mg\sin\theta_{o\rho} - \mu_{o\lambda} N}{m} = \frac{\cancel{m}g\sin\theta_{o\rho} - \mu_{o\lambda}\cancel{m}g\cos\theta_{o\rho}}{\cancel{m}} \Rightarrow$$

$$a = g(\sin\theta_{o\rho} - \mu_{o\lambda}\cos\theta_{o\rho}) = (9,8)[\sin(31,38^{o}) - (0,47)\cos(31,38^{o})] = 1,17\ \mathrm{m/s^2}$$

$$\boxed{a = 1,17\ \mathrm{m/s^2}}$$

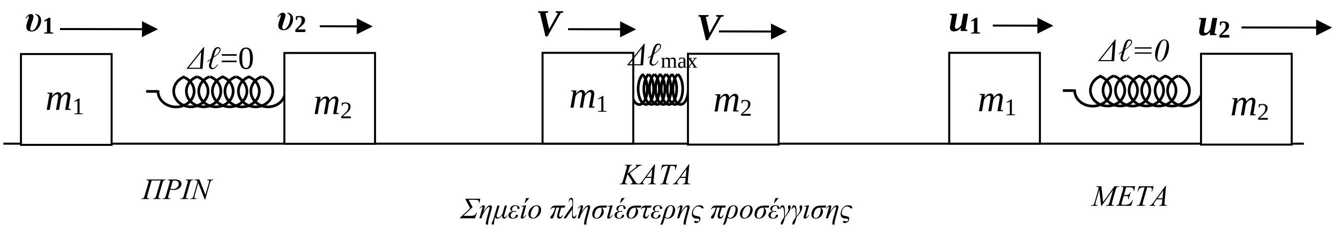
Ή

$$a = \frac{\sum F_x}{m} = \frac{W_x - f_{o\lambda}}{m} = \frac{f_{\sigma\tau,max} - f_{ol}}{m} = \frac{\mu_{\sigma\tau} N - \mu_{o\lambda} N}{m} = \frac{(\mu_{\sigma\tau} - \mu_{o\lambda})\cancel{m}g\cos\theta_{o\rho}}{\cancel{m}} \Rightarrow$$

$$a = g(\mu_{\sigma\tau} - \mu_{o\lambda})\cos\theta_{o\rho} = (9,8)(0,61 - 0,47)\cos(31,38^{o}) = 1,17\ \mathrm{m/s^2}$$

ΘΕΜΑ 3.

Τα σώματα του σχήματος ολισθαίνουν χωρίς τριβή στο οριζόντιο δάπεδο και συγκρούονται ελαστικά λόγω του ελατηρίου. m_1= 3 kg, υ_1= 3,6 m/s, m_2= 1,5 kg, υ_2= 1,8 m/s, k= 400 N/m.



1) Να βρείτε τις ταχύτητες των μαζών u_1 και u_2 μετά την κρούση

2) Να βρείτε η μέγιστη συσπείρωση $\Delta\ell_{\max}$ του ελατηρίου κατά την κρούση.

Λύση

3.1 Το σύστημα των δύο σωμάτων είναι απομονωμένο αφού πρώτον δεν υπάρχουν τριβές και δεύτερον εφόσον τα σώματα κινούνται οριζόντια οι μόνες άλλες εξωτερικές δυνάμεις των βαρών από τη Γη και των κάθετων αντιδράσεων από το δάπεδο αλληλοαναιρούνται. Οι δυνάμεις μεταξύ των δύο σωμάτων είναι εσωτερικές (δράση-αντίδραση) μέσω του ελατηρίου. Άρα η ολική ορμή του συστήματος των δύο σωμάτων θα διατηρείται πριν, κατά τη διάρκεια και μετά την κρούση τους:

$$p_{\pi\rho\iota\nu} = p_{\kappa\alpha\tau\acute{\alpha}} = p_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} = \sigma\tau\alpha\theta.$$

όπου

$$p = p_1 + p_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

Η εσωτερική δύναμη του ελατηρίου είναι διατηρητική άρα κατά την κρούση διατηρείται και η μηχανική ενέργεια του συστήματος (κινητική σωμάτων και δυναμική ελατηρίου):

$$E_{πριν} = E_{κατά} = E_{μετά} = σταθ.$$

όπου

$$E = K_1 + K_2 + U_{ελατηρ} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}k\Delta\ell^2$$

Κατά τη διάρκεια της κρουσης το ελατήριο συμπιέζεται οπότε έχει δυναμική ενέργεια ($\Delta\ell \neq 0$) ενώ πριν και μετά την κρούση το ελατήριο δεν είναι συσπειρωμένο ($\Delta\ell = 0$) άρα η δυναμική ενέργεια είναι μηδέν και όλη η ενέργεια του συστήματος είναι κινητική. Άρα η αρχική κινητική ενέργεια είναι ίση με την τελική.
Οπότε έχουμε κεντρική ελαστική κρούση και χρησιμοποιούμε κατευθείαν τους τύπους :

$$\left.\begin{aligned} p_1 + p_2 &= p_1' + p_2' \\ K_1 + K_2 &= K_1' + K_2' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 &= m_1u_1 + m_2u_2 \\ \upsilon_1 + u_1 &= \upsilon_2 + u_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} u_1 &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2 \\ u_2 &= \upsilon_1 + u_1 - \upsilon_2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &u_1 = \frac{3-1,5}{3+1,5}(3,6) + \frac{2\cdot\ 1,5}{3+1,5}(1,8) = \frac{1}{3}(3,6) + \frac{2}{3}(1,8) = 2,4 \ \text{m/s} \ \text{μείωση ταχύτητας} \\ &u_2 = \upsilon_1 + u_1 - \upsilon_2 = 3,6 + 2,4 - 1,8 = 4,2 \ \text{m/s αύξηση ταχύτητας} \end{aligned}}$$

3.2 Διατήρηση ορμής μεταξύ της αρχικής στιγμής και της στιγμής που τα σώματα αποκτούν κοινή ταχύτητα και άρα το ελατήριο αποκτά μέγιστη συσπείρωση:

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1V + m_2V \Rightarrow V = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2} = \frac{3\cdot 3,6 + 1,5\cdot 1,8}{3 + 1,5} = \frac{13,5}{4,5} = 3,0 \ \text{m/s}$$

Αυτή είναι και η ταχύτητα του κέντρου μάζας του συστήματος

$$V_{CM} = \frac{p}{M} = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2} = 3,0 \ \text{m/s}$$

Από διατήρηση ενέργειας μεταξύ της αρχικής στιγμής και της στιγμής που το ελατήριο αποκτά μέγιστη συσπείρωση και τα σώματα έχουν κοινή ταχύτητα V, παίρνουμε:

$$K_1 + K_2 + U_{ελατηρ} = K_1' + K_2' + U_{ελατηρ}' \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 + 0 = \frac{1}{2}m_1V^2 + \frac{1}{2}m_2V^2 + \frac{1}{2}k\Delta\ell_{\max}^2 \Rightarrow k\Delta\ell_{\max}^2 = m_1\upsilon_1^2 + m_2\upsilon_2^2 - (m_1 + m_2)V^2 \Rightarrow$$

$$400\Delta\ell_{\max}^2 = 3\cdot\ 3,6^2 + 1,5\cdot\ 1,8^2 - 4,5\cdot\ 3^2 = 3,24 \Rightarrow \Delta\ell_{\max}^2 = \frac{3,24}{400} = 0,0081 \Rightarrow$$

$$\boxed{\Delta\ell_{\max} = 0,09 \ \text{m}}$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα φτάνουμε και αν γράψουμε την κινητική ενέργεια σαν το άθροισμα της κινητικής ενέργειας του κέντρου μάζας (που δεν αλλάζει) και της κινητικής ενέργειας της σχετικής τους κίνησης. Όταν τα σώματα αλληλεπιδρουν μέσω της δύναμης του ελατηρίου μόνο η σχετική τους ταχύτητα αλλάζει.Το ένα επιβραδύνει και το άλλο επιταχύνει. Όταν οι ταχύτητές τους γίνουν ίσες τότε η σχετική τους ταχύτητα είναι μηδέν και το ελατήριο αποκτά τη μέγιστη συσπείρωση. Αυτό είναι το σημείο μέγιστης προσέγγισης (ΜΠ) των δύο σωμάτων.

$$E = K + U_{ελ} = K_{CM} + K_{σχετ} + U_{ελ} = \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2}\mu\upsilon_{σχετ}^2 + \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 = σταθ$$

όπου M είναι η ολική μάζα και μ η λεγόμενη ανηγμένη μάζα

$$M = m_1 + m_2 \ , \quad \mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$$

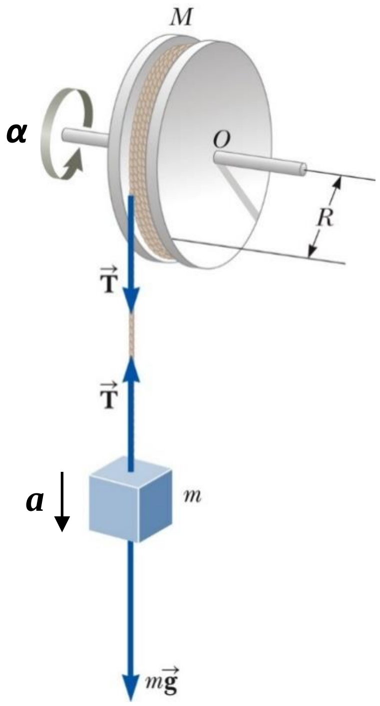
Ετσι παίρνουμε :

$$E_{\pi\rho\iota\nu} = E_{\text{ΜΠ}} \Rightarrow K_{CM\,\pi\rho\iota\nu} + K_{\sigma\chi\varepsilon\tau\ \pi\rho\iota\nu} + U_{\varepsilon\lambda\ \text{πριν}} = K_{CM\ \text{ΜΠ}} + K_{\sigma\chi\varepsilon\tau\ \text{ΠΜ}} + U_{\varepsilon\lambda\ \text{ΜΠ}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)V_{CM}^2 + \frac{1}{2}\mu\upsilon_{\sigma\chi\varepsilon\tau}^2 + 0 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)V_{CM}^2 + 0 + \frac{1}{2}k\Delta\ell_{\max}^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\mu\upsilon_{\sigma\chi\varepsilon\tau}^2 = \frac{1}{2}k\Delta\ell_{\max}^2 \Rightarrow \Delta\ell_{\max}^2 = \frac{\mu}{k}\upsilon_{\sigma\chi\varepsilon\tau}^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\frac{1}{k}(\upsilon_1-\upsilon_2)^2 \Rightarrow$$

$$\Delta\ell_{\max}^2 = \frac{1{,}5\cdot 3}{1{,}5+3}\cdot\frac{1}{400}(3{,}6-1{,}8)^2 = \frac{1}{400}1{,}8^2 = \frac{1{,}8^2}{20^2} \Rightarrow \Delta\ell_{\max} = \frac{1{,}8}{20} = 0{,}09\ \text{m}$$



ΘΕΜΑ 4.

Το σύστημα αφήνεται από την ηρεμία όταν το βαρίδιο βρίσκεται σε ύψος h = 14 m πάνω από το έδαφος. Το νήμα είναι αβαρές και μη εκτατό και ξετυλίγεται χωρίς να γλιστράει ενώ η τροχαλία περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από τον σταθερό άξονα που περνάει από το κέντρο της Ο.

m= 10 kg, M= 8 kg, $I_O = \frac{1}{2}MR^2$

Η ακτίνα της τροχαλίας δεν δίνεται επειδή δεν χρειάζεται στα επόμενα ερωτήματα (απλοποιείται)

1) Τι ταχύτητα έχει το βαρίδιο όταν έχει κατέβει 3,5 m ;

2) Τι κινητική ενέργεια έχει η τροχαλία την ίδια στιγμή ;

3) Πότε το βαρίδιο φτάνει στο έδαφος ;

Αφού το νήμα ξετυλίγεται χωρίς να ολισθαίνει η γραμμική επιτάχυνση των σημείων της περιμέτρου της τροχαλίας $a_{\gamma\rho\alpha\mu} = \alpha R$ είναι ίση με την επιτάχυνση a του βαριδίου.

$$a = a_{\gamma\rho\alpha\mu} \Rightarrow a = \alpha R \Rightarrow \alpha = \frac{a}{R}$$

Με την ίδια σχέση συνδέεται και η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας με την ταχύτητα του βαριδίου

$$\upsilon = \upsilon_{\gamma\rho\alpha\mu} \Rightarrow \upsilon = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{\upsilon}{R}$$

Για τον ίδιο λόγο το μήκος του τόξου που έχει ξετυλιχτεί το νήμα είναι ίσο με την κατακόρυφη μετατόπιση του βαριδίου

$$y = s \Rightarrow y = \theta R \Rightarrow \theta = \frac{y}{R}$$

Γράφουμε το 2ο νόμο του Νεύτωνα (θεμελιώδης νόμος μηχανικής) στην κατάλληλη μορφή για τα δύο σώματα

Μεταφορική βαριδίου: $\sum F = ma \Rightarrow B - T = ma \quad (1)$

Στροφική κίνηση τροχαλίας : $\sum \tau = I\alpha_\omega \Rightarrow TR = \frac{1}{2}MR^2\cdot\frac{a}{R} \Rightarrow T = \frac{1}{2}Ma \quad (2)$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) βρίσκουμε την a και

$$(1)+(2):\ B - T + T = ma + \frac{1}{2}Ma \Rightarrow mg = a\cdot\left(m+\frac{M}{2}\right) \Rightarrow a = \frac{mg}{m+\frac{M}{2}} \Rightarrow a = \frac{(10)(9{,}8)}{10+\frac{8}{2}} = \frac{98}{14} = 7\ \text{m/s}^2$$

Αντικαθιστώντας στην (2) θα μπορούσαμε να βρούμε και την τάση του νήματος T που δεν ζητείται.

$T = \frac{1}{2} Ma = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28\ \text{N}$

Η κατακόρυφη κίνηση του βαριδίου είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη και περιγράφεται από τις εξισώσεις : $y = \frac{1}{2} at^2$, $\upsilon = at$, $\upsilon^2 = 2ay$

Η περιστροφή της ράβδου είναι ομαλά επιταχυνόμενη και περιγράφεται από τις εξισώσεις :

$\theta = \frac{1}{2} \alpha t^2$, $\omega = \alpha t$, $\omega^2 = 2\alpha\theta$

Οπότε για y= 3,5 m : $\upsilon^2 = 2ay = 2(7)(3,5) = 49 \Rightarrow$

$$\boxed{\upsilon = 7\ \text{m/s}}$$

$$K_{τροχ} = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2} MR^2 \left(\frac{\upsilon}{R}\right)^2 = \frac{1}{4} M\upsilon^2 = \frac{1}{4}(5)(49) \Rightarrow$$

$$\boxed{K_{τροχ} = 61,25\ \text{J}}$$

Το βαρίδιο φτάνει στο έδαφος όταν $y=h$:

$$y = \frac{1}{2} at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2(14)}{7}} \Rightarrow$$

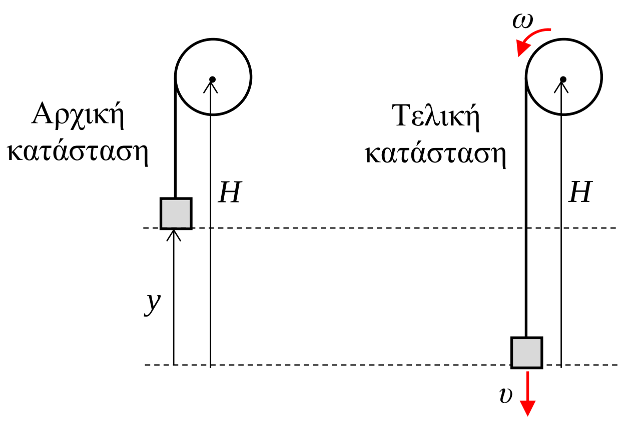
$$\boxed{t = 2\ \text{s}}$$

Την ταχύτητα του βαριδίου θα μπορούσαμε να την βρούμε και από τη διατήρηση της ενέργειας χωρίς να ξέρουμε την επιτάχυνση. Θέτουμε το μηδέν της δυναμικής ενέργειας στα 3,5 m κάτω από την αρχική θέση του βαριδίου. Έστω ότι το κέντρο της τροχαλίας απέχει από αυτό το σημείο κατακόρυφη απόσταση H.

$$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow K_{βαρ,αρχ} + U_{βαρ,αρχ} + K_{τροχ,αρχ} + U_{τροχ,αρχ} = K_{βαρ,τελ} + U_{βαρ,τελ} + K_{τροχ,τελ} + U_{τροχ,τελ} \Rightarrow$$

$$0 + mgy + 0 + \cancel{MgH} = \frac{1}{2} m\upsilon^2 + 0 + \frac{1}{2} I\omega^2 + \cancel{MgH} \Rightarrow mgy = \frac{1}{2} m\upsilon^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2} MR^2 \left(\frac{\upsilon}{R}\right)^2 \Rightarrow$$

$$mgy = \frac{1}{2}\upsilon^2 \left(m + \frac{M}{2}\right) \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2mgy}{m + \frac{M}{2}}} = \sqrt{\frac{2(10)(9,8)(3,5)}{10+4}} = \sqrt{\frac{(98)(7)}{14}} = \sqrt{49} = 7\ \text{m/s}$$



ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ