

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πρόλογος

Αναφορές

1. Το Πακέτο Εργαλείων Επεξεργασίας Σήματος του LabVIEW
2. Παραγωγή Σήματος στο LabVIEW
 - 2.1 Το Θεώρημα του Nyquist ή Θεώρημα της Δειγματοληψίας
 - 2.2 Παραγωγή Σήματος
3. Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος για το Μετασχηματισμό Fourier
 - 3.1 Μετασχηματισμός Fourier Απλού Ημιτονοειδούς Κύματος
 - 3.2 Μετασχηματισμός Fourier Τριγωνικού Κύματος
4. Φάσμα Σήματος
5. Παράθυρα Εξομάλυνσης
6. Ψηφιακά Φίλτρα

Πρόλογος

Πριν από την εμφάνιση των γλωσσών γραφικού προγραμματισμού, όπως το LabVIEW, η ανάπτυξη εφαρμογών για την ανάλυση και επεξεργασία σήματος προϋπέθετε ειδικευμένες γνώσεις πάνω στην επεξεργασία δεδομένων τις οποίες, συνήθως, κατείχαν οι ηλεκτρολόγοι μηχανικοί. Η εξέλιξη στην ανάπτυξη συστημάτων μέτρησης με χρήση υπολογιστών οδήγησε στην ανάπτυξη των γλωσσών αντικειμενοστραφούς και γραφικού προγραμματισμού (MATLAB, LabVIEW, κ.α.). Οι γλώσσες αυτές ευνόησαν πολύ τη χρήση έτοιμων εργαλείων λήψης, καταγραφής και ανάλυσης σήματος. Μερικά από τα εργαλεία λήψης και καταγραφής σήματος του LabVIEW χρησιμοποιήσαμε, ήδη, στην κατασκευή των εικονικών οργάνων του στις προηγούμενες παραγράφους.

Σε αυτό το μέρος των σημειώσεων θα παρουσιαστεί το πακέτο εργαλείων επεξεργασίας σήματος του LabVIEW. Το κεφάλαιο αυτό ξεκινάει με τα βασικά εργαλεία για παραγωγή σήματος, όπου γίνεται και μια σύντομη αναφορά στα βασικά μεγέθη της δειγματοληψίας και το θεώρημα Nyquist και συνεχίζει με τα εργαλεία για μετασχηματισμό Fourier, τα φίλτρα συχνοτήτων και τα παράθυρα εξομάλυνσης. Θα δοθούν παραδείγματα της χρήσης αυτών των εργαλείων με την παρουσίαση κατάλληλων εικονικών οργάνων με τα οποία θα παράγουμε και θα αναλύουμε σήματα.

Αναφορές

Η παρούσα «Εισαγωγή στο Λήψη Δεδομένων» βασίζεται στο Κεφ. 6 του βιβλίου του Dan Nesculescu, “Mechatronics”, Prentice Hall, μετάφραση στα ελληνικά Κ. Παρίσης-N. Πουλάκης, εκδόσεις Τζιόλα.

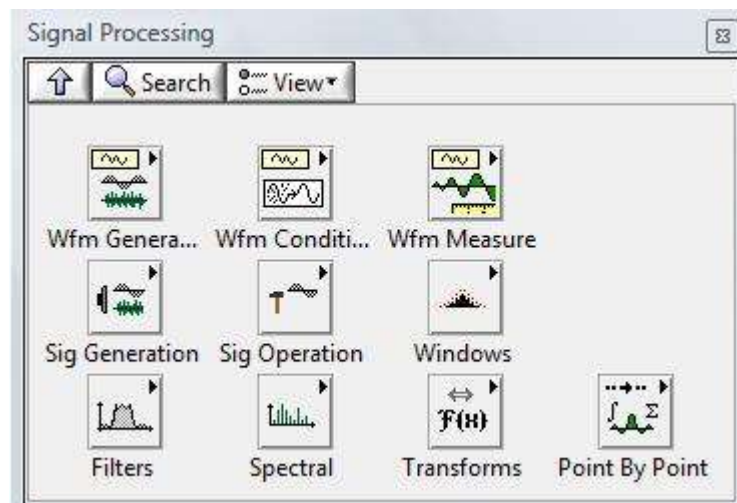
1. Το Πακέτο Εργαλείων Επεξεργασίας Σήματος του LabVIEW

Το πακέτο εργαλείων του LabVIEW για την επεξεργασία σήματος 'Signal Processing' (Εικ. 1) είναι προσβάσιμο από το δομικό διάγραμμα μέσω της ακολουθίας εντολών

Functions → Signal Processing

και περιλαμβάνει τα ακόλουθα υποπακέτα:

- Waveform Generation (για Δημιουργία Κυματομορφής)
- Waveform Conditioning (για Διαμόρφωση Κυματομορφής)
- Waveform Measurements (για Μετρήσεις Κυματομορφής, π.χ., DC τιμή, RMS τιμή),
- Signal Generation (για Δημιουργία Σήματος),
- Signal Operation (για Λειτουργία Σήματος)
- Windows (Παράθυρα εξομάλυνσης σήματος)
- Filters (Φίλτρα συχνοτήτων)
- Spectral Analysis (Φασματική Ανάλυση)
- Transforms (Μετασχηματισμοί Fourier, κ.λ.π.)
- Point By Point (για Επεξεργασία Σημείο-Σημείο)



Εικόνα 1

2. Παραγωγή Σήματος στο LabVIEW

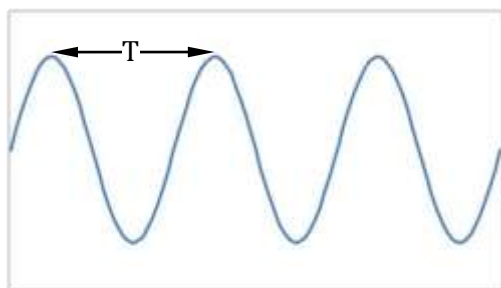
Η παραγωγή σήματος στο LabVIEW γίνεται με τα έτοιμα εικονικά όργανα που περιλαμβάνονται στα υποπακέτα 'Waveform Generation' και 'Signal Generation' του πακέτου 'Signal Conditioning' (Εικ. 1). Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα εργαλεία αυτά για να προσομοιώσουμε οποιοδήποτε περιοδικό σήμα (ημιτονοειδές, τριγωνικό,

τετραγωνικούς παλμούς, κ.α.) έτσι ώστε να δοκιμάσουμε αλγόριθμους πριν τη λήψη πραγματικών σημάτων με μια κάρτα DAQ. Μπορούμε να αλλάξουμε οποιαδήποτε παράμετρο των προσομοιωμένων αυτών περιοδικών σημάτων, όπως τη συχνότητα, το πλάτος, κ.α.

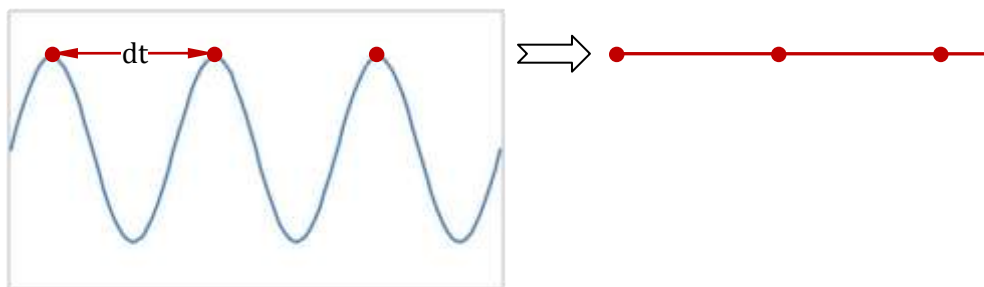
Πριν προχωρήσουμε στην εξέταση παραδειγμάτων χρήσης παραγωγής και επεξεργασίας σήματος, θα αναφερθούμε στις βασικότερες παραμέτρους και το θεώρημα της δειγματοληψίας.

2.1 Το Θεώρημα του Nyquist ή Θεώρημα της Δειγματοληψίας

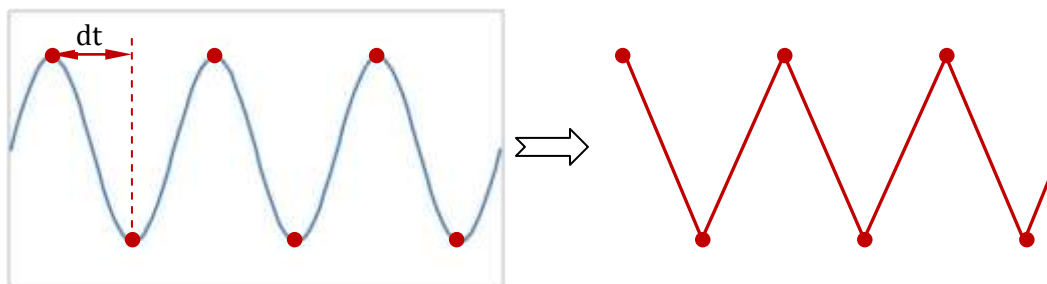
Για να κατανοήσουμε το θεώρημα της δειγματοληψίας ή θεώρημα Nyquist, ας δούμε το παράδειγμα της Εικ. 2. Έστω μια πραγματική αναλογική ημιτονοειδής τάση (Εικ. 2α) με περίοδο T την οποία θέλουμε να αναπαράγουμε με δειγματοληψία. Η αναπαραγωγή της αναλογικής τάσης γίνεται παίρνοντας δείγματα, δηλαδή, τιμές της τάσης σε τακτά χρονικά



(α) Ημιτονοειδές αναλογικό σήμα με περίοδο T



(β) Δειγματοληψία του σήματος σε χρονικά διαστήματα ίσα με την περίοδο του αναλογικού σήματος ($dt = T$). Η αναπαραγόμενη γραμμή είναι ευθεία.



(γ) Δειγματοληψία του σήματος σε χρονικά διαστήματα ίσα με το μισό της περιόδου του αναλογικού σήματος ($dt = T/2$). Η αναπαραγόμενη γραμμή είναι τριγωνική.

Εικόνα 2

διαστήματα dt . Το χρονικό διάστημα dt μεταξύ των διαδοχικών δειγμάτων ονομάζεται χρονικό διάστημα της δειγματοληψίας ή περίοδος της δειγματοληψίας. Έτσι, δηλαδή με δειγματοληψία, γίνεται η ψηφιοποίηση ενός αναλογικού σήματος.

Έστω ότι, όπως δείχνεται και στην Εικ. 2(β), επιλέγουμε το χρονικό διάστημα της δειγματοληψίας να είναι ίσο με την περίοδο της αναλογικής τάσης ($dt = T$). Αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα τα δείγματα, δηλαδή, οι μετρήσεις της τάσης να πέφτουν όλες στο ίδιο σημείο της αναλογικής τάσης (ας πούμε στο μέγιστο της τάσης), οπότε η αναπαραγόμενη τάση, που λαμβάνεται αν ενώσουμε τα δείγματα (βλέπε δεξιά Εικ. 2β), θα είναι μια ευθεία γραμμή που, προφανώς, δεν έχει καμμία σχέση με την αρχική αναλογική ημιτονοειδή τάση που θέλουμε να αναπαράγουμε.

Έστω, τώρα, ότι επιλέγουμε το χρονικό διάστημα της δειγματοληψίας να είναι το μισό της περιόδου της αναλογικής τάσης ($dt = T/2$), όπως δείχνεται και στην Εικ. 2(γ). Σ' αυτήν την περίπτωση, η αναπαραγόμενη τάση (βλέπε δεξιά Εικ. 2γ), θα είναι μια τριγωνική κυματομορφή που, τουλάχιστον, αναπαράγει την περιοδικότητα της αρχικής αναλογικής ημιτονοειδούς τάσης και, αν και διαφέρει πολύ απ' αυτήν, μας δίνει κάποια πληροφορία γ' αυτήν. Προφανώς, για μια περισσότερο πιστή αναπαράσταση της ημιτονοειδούς τάσης απαιτούνται περισσότερα από δύο δείγματα ανά περίοδο.

Μετά απ' αυτό το εικονογραφημένο παράδειγμα, γίνεται πιο κατανοητό το θεώρημα της δειγματοληψίας ή θεώρημα Nyquist, το οποίο διατυπώνεται με λόγια ως εξής:

κατά την αναπαραγωγή ενός σήματος απαιτείται το χρονικό διάστημα δειγματοληψίας να είναι μικρότερο από το μισό της περιόδου του αναλογικού σήματος,

ή,

$$dt < \frac{T}{2}, \quad \text{Θεώρημα Nyquist}$$

Προφανώς, η συχνότητα f της αρχικής ημιτονοειδούς τάσης είναι το αντίστροφο της περιόδου της, δηλαδή, $f = 1/T$. Η συχνότητα μετριέται σε Hz ή cycles/sec (κύκλους/sec). Αντίστοιχα, το αντίστροφο του χρόνου δειγματοληψίας dt λέγεται ρυθμός δειγματοληψίας ή συχνότητα δειγματοληψίας, συμβολίζεται συνήθως με r ή f_r ($r = f_s = 1/dt$) και μετριέται σε samples/sec.

Με όρους ρυθμού δειγματοληψίας r [samples/sec] και συχνότητας f του αναλογικού σήματος, το θεώρημα Nyquist απαιτεί

$$r > 2 \cdot f, \quad \text{Θεώρημα Nyquist}$$

Αν ορίσουμε τη συχνότητα Nyquist f_N σαν $f_N = r/2$, μπορούμε να δώσουμε μια άλλη μορφή διατύπωσης του θεωρήματος Nyquist, σύμφωνα με την οποία η μέγιστη συχνότητα f του αναλογικού σήματος εισόδου πρέπει να είναι μικρότερη από την συχνότητα Nyquist,

$$f < f_N, \quad \text{Θεώρημα Nyquist}$$

Ένας άλλος τρόπος να επιβεβαιώσουμε ότι δεν παραβιάζεται το θεώρημα Nyquist βασίζεται στην κανονικοποιημένη συχνότητα F του αρχικού αναλογικού σήματος. Η κανονικοποιημένη συχνότητα δίνεται σαν ο λόγος της συχνότητας του αναλογικού σήματος προς το ρυθμό δειγματοληψίας του, δηλαδή, $F = f/r$. Το θεώρημα Nyquist απαιτεί η κανονικοποιημένη συχνότητα του αναλογικού σήματος να είναι μικρότερη από 0.5,

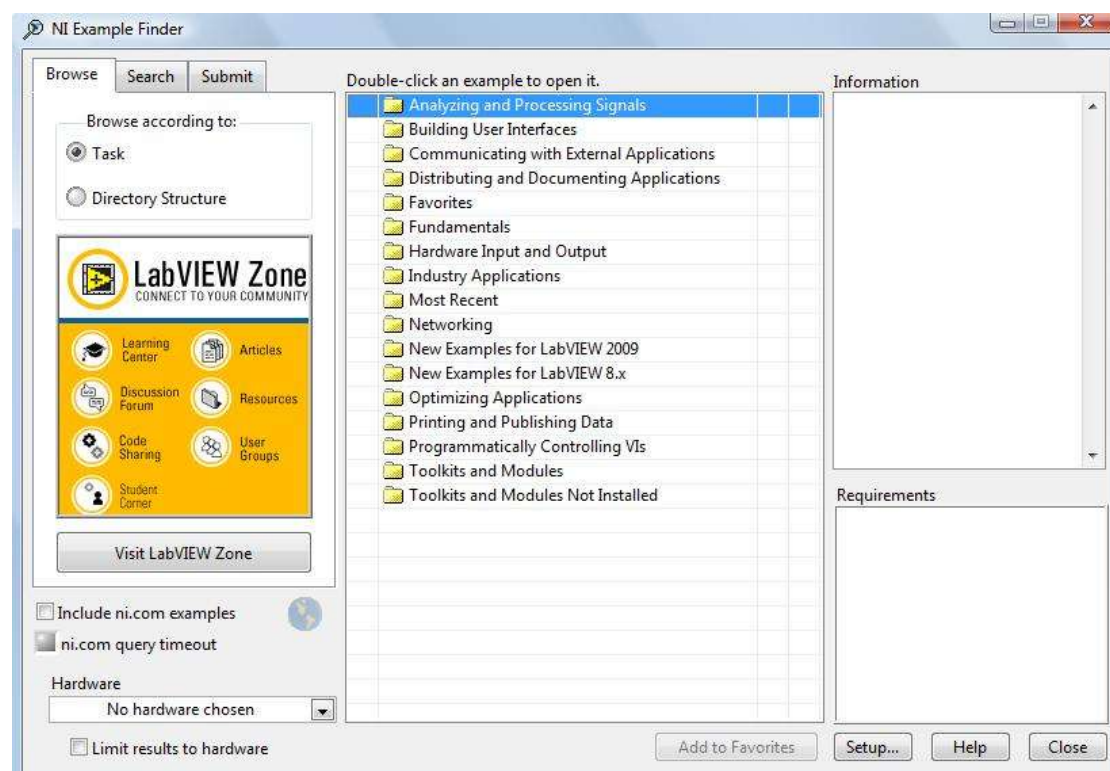
$$F = \frac{f}{r} < 0.5 \quad \text{Θεώρημα Nyquist}$$

2.2 Παραγωγή Σήματος

Η παραγωγή κύματος στο LabVIEW θα δειχθεί με το παράδειγμα του εικονικού οργάνου 'Function Waveform Generation.vi' από τη βιβλιοθήκη των έτοιμων παραδειγμάτων του Lab VIEW. Στην αρχική επιφάνεια 'Getting Started' του Lab VIEW, επιλέγουμε με δεξί κλικ 'Find Examples'.

Στην οθόνη 'NI Example Finder', που ανοίγει (Εικ. 3), στην καρτέλα 'Browse', επιλέγουμε με διπλό κλικ

Analyzing and Processing Signals → Signal and Noise Generation → Function Waveform Generation.vi

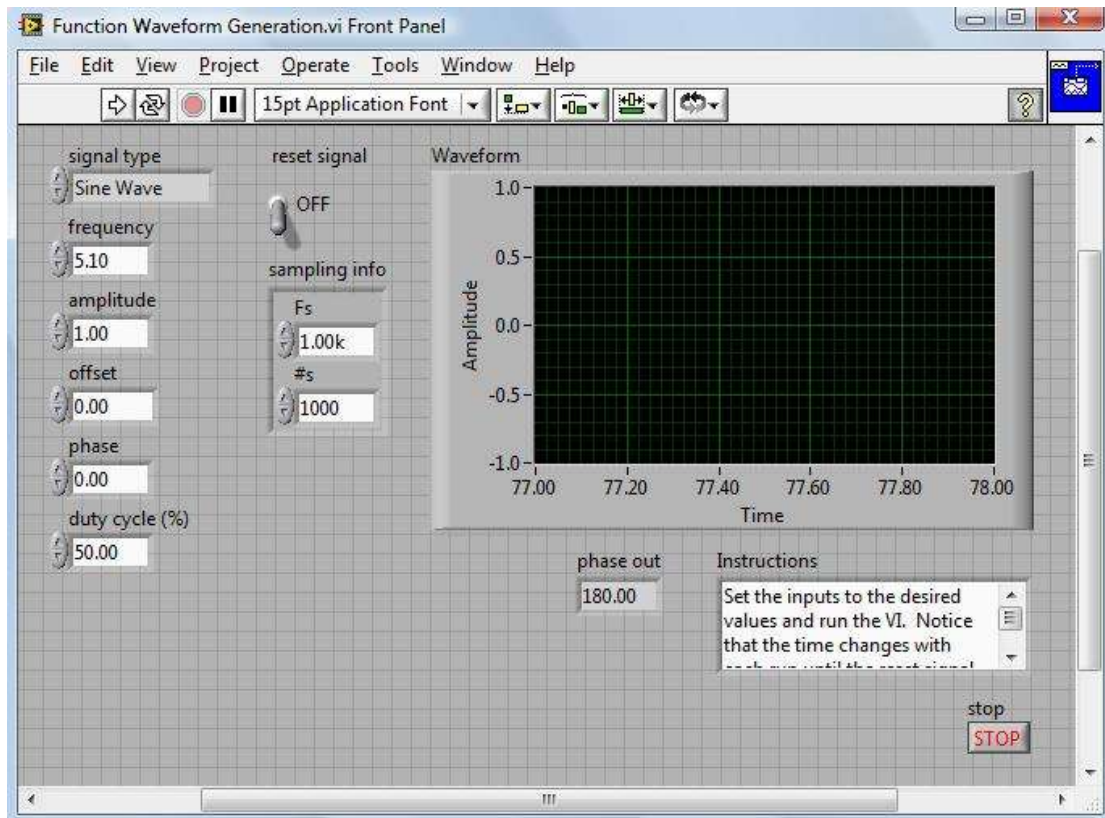


Εικόνα 3 Η οθόνη αναζήτησης στη βιβλιοθήκη έτοιμων παραδειγμάτων του Lab VIEW.

Η Εικ. 4, δείχνει το εικονικό όργανο 'Function Waveform Generation.vi'. Αρχικά, αποθηκεύουμε ένα αντίγραφο του αρχείου σε έναν φάκελο της επιλογής μας επιλέγοντας

File → Save As

Στην οθόνη 'Save "Function Waveform Generation.vi" As', που ανοίγει, επιλέγουμε 'Substitute copy for original' και μετά 'Continue'. Αποθηκεύουμε το αρχείο Function Waveform Generation.vi στο φάκελο της επιλογής μας.



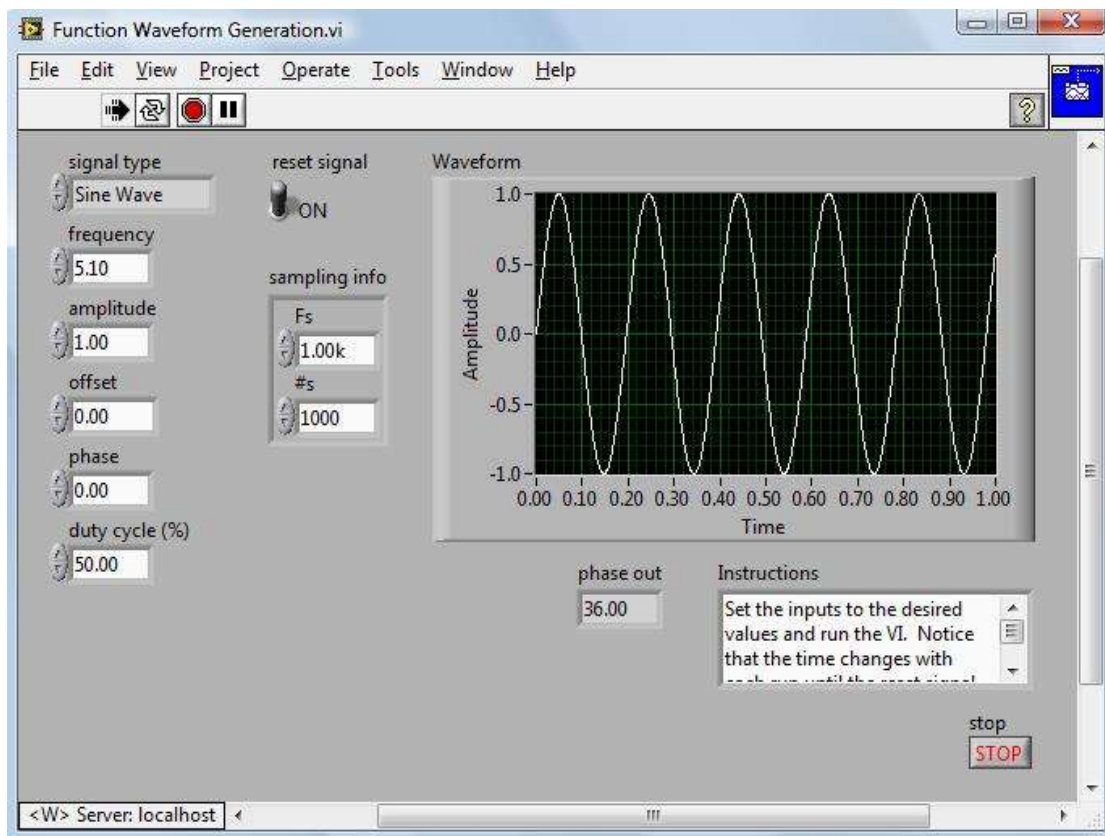
Εικόνα 4

Η εμπρόσθια επιφάνεια του 'Function Waveform Generation.vi' της Εικ. 4 περιλαμβάνει το κουμπί ελέγχου 'signal type' με το οποίο επιλέγουμε τον τύπο της κυματομορφής: Sine Wave, Triangle Wave, Square Wave ή Sawtooth Wave. Επίσης, περιλαμβάνει τα κουμπιά ελέγχου της κυματομορφής, όπως το κουμπί για τη συχνότητα (frequency), το πλάτος (amplitude), την αρχική φάση (phase), το ρυθμό δειγματοληψίας (F_s) και το συνολικό αριθμό δειγμάτων (#s) που θα περιλαμβάνει η κυματομορφή. Μπορούμε να 'παγώσουμε' την παραγόμενη κυματομορφή βάζοντας το διακόπτη 'reset signal' στη θέση 'ON'.

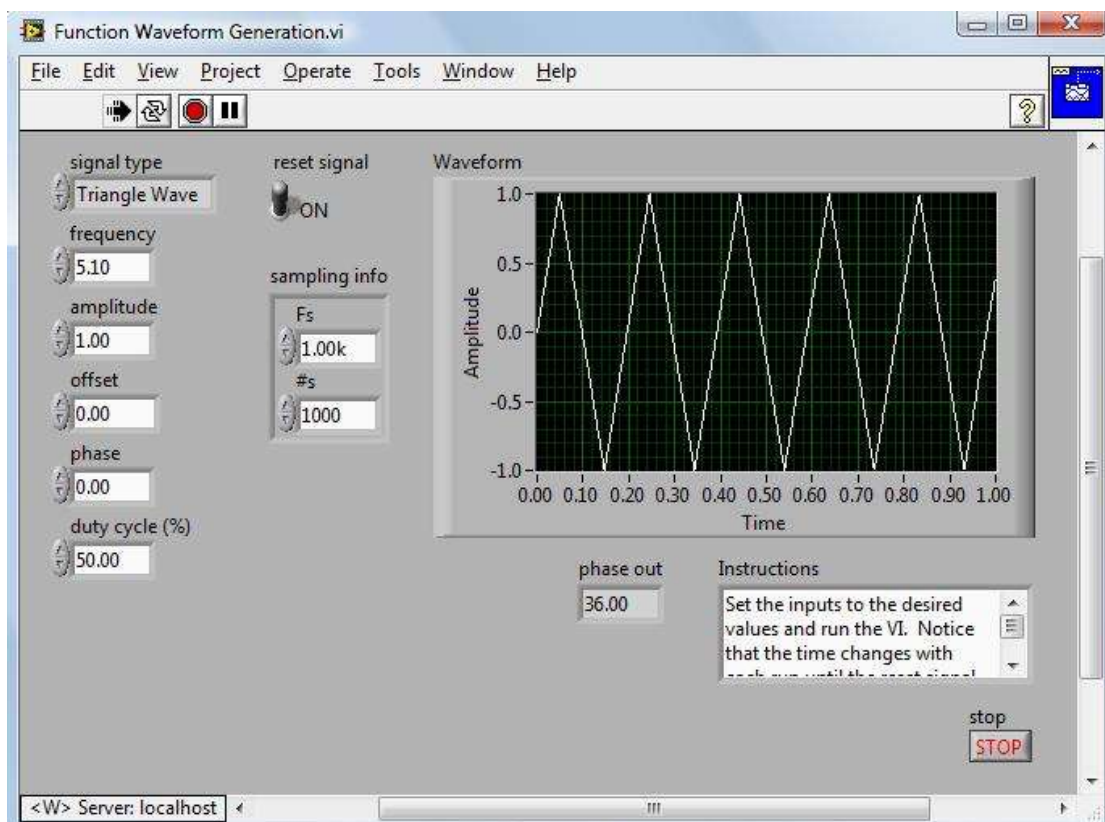
Η εμπρόσθια επιφάνεια περιλαμβάνει, επίσης, ένα γράφημα, το 'Waveform', για την παρουσίαση της κυματομορφής. Οι Εικ. 5(α) και (β) δείχνουν μια ημιτονοειδή κυματομορφή (Sine Wave) και μια τριγωνική κυματομορφή (Triangle Wave), αντίστοιχα. Κάθε κυματομορφή περιλαμβάνει $\#s = 1000$ δειγμάτα (σημεία). Η χρονική απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δειγμάτων είναι $1/F_s = 1/1000$ sec, έτσι που ο οριζόντιος άξονας 'Time' από το δείγμα 0 ως το δείγμα 1000 αντιστοιχεί σε μια κλίμακα χρόνου από 0 ως $1000(1/1000) = 1.00$ sec.

Το δομικό διάγραμμα του εικονικού οργάνου 'Function Waveform Generation.vi' (Εικ. 6) περιλαμβάνει το 'Basic Function Generator.vi', το οποίο βρίσκουμε στην υποπαλέττα 'Waveform Generation' της παλέττας εργαλείων 'Signal Processing' (Εικ. 1). Επιλέγουμε το εργαλείο 'Basic Function Generator.vi' με την ακολουθία εντολών

Functions → Signal Processing → Waveform Generation → Basic Function Generator.vi

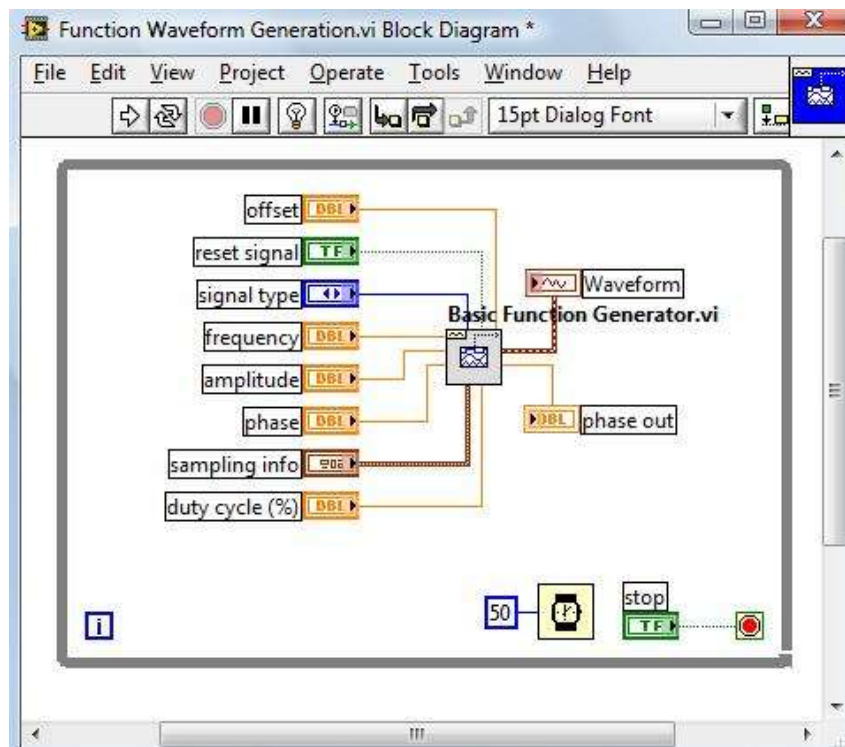


(α)



(β)

Εικόνα 5

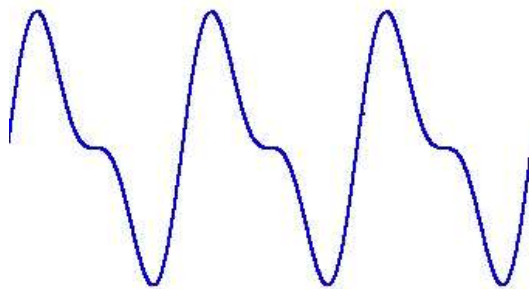


Εικόνα 6

3. Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος για το Μετασχηματισμό Fourier

Στην παράγραφο παραπάνω είδαμε πως μπορεί να αναπαραχθεί ένα αναλογικό ημιτονοειδές σήμα από τα n δείγματα x_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$) της μέτρησης του σήματος. Με τη βοήθεια αυτών των n δειγμάτων αναπαράγουμε το πραγματικό αναλογικό σήμα σε μια ψηφιοποιημένη μορφή κατάλληλη για χρήση στον υπολογιστή. Στην πραγματικότητα, σπάνια το αναλογικό σήμα, που έχουμε να αναπαράγουμε, έχει την απλή ημιτονοειδή μορφή της Εικ. 3. Στη γενική περίπτωση, ένα αναλογικό σήμα έχει μια τυχαία περιοδική (Εικ. 7) ή, ακόμα, και μη περιοδική μορφή. Όποια μορφή, όμως, και να έχει το αναλογικό σήμα μπορεί να αναλυθεί σε απλά ημιτονοειδή κύματα (κάθε ένα διαφορετικής συχνότητας και πλάτους) και αυτή η διαδικασία ονομάζεται ανάλυση Fourier (Fourier Transform).

Το φασματικό περιεχόμενο ενός αναλογικού σήματος, δηλαδή, οι συχνότητες των ημιτονοειδών κυμάτων στις οποίες μπορεί αυτό να αναλυθεί, μπορεί να υπολογιστεί,



Εικόνα 7 Παράδειγμα τυχαίου περιοδικού αλλά μη ημιτονοειδούς κύματος

χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο ψηφιακής επεξεργασία για διακριτό μετασχηματισμό Fourier (DFT).

Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier δίνει τα πλάτη X_k των συνιστωσών ημιτονοειδών κυμάτων από τα n δείγματα x_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$) του μετρηθέντος αναλογικού σήματος:

$$X_k = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \left[\cos\left(\frac{2\pi k}{n} i\right) - j \sin\left(\frac{2\pi k}{n} i\right) \right]$$

όπου, j είναι η μονάδα των φανταστικών αριθμών.

Ο δείκτης k παίρνει τις τιμές $0, 1, 2, \dots, n-1$, δηλαδή, με το μετασχηματισμό Fourier, αν έχουμε n δείγματα μέτρησης ενός αναλογικού σήματος, μπορούμε να βρούμε n ημιτονοειδείς συνιστώσες του. Το αποτέλεσμα ενός μετασχηματισμού DFT είναι πάντα ένας μιγαδικός αριθμός. Ο μετασχηματισμός δίνει τους μιγαδικούς αριθμούς σε καρτεσιανή μορφή $\{(πραγματικό μέρος) + j \cdot (\text{φανταστικό μέρος})\}$ ή $(a + j \cdot b)$ και μπορούν να μετατραπούν σε πολική μορφή σαν $\{(\text{πλάτος}) \cdot e^{j(\text{φάση})}\}$ ή $r \cdot e^{j\phi}$ *

Κατ'αντιστοιχία με το χρονικό διάστημα δειγματοληψίας dt , που ορίσαμε στην παράγραφο [...](#) παραπάνω και που εκφράζει το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών δειγμάτων x_i και x_{i+1} του αναλογικού σήματος, μπορούμε να ορίσουμε το διάστημα συχνότητας df μεταξύ δύο οποιονδήποτε διαδοχικών όρων X_k και X_{k+1} που εκφράζει τη μικρότερη διαφορά συχνότητας μεταξύ των ημιτονοειδών συνιστωσών κυμάτων στις οποίες αναλύεται το αναλογικό σήμα. Το διάστημα συχνότητας ισούται με

$$df = \frac{1}{n \cdot dt} = \frac{r}{n}$$

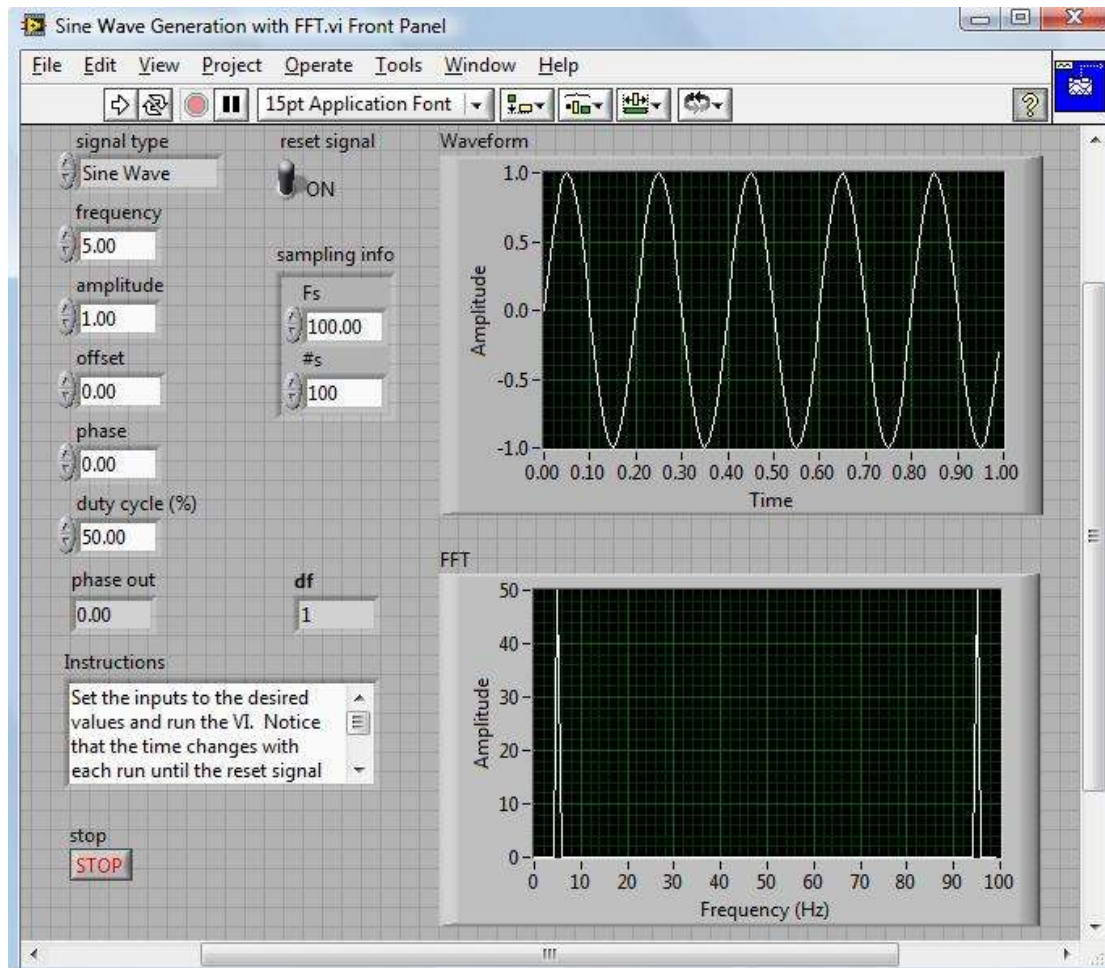
Ο μετασχηματισμός DFT μπορεί να υπολογιστεί με έναν γρήγορο αλγόριθμο, τον καλούμενο γρήγορο μετασχηματισμό Fourier (Fast Fourier Transform, FFT). Ο αλγόριθμος FFT απαιτεί περίπου $n \cdot \log_2(n)$ πράξεις.

Στη συνέχεια, θα διευκρινίσουμε το μετασχηματισμό FFT με τα συγκεκριμένα παραδείγματα του ημιτονοειδούς και του τριγωνικού κύματος της Εικ. 5 χρησιμοποιώντας το εργαλείο 'FFT.vi' από την παλέτα 'Transforms' του LabVIEW (Εικ. 1).

1. Μετασχηματισμός Fourier Απλού Ημιτονοειδούς Κύματος

Η Εικ. 8 παρουσιάζει το 'Sine Wave Generation with FFT.vi' για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού FFT του ημιτονοειδούς κύματος που παράγεται από το 'Function Waveform Generation.vi' που δείχνει η Εικ. 5 (α). Η εμπρόσθια επιφάνεια της Εικ. 5 (α) συμπληρώνεται στην Εικ. 8 με τη γραφική παράσταση 'FFT' που παρουσιάζει το πλάτος (amplitude) ως προς τη συχνότητα (frequency) της εξόδου του 'FFT.vi'. Επίσης, η εμπρόσθια επιφάνεια συμπληρώνεται με έναν ακόμα δείκτη, το δείκτη df του διαστήματος συχνότητας του μετασχηματισμού FFT και που είναι το βήμα του οριζόντιου άξονα 'frequency'.

* $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ και $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$



Εικόνα 8

Το δομικό διάγραμμα του 'Sine Wave Generation with FFT.vi' δείχνεται στην Εικ. 9. Ξεκινώντας από το δομικό διάγραμμα του 'Function Waveform Generation.vi' της Εικ. 6 συμπληρώνουμε με το 'FFT.vi', το οποίο βρίσκουμε ως εξής:

Functions → Signal Processing → Transforms → FFT.vi.

Ο μιγαδικός αριθμός που βγαίνει από το 'FFT.vi' μετατρέπεται σε πολική μορφή χρησιμοποιώντας

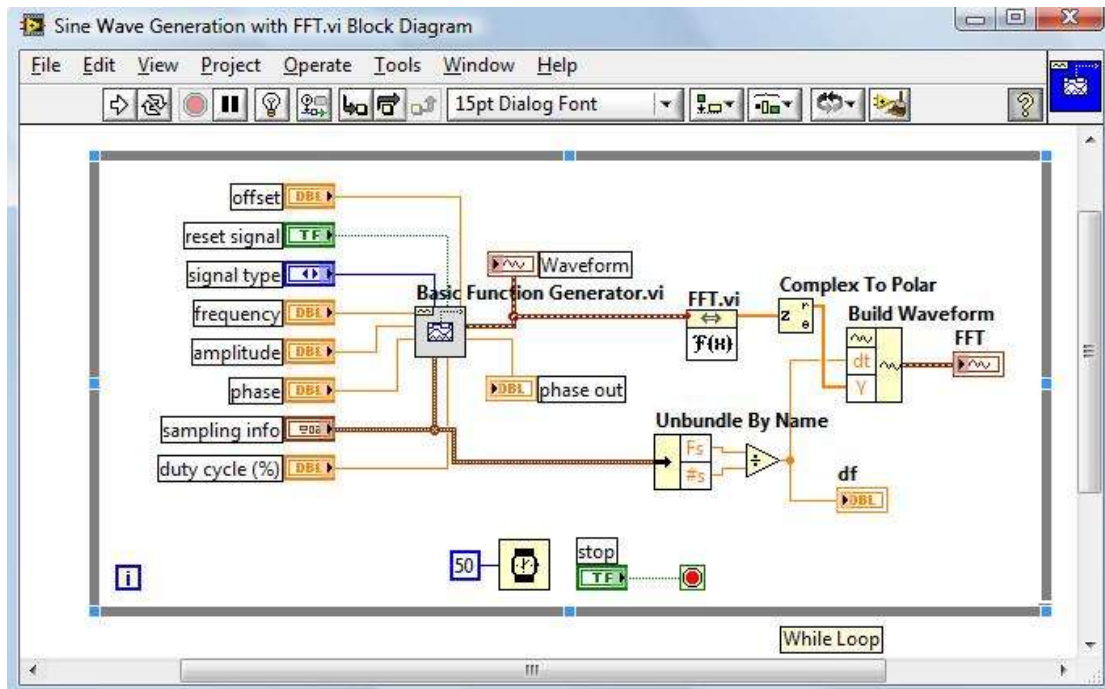
Functions → Mathematics → Numeric → Complex → Complex To Polar

Για να σχηματίσουμε την κυματομορφή της γραφικής παράστασης 'FFT' χρησιμοποιούμε το 'Build Waveform' με την ακολουθία εντολών

Functions → Programming → Waveform → Build Waveform

Η λειτουργία 'Build Waveform' δημιουργεί μια κυματομορφή βασισμένη στις συνιστώσες 'Y' και 'dt' που ενώνουμε στις εισόδους της: 'Y' για τον άξονα 'amplitude' και 'dt' για τον οριζόντιο άξονα 'frequency'.

Στην είσοδο 'Y' του 'Build Waveform' ενώνουμε την έξοδο του πλάτους 'r' του 'Complex To Polar'.



Εικόνα 9

Στην είσοδο 'dt' συνδέουμε το διάστημα συχνοτήτων df το οποίο υπολογίζουμε στο δομικό διάγραμμα της Εικ. 9 από το πηλίκο $F_s/\#s$ της ταχύτητας δειγματοληψίας προς τον αριθμό δειγμάτων του αρχικού αναλογικού σήματος (βλ. σχέση $df=r/n$ παραπάνω). Τα στοιχεία F_s και $\#s$ περιέχονται στην ομάδα κουμπιών ελέγχου 'sampling info' από την οποία τα ξεχωρίζουμε και τα παίρνουμε χρησιμοποιώντας τη λειτουργία 'Unbundle By Name' την οποία παίρνουμε με

Functions → Programming → Cluster, Class, & Variant → Unbundle By Name

Η εμπρόσθια επιφάνεια της Εικ. 8, στο δείκτη 'Waveform', παρουσιάζει $\#s = 100$ σημεία ενός ημιτονοειδούς κύματος συχνότητας (frequency) 5.00 (Hz), παραγμένο με ρυθμό δειγματοληψίας $F_s = 100.00$ (samples/sec).

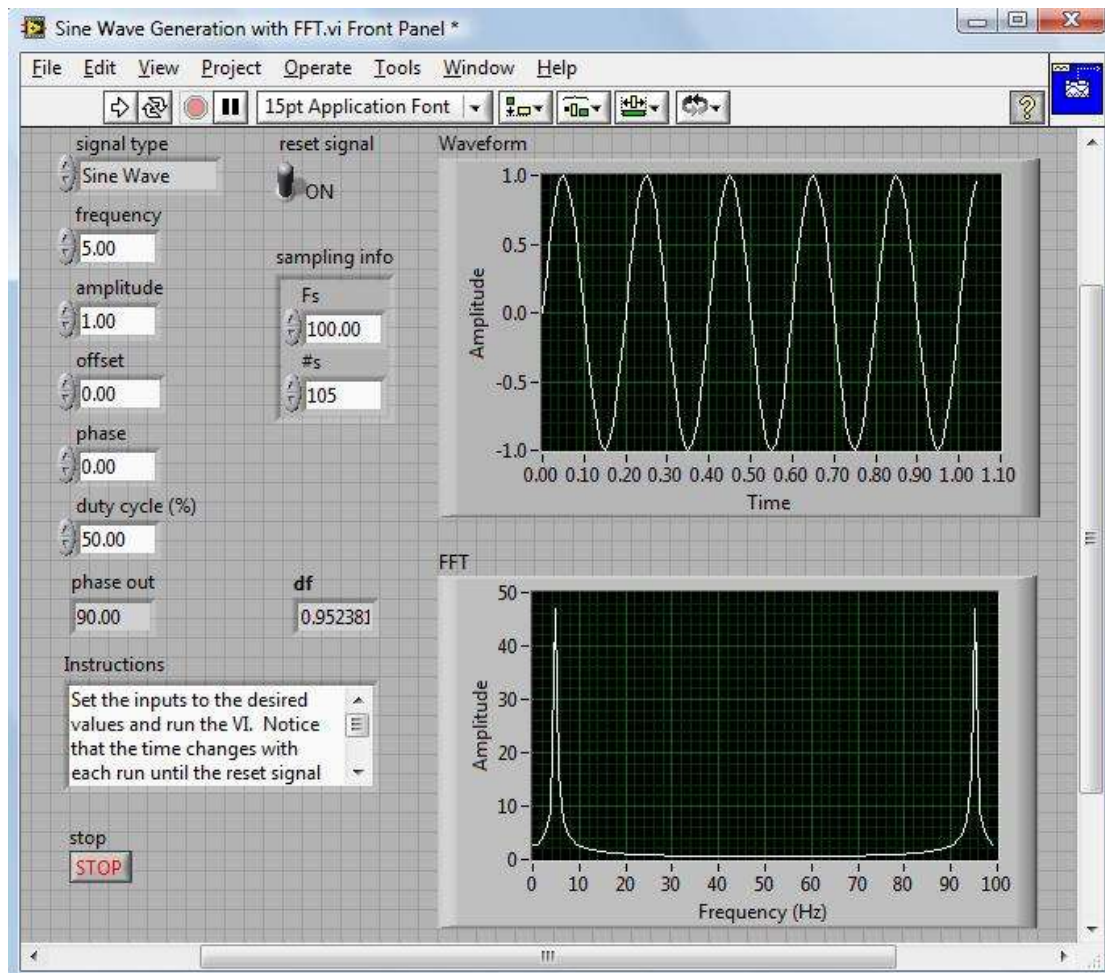
Στο δείκτη 'FFT', ο άξονας των συχνοτήτων έχει 100 σημεία ($X_k, k = 0, 1, 2, \dots, 99$), με διάστημα συχνότητας $df = 100/100 = 1$ (Hz), δηλαδή, η κλίμακα συχνοτήτων είναι από 0 ως $(\#s) \cdot df = 100 \cdot 1 = 100$ (Hz). Το πρώτο σημείο (X_0) αντιστοιχεί στη συχνότητα 0.5 Hz και το τελευταίο (X_{99}) στη συχνότητα 100 Hz. Η γραφική παράσταση 'Waveform' δείχνει το σήμα στο πεδίο του χρόνου ενώ η γραφική παράσταση 'FFT' δείχνει το ίδιο σήμα στο πεδίο των συχνοτήτων.

Μια ιδιότητα του μετασχηματισμού Fourier του σήματος, που δείχνει η γραφική παράσταση 'FFT', είναι ότι το δεύτερο μισό των τιμών είναι κατοπτρικά συμμετρικό του πρώτου μισού ως προς την κεντρική συχνότητα στην κλίμακα συχνοτήτων. Η κεντρική συχνότητα στην κλίμακα συχνοτήτων είναι $(\#s/2) \cdot df = (\#s/2) \cdot (F_s/\#s) = F_s/2 = F_N$, η συχνότητα Nyquist. Οι συνιστώσες συχνότητες πέραν της συχνότητας Nyquist F_N ονομάζονται αρνητικές συχνότητες και, όντας κατοπτρικά συμμετρικές, δεν περιέχουν καμμία νέα πληροφορία στο πεδίο συχνοτήτων και μπορούμε να τις αγνοήσουμε. Οι συνιστώσες συχνότητες κάτω από τη συχνότητα Nyquist F_N ονομάζονται θετικές συχνότητες και περιέχουν όλη την φασματική πληροφορία για το σήμα (δηλαδή, όλη την πληροφορία στο πεδίο των συχνοτήτων).

Στην περίπτωση του εικονικού οργάνου 'Sine Wave Generation with FFT.vi' της Εικ. 8, η συχνότητα Nyquist F_N είναι $F_s / 2 = 100/2 = 50$ (Hz), το μέσον του άξονα συχνοτήτων του γραφήματος 'FFT'. Στο τμήμα των θετικών συχνοτήτων του γραφήματος 'FFT' φαίνεται η συχνότητα $f = 5$ (Hz) στο σημείο $k = 5$.

Στην Εικ. 8, το ημιτονοειδές κύμα έχει έναν ακέραιο αριθμό 5 περιόδων στο χρονικό διάστημα μιας δειγματοληψίας. Η εμπρόσθια επιφάνεια της Εικ. 10 αντιστοιχεί στις ίδιες τιμές των παραμέτρων, που χρησιμοποιήθηκαν για την Εικ. 8, εκτός από την τιμή της παραμέτρου '#s', που είναι 105. Σαν αποτέλεσμα, αριθμός των περιόδων της αναπαραγόμενης κυματομορφής 'Waveform' στο χρονικό διάστημα μιας δειγματοληψίας είναι τώρα μη ακέραιος ($5\frac{1}{4}$ περίοδοι*), γεγονός που εξηγεί τη διαπλάτυνση των κορυφών λόγω πρόσμιξης συχνοτήτων στο γράφημα 'FFT'.

Στην περίπτωση, που ο αριθμός των κύκλων του ημιτονοειδούς κύματος, στο οποίο γίνεται μετασχηματισμός FFT, δεν είναι ακέραιος αριθμός, λαμβάνει χώρα η λεγόμενη φασματική



Εικόνα 10 Η εμπρόσθια επιφάνεια του 'Sine Wave Generation with FFT.vi' με μη ακέραιο αριθμό περιόδων της κυματομορφής 'Waveform'. Οι κορυφές του μετασχηματισμού Fourier στο 'FFT' παρουσιάζουν φασματική διαρροή.

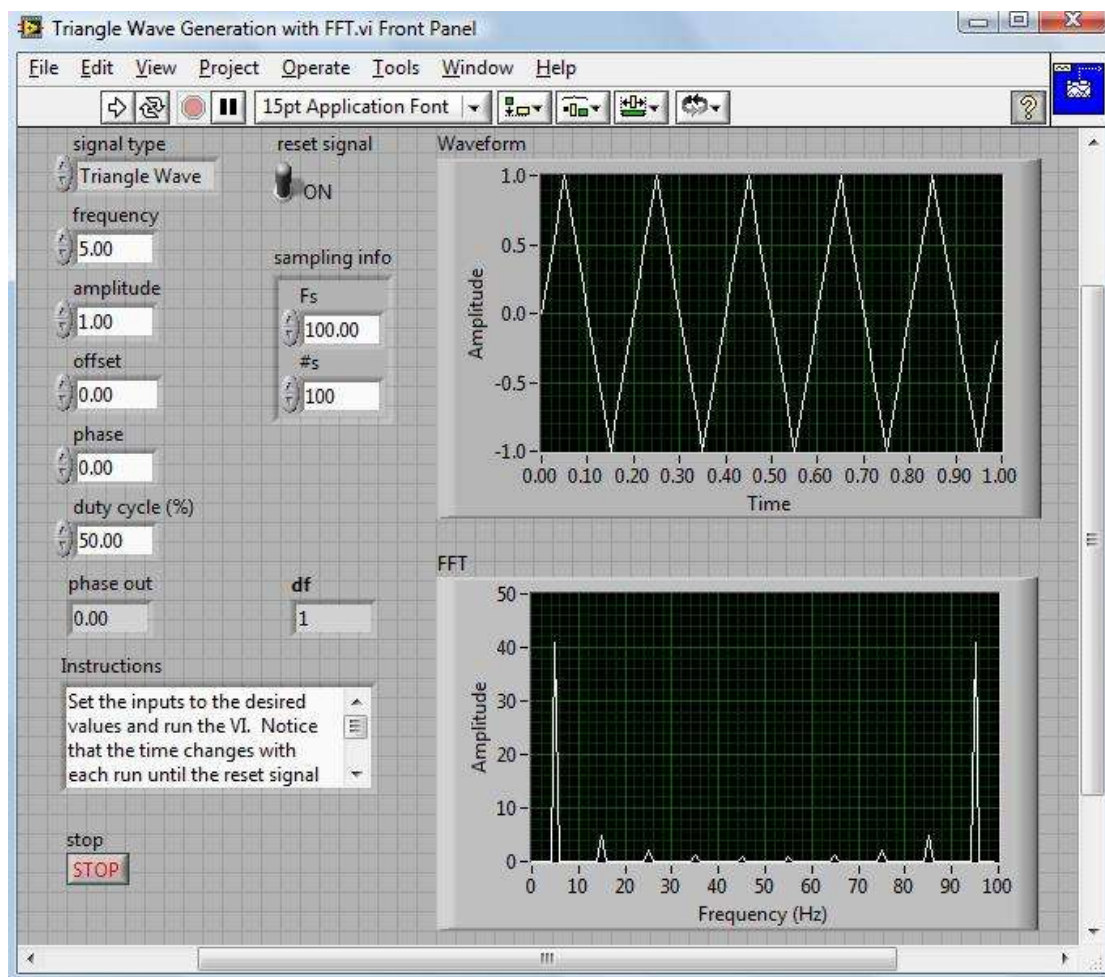
* Ο αριθμός των περιόδων (κύκλων) δίνεται από τη σχέση $\frac{\#s(\text{δείγματα})}{F_s(\text{δείγματα/sec})} \cdot f(\text{κύκλοι/sec})$. επομένως, στην περίπτωση της κυματομορφής της Εικ. 8 έχουμε $\frac{100}{100} \cdot 5 = 5$ περιόδους στη διάρκεια της δειγματοληψίας, ενώ στην περίπτωση της Εικ. 10 έχουμε $\frac{105}{100} \cdot 5 = 5.25$ ή $5\frac{1}{4}$ περιόδους στη διάρκεια της δειγματοληψίας.

διαρροή (spectral leakage). Η φασματική διαρροή έχει σαν συνέπεια τα πλάτη των συνιστωσών του μετασχηματισμού FFT να απλώνονται σε αρκετές τιμές γύρω από τη συχνότητα του αναλογικού σήματος εισόδου (δηλαδή, σε εσφαλμένες ή μη πραγματικές συχνότητες). Από το αποτέλεσμα του γραφήματος 'FFT' της Εικ. 10 είναι προφανής η φασματική διαρροή, έστω και αν δεν άλλαξε η συχνότητα του ημιτονοειδούς κύματος. Η φασματική διαρροή διορθώνεται με την επιβολή παραθύρου στο σήμα εισόδου (signal windowing), η οποία θα παρουσιαστεί σε επόμενη παράγραφο.

2. Μετασχηματισμός Fourier Τριγωνικού Κύματος

Στην Εικ. 11 παρουσιάζεται ο μετασχηματισμός FFT του τριγωνικού κύματος που παράγεται από το 'Function Waveform Generation.vi' που δείχνει η Εικ. 5 (β). Το εικονικό όργανο 'Triangle Wave Generation with FFT.vi' είναι το ίδιο με το το εικονικό όργανο 'Sine Wave Generation with FFT.vi' των Εικ. 8 και 9 μόνο που έχουμε βάλει το κουμπί ελέγχου 'signal type' στη θέση 'Triangle Wave'.

Η συχνότητα Nyquist F_N είναι και εδώ 50 Hz. Οι συχνότητες, που συνθέτουν το τριγωνικό κύμα φαίνονται στην περιοχή των θετικών συχνοτήτων να εκτείνονται δεξιά από τη συχνότητα του τριγωνικού κύματος στα 5 Hz ως τα 45 Hz. Στην περιοχή των αρνητικών συχνοτήτων, εμφανίζονται οι κατοπτρικές αρνητικές συχνότητες να εκτείνονται πάνω από τη συχνότητα Nyquist, από τα 55 ως τα 95 Hz. Αυτές είναι κατοπτρικά είδωλα των θετικών



Εικόνα 11

συχνοτήτων γύρω από τη συχνότητα Nyquist στα 50 Hz.

Μπορεί να παρατηρήσει κανείς, ότι το τριγωνικό κύμα περιέχει τη βασική συχνότητα του κύματος στα 5 Hz και όλες τις περιττές αρμονικές του, δηλαδή, στα $3 \times 5 = 15$ Hz, $5 \times 5 = 25$ Hz, $7 \times 5 = 35$ Hz, κ.ο.κ., ως τη συχνότητα Nyquist. Η μορφή αυτή είναι ένα γενικό χαρακτηριστικό των τριγωνικών κυμάτων που μας λέει ότι ένα τριγωνικό κύμα συχνότητας f αναλύεται σε συνιστώσες Fourier με συχνότητες περιττά πολλαπλάσια της βασικής συχνότητας του κύματος.

Το μεγαλύτερο φασματικό περιεχόμενο του τριγωνικού κύματος, δηλαδή, το μεγαλύτερο περιεχόμενό του σε συνιστώσες συχνότητες, σε σύγκριση με το ημιτονοειδές κύμα, οφείλεται στον μεγαλύτερο αριθμό υψηλότερων συχνοτήτων, που απαιτούνται, για να συνθέσουμε ένα τριγωνικό κύμα από συνιστώσες συχνότητες.

7. Φάσμα Σήματος

Στα αποτελέσματα του μετασχηματισμού FFT από το 'FFT.vi' του LabVIEW, που δείχνει η Εικ. 8, ενώ οι μονάδες συχνότητας στον οριζόντιο άξονα 'Frequency' έχουν κανονικοποιηθεί πολλαπλασιάζοντας με το διάστημα συχνότητας df , οι μονάδες πλάτους, αντιθέτως, στον κατακόρυφο άξονα 'Amplitude' είναι αυθαίρετες. Οι μονάδες του πλάτους πρέπει να κανονικοποιηθούν διαιρώντας τις τιμές του πλάτους δια του αριθμού N των δειγμάτων (σημείων) του σήματος. Επιπλέον, οι συνιστώσες πέραν της συχνότητας Nyquist $F_N = r/2$ δεν φέρουν καμιά νέα πληροφορία που αφορά το μετασχηματισμό FFT και πρέπει να τις απορρίψουμε.

Σε αυτήν την παράγραφο περιγράφουμε πως επιτυγχάνουμε αυτόματα αυτήν την κανονικοποίηση και την απόρριψη με τα εικονικά όργανα (VI) για φασματική ανάλυση που περιλαμβάνονται στο 'Spectral Analysis' της παλέτας εργαλείων 'Signal Processing' του LabVIEW (Εικ. 1).

Η Εικόνα 12 δείχνει την εμπρόσθια επιφάνεια (α) και το δομικό διάγραμμα (β) του 'Sine Wave Amplitude & Phase Spectrum.vi'. Το εικονικό αυτό όργανο προκύπτει από το 'Sine Wave Generation with FFT.vi' με ακόλουθες τροποποιήσεις:

(Α) Στην εμπρόσθια επιφάνεια (Εικ. 8)

- Σβήνουμε το γράφημα 'FFT'
- Δημιουργούμε δυο γραφήματα με τίτλους 'Amplitude Spectrum' και 'Phase Spectrum'

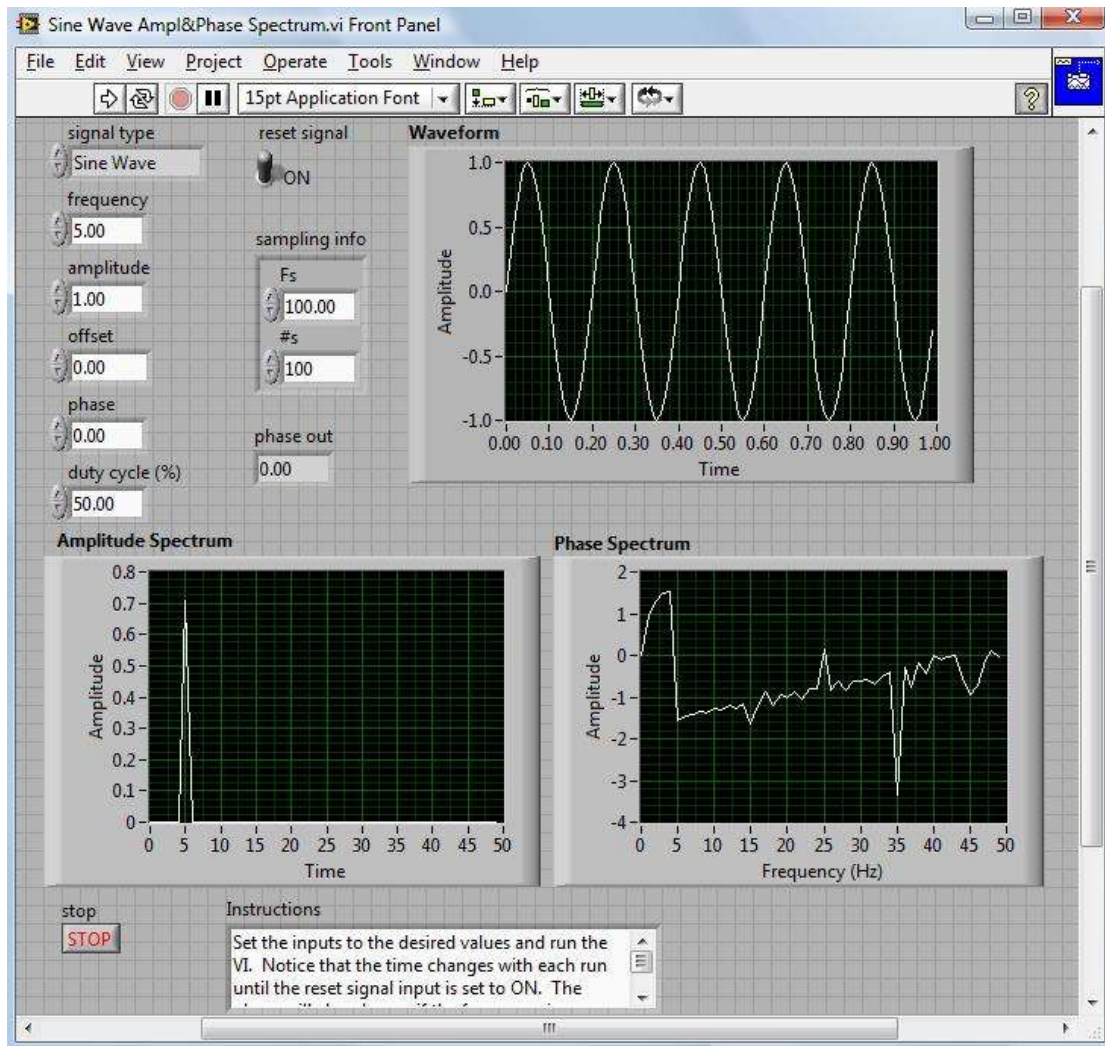
(Β) Στο δομικό διάγραμμα (Εικ. 9)

- αντικαθιστούμε το 'FFT.vi' με το 'Amplitude and Phase Spectrum.vi' κάνοντας δεξί κλικ πάνω στο 'FFT.vi' και επιλέγοντας

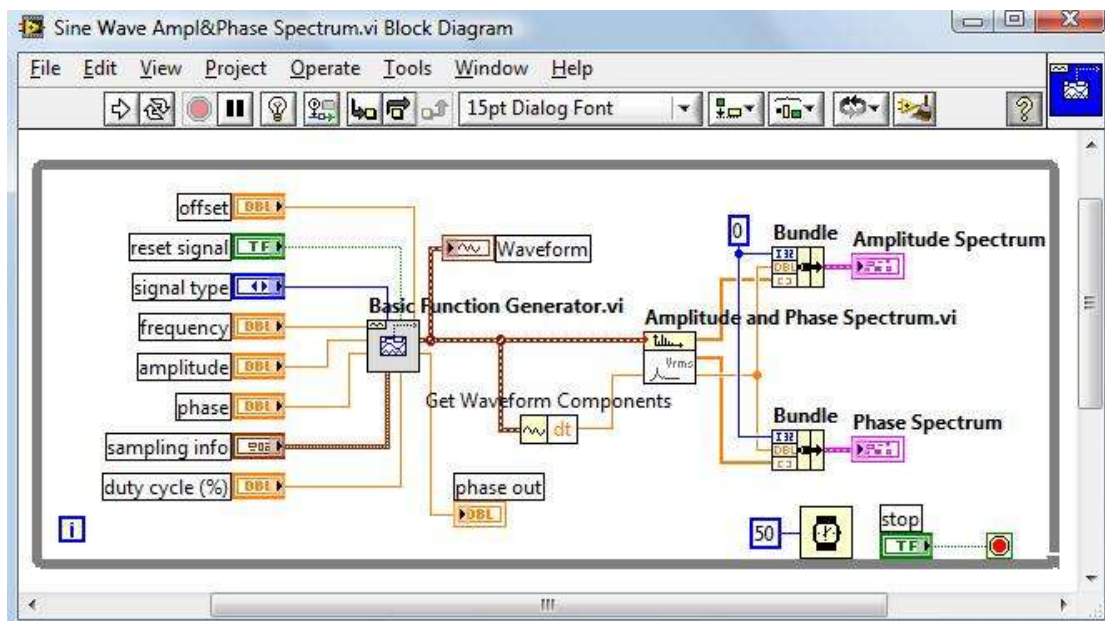
Replace → Spectral Analysis Palette → Amplitude and Phase Spectrum.vi,

- διαγράφουμε το 'Complex to Polar.vi', 'Build Waveform', επίσης, το 'Unbundle By Name', 'Divide' και το δείκτη 'df'.
- Κάνοντας δεξί κλικ στην έξοδο 'signal out' του 'Basic Function Generator.vi' επιλέγουμε

Waveform Palette → Get Waveform Components



(α)



(β)

Εικόνα 12

και κάνοντας αριστερό κλικ πάνω στο 'Get Waveform Components' επιλέγουμε 'dt' που δίνει το το διάστημα δειγματοληψίας της παραγόμενης κυματομορφής. Το συνδέουμε την είσοδο 'dt' κάτω αριστερά στο εικονίδιο του 'Amplitude and Phase Spectrum.vi'.

- Τοποθετούμε δυο φορές το στοιχείο 'Bundle' ακολουθώντας τη σειρά

Functions → Programming → Cluster, Class, & Variant → Bundle,

- Κάνοντας δεξί κλικ πάνω στο 'Bundle, επιλέγουμε add input. Στην πάνω είσοδο του κάθε στοιχείου 'Bundle' συνδέουμε τη σταθερά 0 με την ακολουθία

Functions → Mathematics → Numeric → Numeric Constant,

- Συνδέουμε την επάνω έξοδο 'Amp Spectrum Mag (Vrms)' του 'Amplitude and Phase Spectrum.vi' στην κάτω είσοδο του πάνω 'Bunde',
- Συνδέουμε τη μεσαία έξοδο 'Amp Spectrum Phase (radians)' του 'Amplitude and Phase Spectrum.vi' στην κάτω είσοδο του κάτω 'Bunde',
- Συνδέουμε την κάτω έξοδο 'df' του 'Amplitude and Phase Spectrum.vi' στις μεσαίες εισόδους των δύο 'Bunde',
- συνδέουμε τα δυο γραφήματα 'Amplitude Spectrum' και 'Phase Spectrum' με τα αντίστοιχα στοιχεία 'Bunde'.

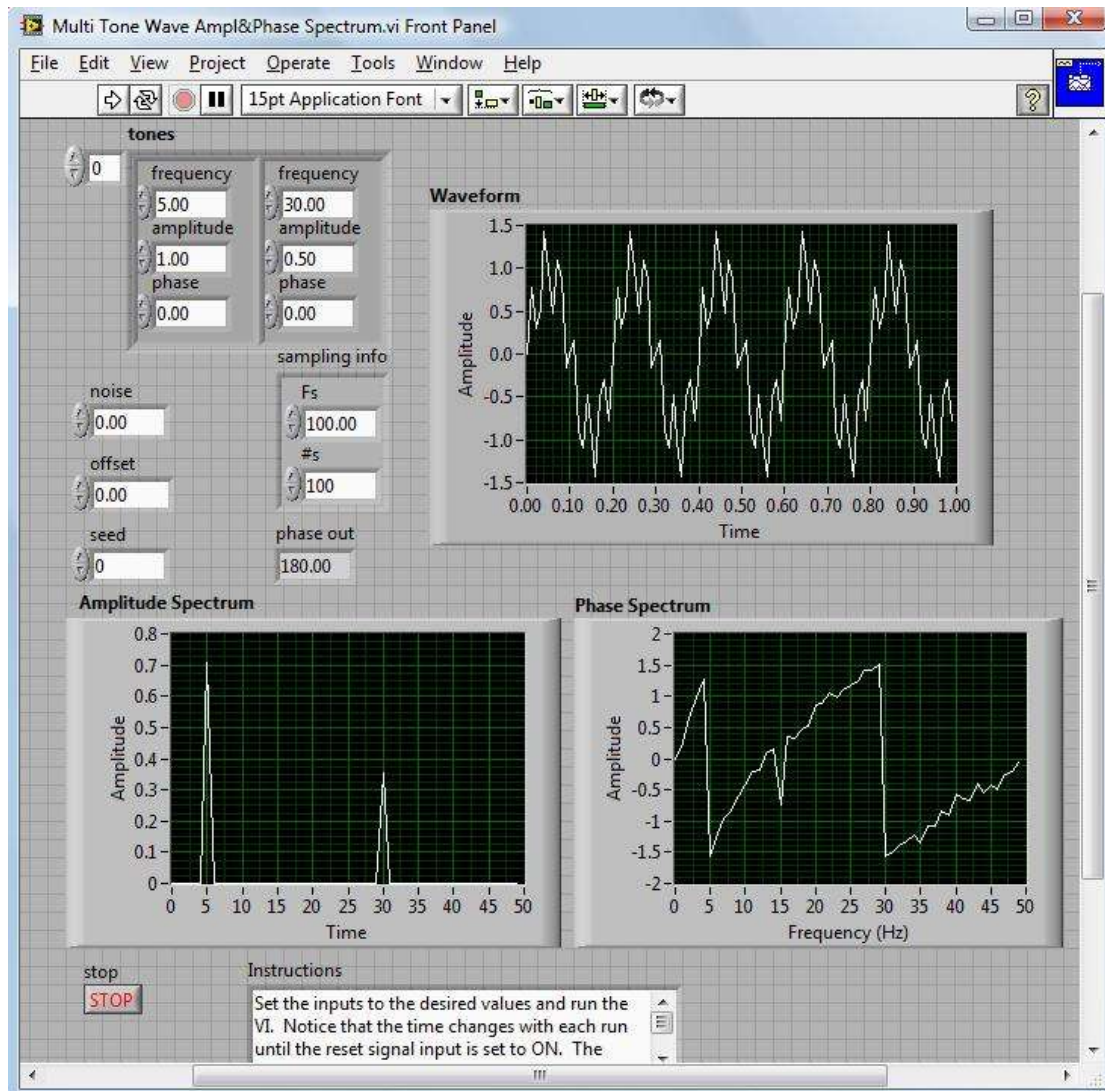
Για τις ίδιες τιμές των παραμέτρων, όπως στην Εικ. 8, το προκύπτει φάσμα συχνοτήτων έχει την ίδια μορφή, αλλά με τις κατάλληλες μονάδες για το πλάτος και τη συχνότητα. Ο άξοντας της συχνότητας περιορίζεται από το 0 ως τη συχνότητα Nyquist $F_N = 50$ (Hz). Η Εικ. 12 (α) δείχνει, επίσης, το φάσμα των φάσεων του ημιτονοειδούς κύματος.

Η Εικ. 13 παρουσιάζει την εμπρόσθια επιφάνεια και η Εικ. 14 το δομικό διάγραμμα του εικονικού οργάνου 'Multi Tone Wave Amplitude & Phase Spectrum.vi' με το φάσμα του αθροίσματος δύο ημιτονοειδών κυμάτων. Το δομικό διάγραμμα του εικονικού οργάνου 'Multi Tone Wave Amplitude & Phase Spectrum.vi', (Εικ. 14) βασίζεται στο 'Sine Wave Amplitude & Phase Spectrum.vi' με αντικατάσταση του 'Basic Function Generation.vi' από το 'Tones and Noise Waveform.vi'. Κάνοντας δεξί κλικ πάνω στο 'Basic Function Generation.vi', επιλέγουμε

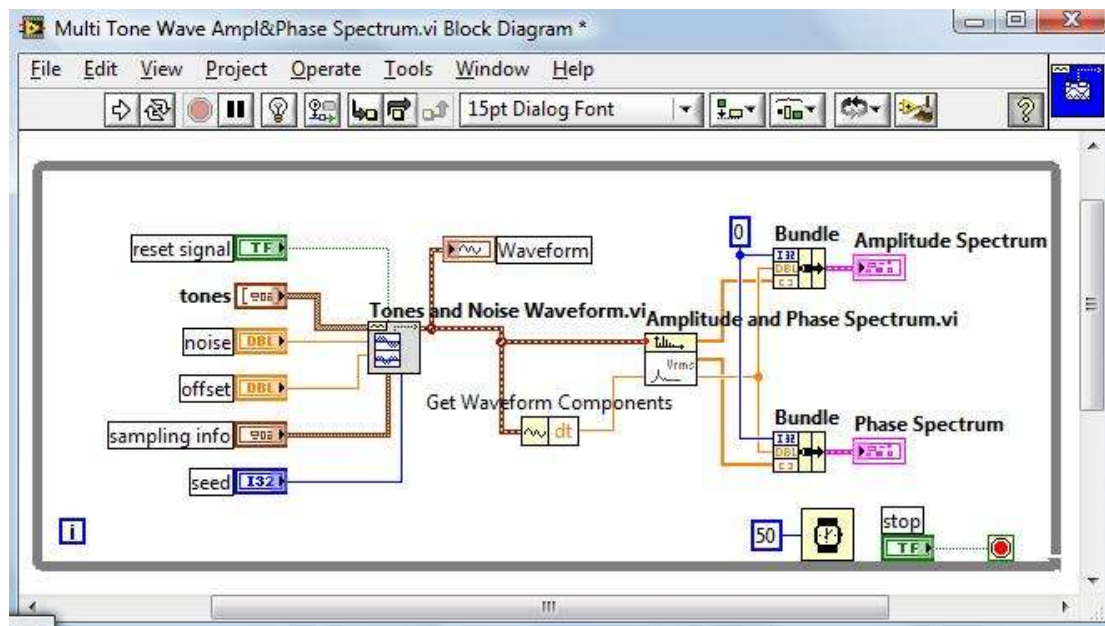
Replace → Waveform Generation Palette → Tones and Noise Waveform.vi

Διαγράφουμε τα τερματικά 'signal type', 'amplitude', 'phase' και 'duty cycle', που δεν υπάρχουν στις εισόδους του 'Tones and Noise Waveform.vi' και προσθέτουμε τα κουμπιά ελέγχου 'tones' και 'seed'.

Οι συχνότητες των δύο προστιθέμενων ημιτονοειδών σημάτων, 5 (Hz) και 30 (Hz), εμφανίζονται στη γραφική παράσταση του φάσματος του πλάτους (amplitude spectrum) της Εικ. 13. Τα πλάτη των δύο αυτών συνιστωσών κυμάτων επιλέγονται 1 και 0.5 μονάδες, αντίστοιχα.

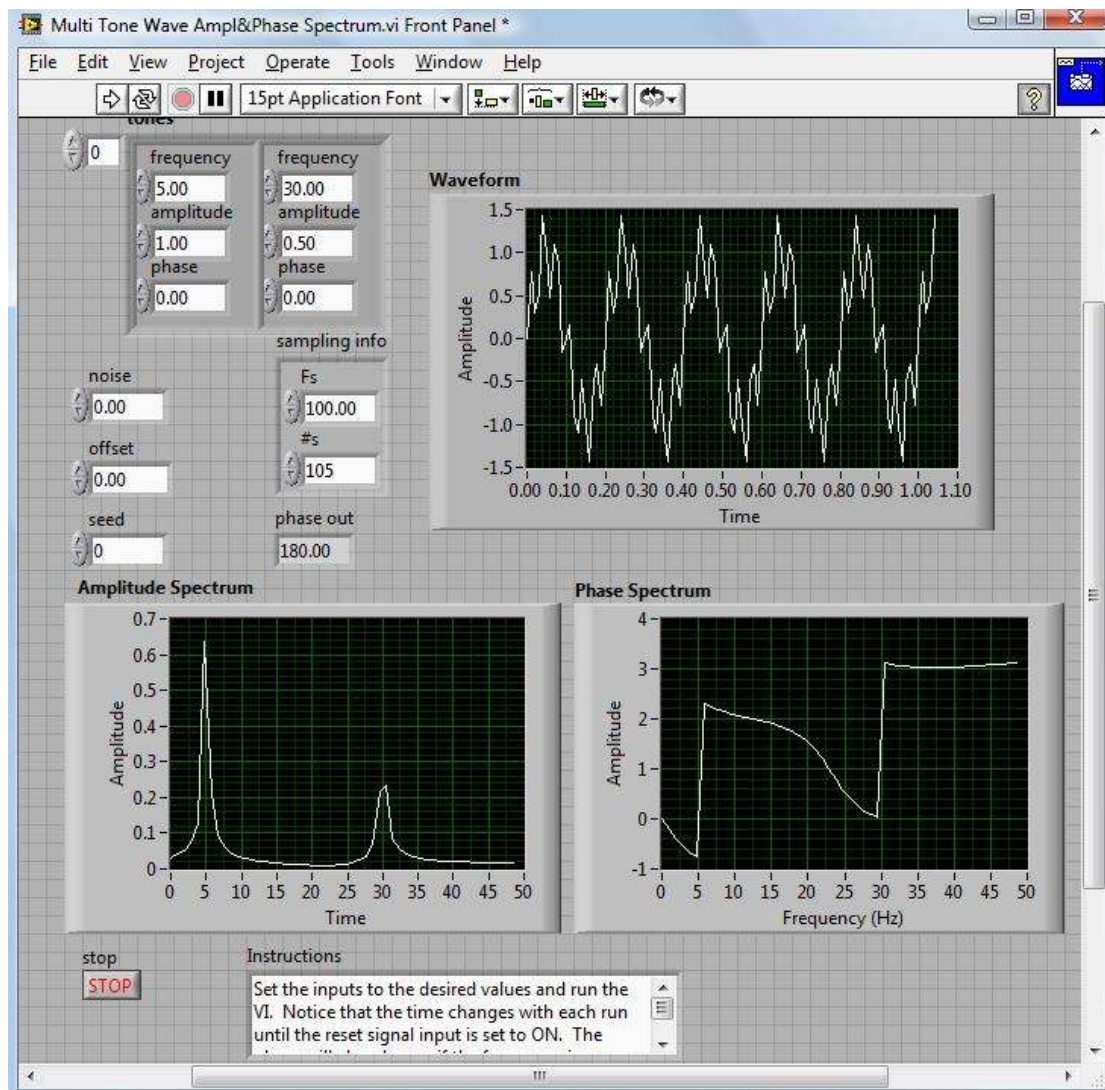


Εικόνα 13



Εικόνα 14

Η Εικ. 15 είναι η ίδια περίπτωση των δύο προστεθέντων ημιτονοειδών σημάτων, 5 [Hz] και 30 [Hz], αλλά για ένα αριθμό δειγμάτων (#s) 105. Αυτή η επιλογή έχει σαν αποτέλεσμα την εμφάνιση 5.25 κύκλων για το πρώτο ημιτονοειδές κύμα και 31.5 κύκλων για το δεύτερο ημιτονοειδές κύμα (βλ. υποσημείωση στη σελίδα 13), δηλαδή, μη-ακέραιων αριθμών κύκλων. Το γράφημα του φάσματος του πλάτους δείχνει φασματική διαρροή γύρω από τις δύο συχνότητες, παρ' ότι οι συχνότητες αυτές είναι ίδιες με την περίπτωση, που δείχνει η Εικ. 13. Στην επόμενη παράγραφο, θα μελετήσουμε την επιβολή παραθύρου στο σήμα (signal windowing), σαν μέθοδο αποφυγής της φασματικής διαρροής.



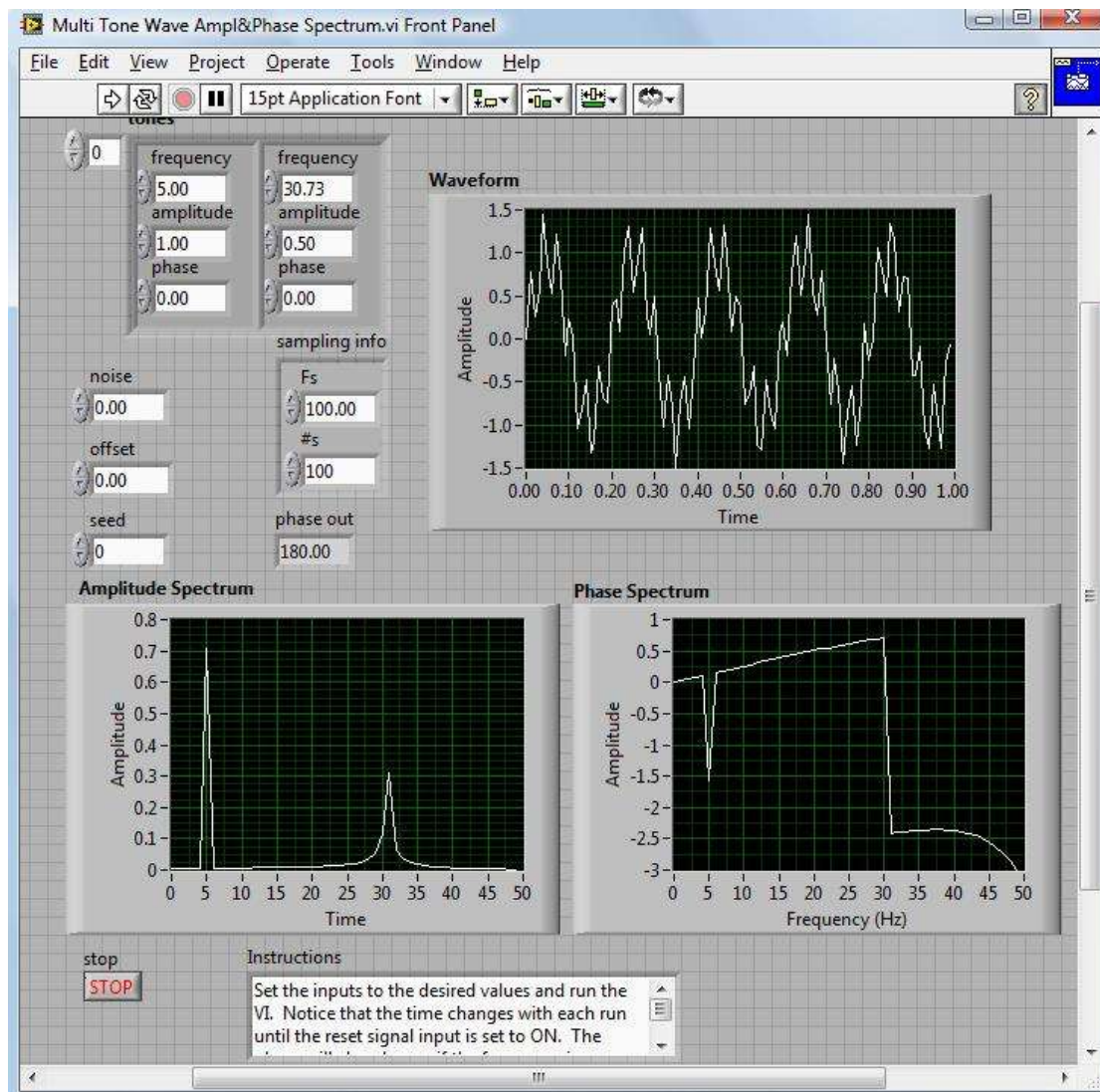
Εικόνα 15

8. Παράθυρα Εξομάλυνσης

Η φασματική διαρροή, που παρουσιάστηκε με τα παραδείγματα των Εικ. 10 και 15, συμβαίνει όταν η διάρκεια της δειγματοληψίας δεν είναι ίση με έναν ακέραιο αριθμό κύκλων του περιοδικού σήματος. Η φασματική διαρροή έχει σαν αποτέλεσμα τη διαπλάτυνση των φασματικών κορυφών σε σύγκριση με τα φάσματα των σημάτων, που

περιέχουν έναν ακέραιο αριθμό κύκλων στη διάρκεια της δειγματοληψίας. Η φασματική διαρροή παραμορφώνει το φάσμα συχνοτήτων ενός σήματος και πρέπει να εξαλείφεται.

Στην πράξη, είναι αναπόφευκτο, μερικές συνιστώσες συχνότητες να αναπαριστώνται, στη διάρκεια της δειγματοληψίας, με μη ακέραιο αριθμό κύκλων. Το παράδειγμα της Εικ. 13 δείχνει ότι, για αριθμό δειγμάτων $\#s = 100$, αμφότερα τα ημιτονοειδή κύματα έχουν ακέραιο αριθμό κύκλων*, αλλά αν αλλάζαμε τη συχνότητα των 30 Hz σε, ας πούμε, 30.73 Hz (βλ. Εικ. 16) δεν θα μπορούσαμε να βρούμε μια διάρκεια δειγματοληψίας, για την οποία



Εικόνα 16 Η συνιστώσα των 5 Hz αναπαράγεται με ακέραιο αριθμό κύκλων στο γράφημα 'Waveform', γι'αυτό η φασματική της κορυφή δεν παρουσιάζει παραμόρφωση. Αντιθέτως, η συνιστώσα των 30.73 Hz αναπαράγεται με μη ακέραιο αριθμό κύκλων οπότε η φασματική της κορυφή δεν παρουσιάζει παραμόρφωση λόγω φασματικής διαρροής.

* Η συνιστώσα 5Hz αναπαριστάνεται με $\frac{100}{100} \cdot 5 = 5$ κύκλους, ενώ η συνιστώσα 30Hz με $\frac{100}{100} \cdot 30 = 30$ κύκλους.

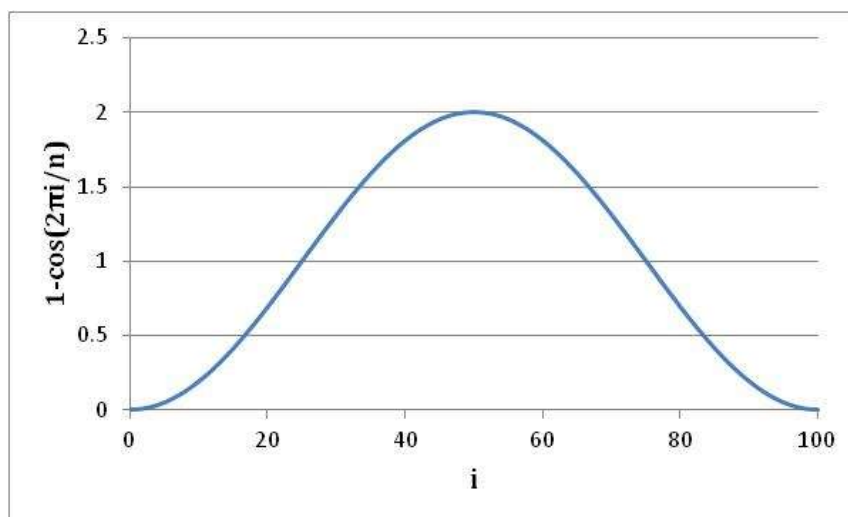
αμφότερες οι συχνότητες θα είχαν ακέραιο αριθμό δειγμάτων.

Τα παράθυρα εξομάλυνσης αναιρούν τη φασματική διαρροή, μειώνοντας τη συνεισφορά των άκρων του σήματος στη διάρκεια της δειγματοληψίας. Έτσι, μειώνονται οι συνέπειες του μη ακέραιου αριθμού κύκλων στη φασματική ανάλυση. Μπορεί να δει κανείς ένα παράθυρο εξομάλυνσης σαν την επιβολή μιας συνάρτησης βάρους στις τιμές του σήματος με το χρόνο, με μειούμενο βάρος των τιμών, καθώς πλησιάζουμε στα άκρα του παραθύρου.

Χρησιμοποιώντας, για παράδειγμα, ένα τυπικό παράθυρο εξομάλυνσης, όπως το παράθυρο Hanning, οι τιμές μέτρησης του σήματος x_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$) πολλαπλασιάζονται επί τη συνάρτηση $1 - \cos(2\pi i/n)$

$$0.5 \cdot x_i \cdot \left(1 - \cos \frac{2\pi i}{n}\right)$$

Καθώς η συνάρτηση $1 - \cos(2\pi i/n)$ τείνει στο 0, για $i \rightarrow 0$ και $i \rightarrow n-1$ (Εικ. 17), δηλαδή, πλησιάζοντας στα δύο άκρα της δειγματοληψίας, οι τιμές του γινομένου $0.5 \cdot x_i \cdot \left(1 - \cos \frac{2\pi i}{n}\right)$ θα τείνουν, επίσης, στο 0. Το αποτέλεσμα είναι η διόρθωση των συνιστωσών συχνοτήτων, που λαμβάνονται από τη φασματική ανάλυση, με τίμημα την τροποποίηση του πλάτους των φασματικών γραμμών.



Εικόνα 17

Η Εικόνα 18 δείχνει συγκριτικά τα αποτελέσματα της φασματικής ανάλυσης ενός σήματος με την επιβολή παραθύρου εξομάλυνσης και χωρίς αυτήν. Το δομικό διάγραμμα του 'Windowed Sine Wave Amplitude & Phase Spectrum.vi', που παρουσιάζεται στην Εικ. 19, προκύπτει από το 'Sine Wave Amplitude & Phase Spectrum.vi' της Εικ. 12, ως ακολούθως:

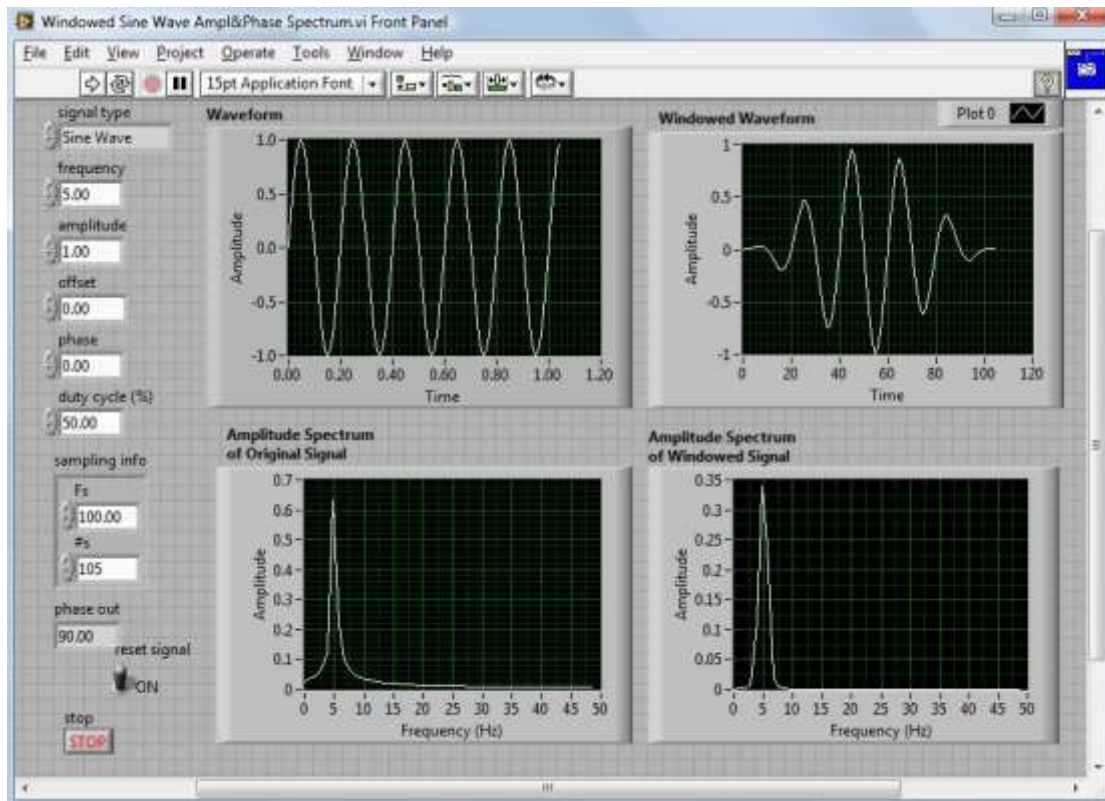
- εισάγουμε ένα παράθυρο Hanning

Functions → Signal Processing → Windows → Hanning Window.vi

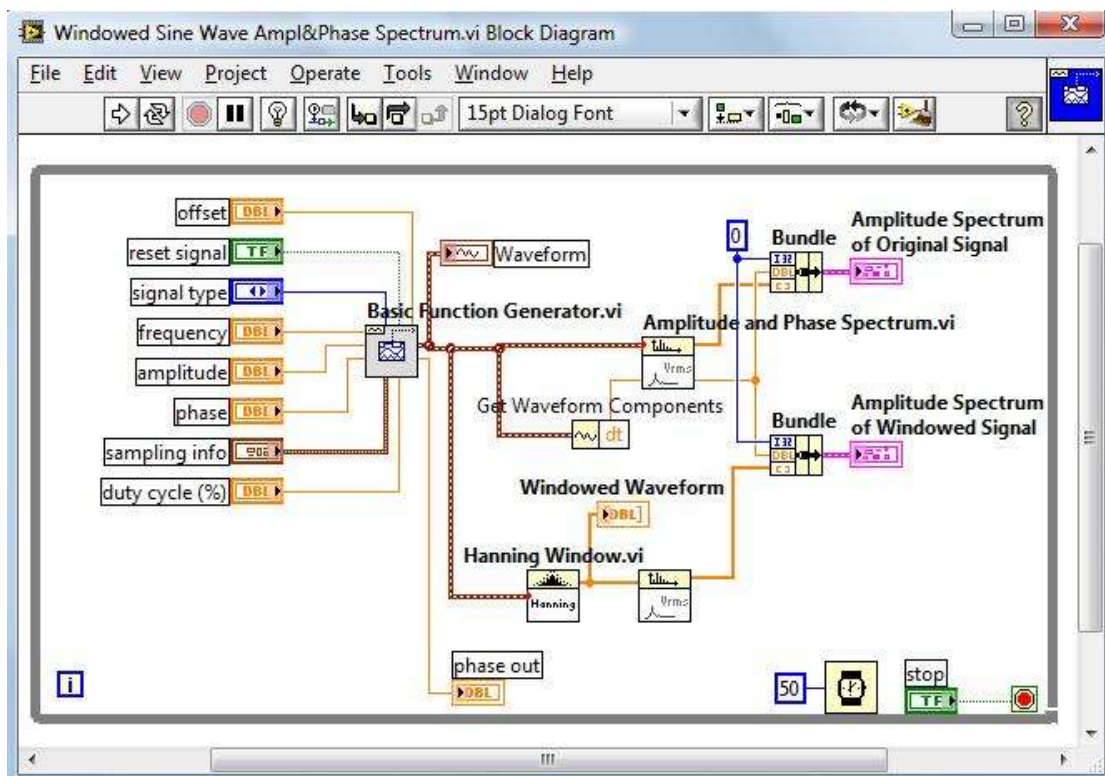
και συνδέουμε την είσοδό του 'X' με την έξοδο του 'Basic Function Generator.vi'.

- Εισάγουμε (άλλο) ένα 'Amplitude and Phase Spectrum.vi'

Replace → Spectral Analysis Palette → Amplitude and Phase Spectrum.vi



Εικόνα 18



Εικόνα 19

και συνδέουμε την είσοδό του 'Signal (V)' με την έξοδο 'Windowed X' του 'Hanning Window.vi'

- την έξοδο 'Amp Spectrum Mag (Vrms)' του 'Amplitude and Phase Spectrum.vi' συνδέουμε στην κάτω είσοδο του κάτω στοιχείου 'Bundle'
- Μετονομάζουμε το γράφημα 'Phase Spectrum' σε 'Amplitude Spectrum of Windowed Signal' (δηλαδή, 'Φάσμα Πλατών του Σήματος μετά το Παράθυρο')
- Επίσης, μετονομάζουμε το γράφημα 'Amplitude Spectrum' σε 'Amplitude Spectrum of Original Signal' (δηλαδή, 'Φάσμα Πλατών του Αρχικού Σήματος')
- Τέλος, στην εμπρόσθια επιφάνεια του εικονικού οργάνου, εισάγουμε ένα γράφημα

Controls → Graph Indicators → Graph

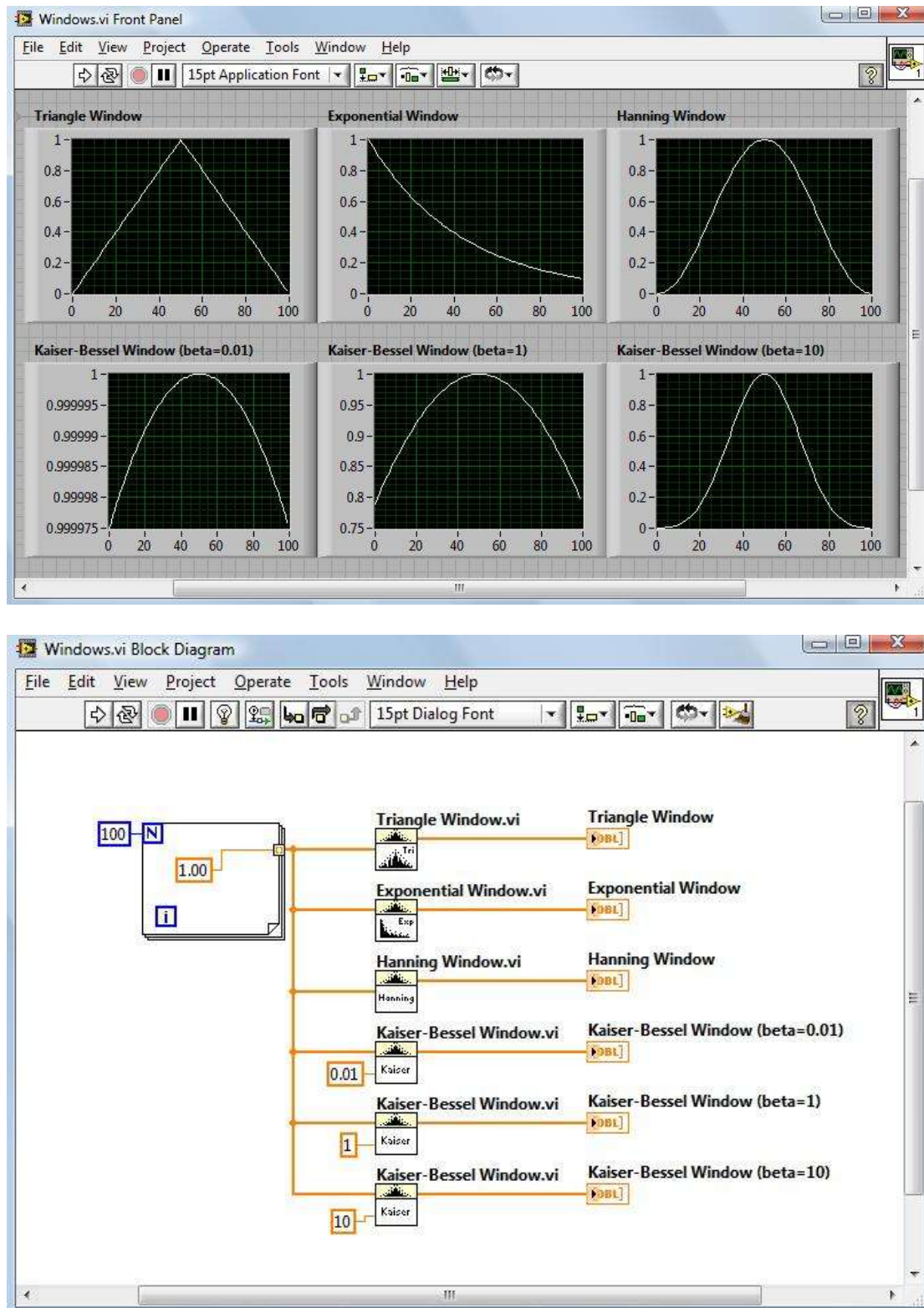
και το ονομάζουμε 'Windowed Waveform'

- Επιστρέφοντας στο δομικό διάγραμμα, συνδέουμε την είσοδο του τερματικού, που αντιστοιχεί στο γράφημα 'Windowed Waveform', με την έξοδο του 'Hanning Window.vi'.

Τα αποτελέσματα φαίνονται στην εμπρόσθια επιφάνεια της Εικ. 18, για τις ίδιες τιμές των παραμέτρων εισόδου, όπως στην Εικ. 12(α), εκτός από τον αριθμό δειγμάτων, $\#s = 105$, ο οποίος έχει σαν αποτέλεσμα έναν μη ακέραιο αριθμό κύκλων στο γράφημα 'Waveform', δηλαδή, προκαλεί τη φασματική διαρροή, που φαίνεται στη διεύρυνση της φασματικής γραμμής στο 'Amplitude Spectrum of Original Signal'. Στο πεδίο του χρόνου, το παράθυρο Hanning τροποποιεί το ημιτονοειδές κύμα σε ένα ημιτονοειδές κύμα με αποσβεσνυόμενα άκρα (σύγκρινε τα γραφήματα 'Waveform' και 'Windowed Waveform'). Στο φάσμα πλάτους του ημιτονοειδούς κύματος μετά το παράθυρο (βλ. γράφημα 'Amplitude Spectrum of Windowed Signal') η φασματική διαρροή έχει αναιρεθεί, με αποτέλεσμα το φάσμα πλάτους του σήματος να μοιάζει με το φάσμα της Εικ. 12(α), το οποίο είχε ακέραιο αριθμό κύκλων στη διάρκεια της δειγματοληψίας.

Ενώ το Hanning είναι ένα παράθυρο γενικής χρήσεως, άλλα παράθυρα χρησιμοποιούνται σε πιο ειδικές περιπτώσεις. Για παράδειγμα, το ορθογώνιο παράθυρο (rectangular window) είναι κατάλληλο για μεταβατικά σήματα, που έχουν διάρκεια μικρότερη από τη διάρκεια του παραθύρου. Το παράθυρο Kaiser-Bessel έχει το πλεονέκτημα του ρυθμιζόμενου σχήματος, αλλάζοντας την παράμετρο βήτα (beta).

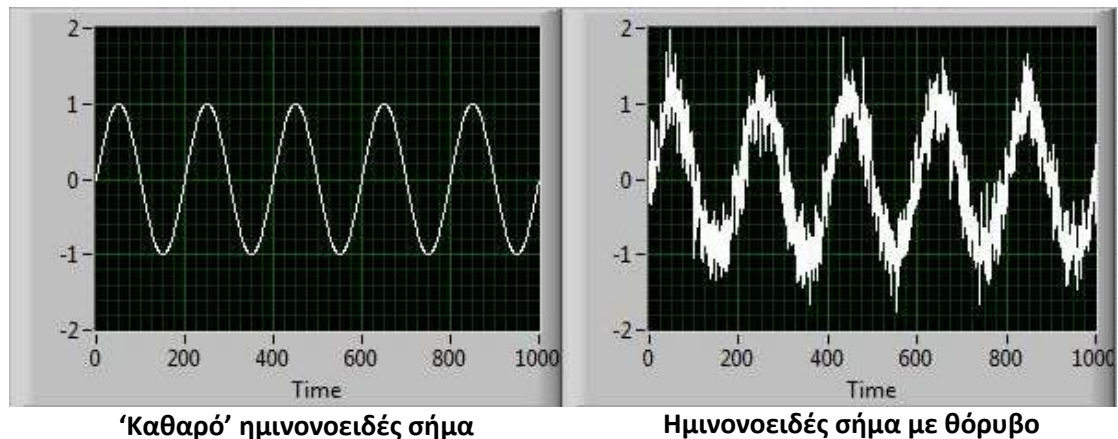
Στην Εικ. 20 παρακάτω, δείχνονται μερικά από τα σημαντικότερα παράθυρα της παλέτας εργαλείων 'Signal Conditioning' του Lab VIEW.



Εικόνα 20 Τα βασικότερα παράθυρα εξομάλυνσης του Lab VIEW (Dan Nesculescu “Mechatronics”, Prentice Hall.

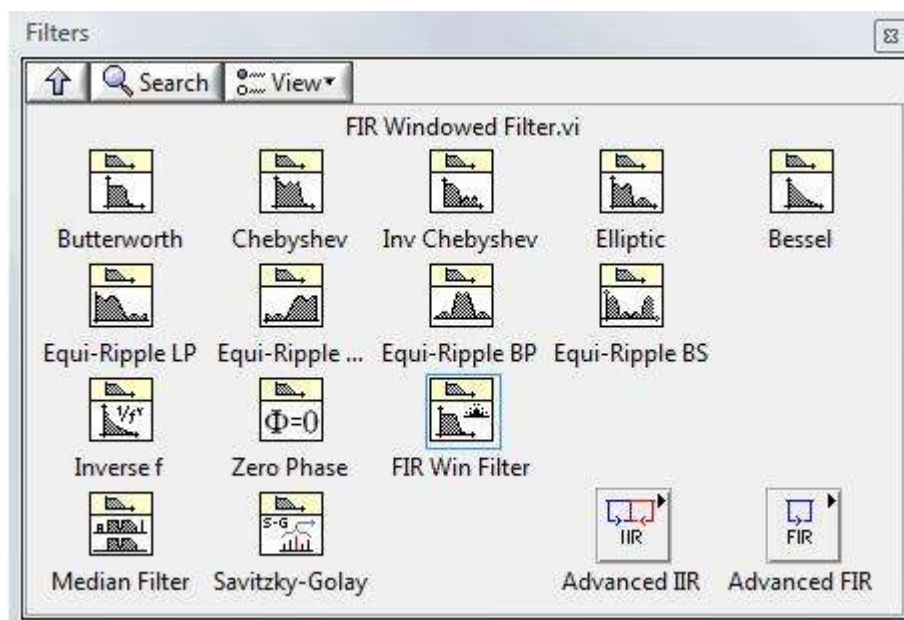
9. Ψηφιακά Φίλτρα

Στις πρακτικές εφαρμογές, τα σήματα που μετράμε δεν είναι ‘καθαρά’, με την έννοια ότι περιέχουν λιγότερο ή περισσότερο θόρυβο (βλ. Εικ. 21) και, επίσης, περιέχουν συνιστώσες συχνότητες μη επιθυμητές. Η απομάκρυνση του θόρυβου και ο διαχωρισμός των χαμηλότερων και των υψηλότερων συνιστωσών συχνοτήτων ενός σήματος απαιτούν τη χρήση διαφόρων φίλτρων.



Εικόνα 21

Η Εικ. 22 δείχνει το μενού με τα διάφορα ψηφιακά φίλτρα, που περιλαμβάνονται στην παλέττα εργαλείων ‘Signal Processing’ του Lab VIEW.



Εικόνα 22 Το μενού με τα ψηφιακά φίλτρα του Lab VIEW.

Το μενού ‘Filters’ ανοίγεται με την ακολουθία

Functions → Signal Processing → Filters

Μερικά από τα συχνότερα χρησιμοποιούμενα ψηφιακά φίλτρα είναι:

- (α) το φίλτρο του μέσου (Median Filter.vi),
- (β) το φίλτρο μηδενικής φάσης (Zero Phase Filter.vi),
- (γ) το φίλτρο Butterworth,
- (δ) το φίλτρο Chebyshev,
- (ε) το φίλτρο Bessel, κ.α.

Τα ψηφιακά φίλτρα την επεξεργασία σήματος διακρίνονται σε δυο μεγάλους κατηγορίες: τα φίλτρα FIR (Finite Impulse Response) και τα φίλτρα IIR (Infinite Impulse Response). Ένα φίλτρο FIR είναι ένα φίλτρο του οποίου η αντίδραση σε κάθε παλμό σήματος έχει πεπερασμένη διάρκεια και μετά γίνεται μηδέν. Σε αντίθεση, ένα φίλτρο IIR μπορεί να έχει εσωτερική ανάδραση ώστε να συνεχίσει να βγάζει έξοδο και μετά το τέλος του παλμού εισόδου αποσβεννύμενο σιγά-σιγά.

Στο LabVIEW υπάρχουν διάφορα φίλτρα IIR (Butterworth, Chebyshev, Elliptic, Bessel, κ.λ.π.). Τα φίλτρα IIR περιγράφονται με την εξίσωση διαφορών ('βλ. λήμμα 'IIR Filters' στο Lab VIEW Help):

$$y_i = \frac{1}{a_0} \left(\sum_{j=0}^{N-1} b_j \cdot x_{i-j} - \sum_{k=1}^{M-1} a_k \cdot y_{i-k} \right)$$

όπου, b_j και N είναι η ομάδα και το πλήθος των ευθέων συντελεστών (forward coefficients), αντίστοιχα και a_k και M είναι η ομάδα και το πλήθος, αντίστοιχα, των ανάστροφων συντελεστών του φίλτρου. x_i είναι οι διακριτές τιμές (δείγματα) του σήματος εισόδου και y_i είναι οι φιλτραρισμένες τιμές εξόδου.

Κατά τη λειτουργία ενός ψηφιακού φίλτρου, ο υπολογιστής υπολογίζει με μεγάλη ταχύτητα, από τις τιμές x_i του σήματος εισόδου, τους συντελεστές b_j και a_k και, απ'αυτούς βγάζει τις τιμές y_i της φιλτραρισμένης εξόδου. Για $N = 1$ και $M = 2$, παίρνουμε ένα φίλτρο πρώτης τάξης, του οποίου, συνήθως, ο συντελεστής $a_0 = 1$.

Ένα πολύ καλό αποτέλεσμα φιλτραρίσματος μπορούμε να επιτύχουμε χρησιμοποιώντας ένα υψηλού βαθμού φίλτρο Butterworth IIR. Η Εικόνα 23 δείχνει το πρόγραμμα 'Noisy Sine Wave with Butter IIR Filter.vi' του LabVIEW. Το δομικό διάγραμμα στην Εικ. 24 προκύπτει από το δομικό διάγραμμα του εικονικού οργάνου 'Multi Tone Wave Ampl&Phase Spectrum.vi' των Εικ. 13 και 14 με αντικατάσταση του 'Amplitude and Phase Spectrum.vi' από το 'Butterworth Filter.vi' και τις εξής αλλαγές:

- Κάνοντας δεξί κλικ στην πάνω είσοδο 'filter type' του 'Butterworth Filter.vi', επιλέγουμε

Create → Constant

Αφήνουμε την τιμή 'Lowpass' που εμφανίζεται (δηλαδή, φίλτρο που επιτρέπει μόνο τις χαμηλές συχνότητες ή, αλλιώς, χαμηλοδιαπερατό φίλτρο).

- Κάνοντας δεξί κλικ στην κάτω είσοδο 'order' του 'Butterworth Filter.vi', επιλέγουμε

Create → Constant

στο σταθερό ακέραιο που εμφανίζεται δίνουμε την τιμή 5 (δηλαδή, φίλτρο 5^{ης} τάξης).

- Διαγράφουμε το γράφημα 'Waveform' και το 'Get Waveform Components'
- Εισάγουμε το εργαλείο 'Unbundle By Name'

Functions → Programming → Cluster, Class & Variant → Unbundle By Name

και το συνδέουμε με το 'sampling info' του 'Tones and Noise Waveform.vi' και την έξοδό του συνδέουμε με την είσοδο 'sampling freq: fs' του 'Butterworth Filter.vi'.

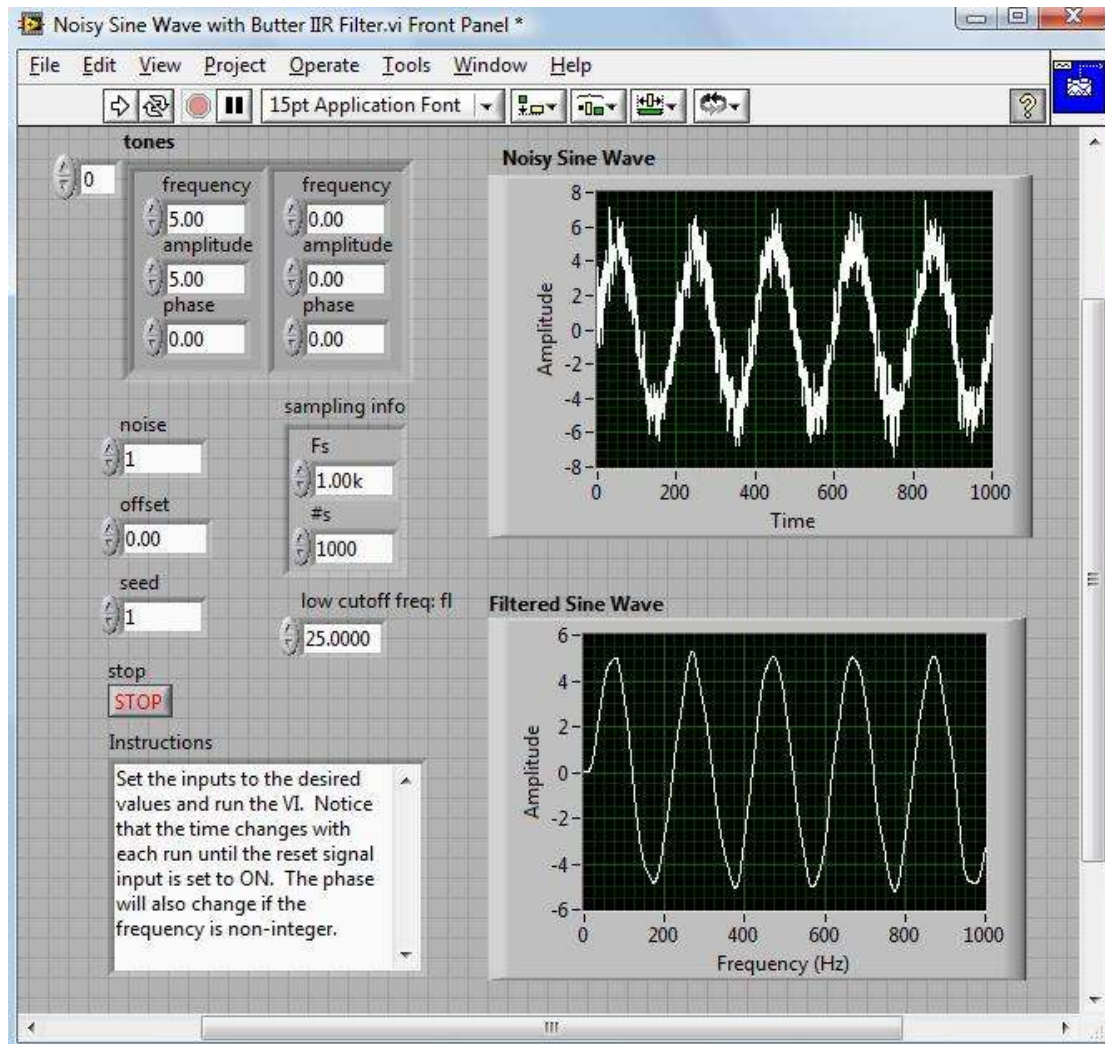
- Κάνοντας δεξί κλικ στην είσοδο 'low cutoff freq: fl' του Butterworth Filter.vi', επιλέγουμε

Create → Variable

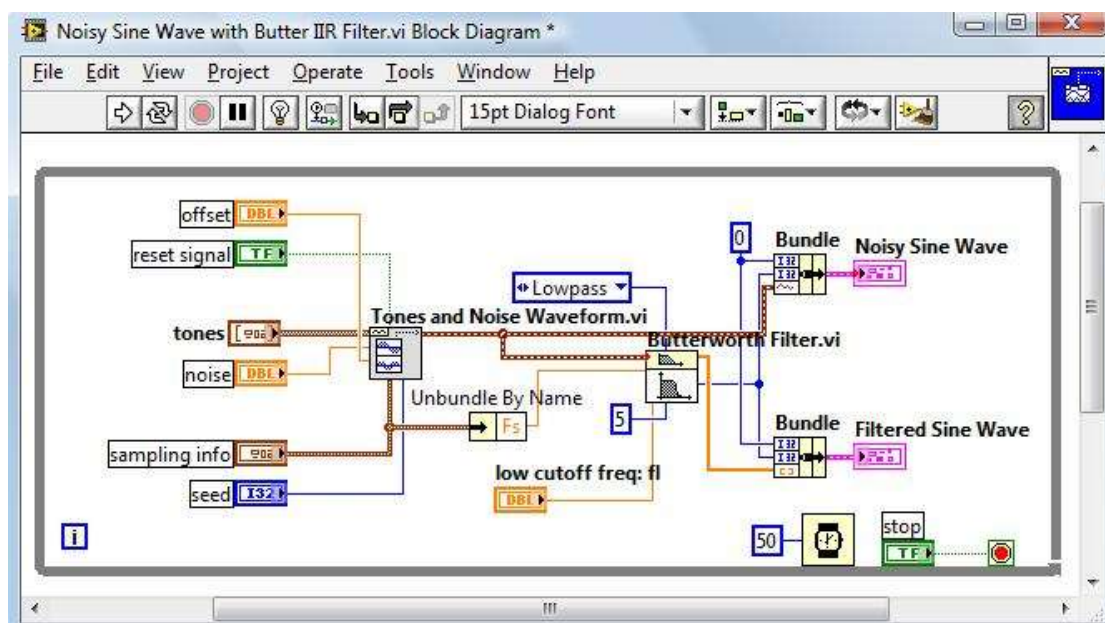
και δημιουργούμε στην εμπρόσθια επιφάνεια το αντίστοιχο το κουμπί ελέγχου από το οποίο επιλέγουμε τη συχνότητα αποκοπής (cutoff frequency) πάνω από την οποία θέλουμε το φίλτρο να αποκόπτει όλες τις συνιστώσες συχνότητες.

- Την έξοδο 'signal out' του 'Tones and Noise Waveform.vi' συνδέουμε με την κάτω είσοδο του πάνω στοιχείου 'Bundle'.
- Μετονομάζουμε το γράφημα 'Amplitude Spectrum' σε 'Noisy Sine Wave' και το γράφημα 'Phase Spectrum' σε 'Filtered Sine Wave'.

Γι' αυτό το φίλτρο, επιλέγονται ο βαθμός 5 και η συχνότητα αποκοπής $f_c = 25$ [Hz]. Αυτή η συχνότητα αποκοπής επιτρέπει τη διέλευση του ημιτονοειδούς κύματος των 10 Hz. Η έξοδος του φίλτρου Butterworth Filter.vi παρουσιάζεται στη γραφική παράσταση με τίτλο Butterworth Filter for Noisy Sine Wave, στην Εικ. 6.67(α). Ένα φίλτρο Butterworth 5^{ου} βαθμού εξαλείφει, από ένα ημιτονοειδές κύμα, το λευκό θόρυβο Gauss, αλλά, προκαλεί μερική παραμόρφωση στο αρχικό τμήμα του κύματος.



Εικόνα 23



Εικόνα 24