

Περιεχόμενα

- (1) Ανάλυση ευαισθησίας
- (2) Δυϊκό πρόβλημα (κανονική μορφή)
- (3) Δυναμικός προγραμματισμός
- (4) Ανάλυση αποφάσεων

1. Ανάλυση ευαισθησίας

Λυμένο παράδειγμα 7 από το βιβλίο, σελ.85, λύση σελ.328

Το πρόβλημα ΓΠ είναι το:

$\max z = 3x_1 + 8x_2$	Αντικ.συνάρτηση
$0,1x_1 + 0,3x_2 \leq 240$	Γραμ.Περιορισμός (1)
$x_1 + 2x_2 \leq 2000$	Γραμ.Περιορισμός (2)
$x_1, x_2 \geq 0$	Περιορισμός μη αρνητικότητας(3)

Η βέλτιστη τιμή της αντικ.συνάρτησης βρέθηκε και είναι $z=6800$, με βέλτιστες λύσεις: $x_1=1200$, $x_2=400$.

Εύρεση ορίων εντός των οποίων μπορεί να περιστραφεί η ευθεία της αντικ.συνάρτησης χωρίς να αλλάξει η βέλτιστη λύση (ανάλυση ευαισθησίας συντελεστών c_1, c_2)

I. Ανάλυση ευαισθησίας συντελεστή c_1 .

Με σταθερό τον συντελεστή $c_2=8$ της x_2 , (δηλαδή η αντικ.συνάρτηση είναι: $c_1x_1 + 8x_2$)

Αν c_2 σταθερό και ίσο με 8, στην $c_1x_1 + 8x_2 = 6800$, (βρίσκουμε την κλίση της ευθείας **λύνοντας ως προς x_2** : $8x_2 = -c_1x_1 + 6800 \Rightarrow x_2 = \frac{-c_1}{8}x_1 + 6800/8$, δηλαδή η κλίση είναι: $-c_1/8$. Επίσης:

(1) $0,1x_1 + 0,3x_2 = 240$, οπότε $0,3x_2 = -0,1x_1 + 240 \Rightarrow x_2 = \frac{-0,333}{0,1}x_1 + 240/0,1$ κλίση ευθείας $-0,333$.

(2) $x_1 + 2x_2 = 2000$, οπότε $2x_2 = -x_1 + 2000 \Rightarrow x_2 = \frac{-0,5}{2}x_1 + 2000/2$ κλίση ευθείας $-0,5$

Το σημείο που είναι η τομή των παραπάνω ευθειών, θα παρέχει τη βέλτιστη λύση αν η κλίση της ευθείας που αλλάζει (αντ.συνάρτηση) είναι ανάμεσα στις κλίσεις των ευθειών των δεσμευτικών περιορισμών

$-0,5 \leq (-c_1/8) \leq -0,333$, οπότε (πολλαπλασιάζοντας με το -8): $4 \geq c_1 \geq 2,667$, οπότε **$2,667 \leq c_1 \leq 4$** .

Τελικό συμπέρασμα: με σταθερό το κέρδος της κούκλας B, το κέρδος της A μπορεί να μειωθεί ως 2,667 ή να αυξηθεί ως τα 4 χωρίς να αλλάξει η βέλτιστη λύση.

II. Ανάλυση ευαισθησίας συντελεστή c_2 .

Με σταθερό τον συντελεστή $c_1=3$ της x_1 , (δηλαδή η αντικ.συνάρτηση είναι: $3x_1 + c_2x_2$)

Αν c_1 σταθερό και ίσο με 3, στην $3x_1 + c_2x_2 = 6800$, (βρίσκουμε την κλίση της ευθείας **λύνοντας ως προς x_1** : $3x_1 = -c_2x_2 + 6800 \Rightarrow x_1 = \frac{-c_2}{3}x_2 + 6800/3$, δηλαδή κλίση: $-c_2/3$. Επίσης:

(1) $0,1x_1 + 0,3x_2 = 240$, οπότε $0,1x_1 = -0,3x_2 + 240 \Rightarrow x_1 = \frac{-3}{0,1}x_2 + 2400$ κλίση ευθείας -3 .

(2) $x_1 + 2x_2 = 2000$, οπότε $x_1 = \frac{-2}{1}x_2 + 2000 \Rightarrow$ κλίση ευθείας -2

Το σημείο που είναι η τομή των παραπάνω ευθειών, θα παρέχει τη βέλτιστη λύση αν η κλίση της ευθείας που αλλάζει (αντ.συνάρτηση) είναι ανάμεσα στις κλίσεις των ευθειών των δεσμευτικών περιορισμών $-3 \leq (-c_2/3) \leq -2$, οπότε (πολλαπλασιάζοντας με το -3): $9 \geq c_2 \geq 6$, και τελικά $6 \leq c_2 \leq 9$.

Τελικό συμπέρασμα: με σταθερό το κέρδος της κούκλας Α, το κέρδος της Β μπορεί να μειωθεί ως 6 ή να αυξηθεί ως τα 9 χωρίς να αλλάξει η βέλτιστη λύση.

Παράδειγμα 3.3 βιβλίου, (η βέλτιστη τιμή της αντικ.συνάρτησης βρέθηκε και είναι 146.000, με βέλτιστες λύσεις: $x_1=8.000$, $x_2=10.000$)

$\min z = 12x_1 + 5x_2 = 146.000$	Αντικ.συνάρτηση
$x_1 + x_2 \leq 24.000$	Γραμ.Περιορισμός (1)
$0,20x_1 + 0,08x_2 \leq 2.400$	Γραμ.Περιορισμός (2)
$x_2 \geq 10.000$	Γραμ.Περιορισμός (3) (δε χρησιμοποιείται εδώ για την επίλυση)

Εύρεση οριών εντός των οποίων μπορεί να περιστραφεί η ευθεία της αντικ.συνάρτησης χωρίς να αλλάξει η βέλτιστη λύση. (ανάλυση ευαισθησίας συντελεστών c_1, c_2)

I. Ανάλυση ευαισθησίας συντελεστή c_1 .

Με σταθερό τον συντελεστή $c_2=5$ της x_2 , (δηλαδή η αντικ.συνάρτηση είναι: $c_1x_1 + 5x_2$)

Αν c_2 σταθερό και ίσο με 5, στην $c_1x_1 + 5x_2 = 146000$, τότε λύνοντας ως προς x_2 (κλίση της ευθείας $-c_1/5$). Επίσης:

$x_1 + x_2 = 24000$, οπότε $x_2 = -1x_1 + 24000$ κλίση ευθείας -1 .

$0,2x_1 + 0,08x_2 = 2400$, οπότε $x_2 = -2,5x_1 + 30000$ κλίση ευθείας $-2,5$

Το σημείο Γ που είναι η τομή των παραπάνω ευθειών, θα παρέχει τη βέλτιστη λύση αν η κλίση της ευθείας που αλλάζει (αντ.συνάρτηση) είναι ανάμεσα στις κλίσεις των ευθειών των δεσμευτικών περιορισμών $-1 \leq (-c_1/5) \leq -2,5$, οπότε $5 \leq c_1 \leq 12,5$.

Τελικό συμπέρασμα: με σταθερό το ποσό της επένδυσης στη μετοχή Β, το ποσό που επενδύεται στην Α μπορεί να μειωθεί ως 5 ή να αυξηθεί ως τα 12,5 χωρίς να αλλάξει η βέλτιστη λύση.

II. Ανάλυση ευαισθησίας συντελεστή c_2 .

Με σταθερό τον συντελεστή $c_1=12$ της x_1 , (δηλαδή η αντικ.συνάρτηση είναι: $12x_1 + c_2x_2$)

Αν c_1 σταθερό και ίσο με 12, στην $12x_1 + c_2x_2 = 146000$, τότε λύνοντας ως προς x_1 (κλίση της ευθείας $-c_2/12$). Επίσης:

$x_1 + x_2 = 24000$, οπότε $x_1 = -1x_2 + 24000$ κλίση ευθείας -1 .

$0,2x_1 + 0,08x_2 = 2400$, οπότε $x_1 = -0,4x_2 + 12000$ κλίση ευθείας $-0,4$

Το σημείο Γ που είναι η τομή των παραπάνω ευθειών, θα παρέχει τη βέλτιστη λύση αν η κλίση της ευθείας που αλλάζει (αντ.συνάρτηση) είναι ανάμεσα στις κλίσεις των ευθειών των δεσμευτικών περιορισμών

$-1 \leq (-c_2/12) \leq -0,4$, οπότε $4,8 \leq c_2 \leq 12$.

Τελικό συμπέρασμα: με σταθερό το ποσό της επένδυσης στη μετοχή Α, το ποσό που επενδύεται στην Β μπορεί να μειωθεί ως 4,8 ή να αυξηθεί ως τα 12 χωρίς να αλλάξει η βέλτιστη λύση.

2. Δυϊκό πρόβλημα(κανονική μορφή)

Παράδειγμα 5.5 Να βρεθεί το δυϊκό του προβλήματος:

$$\begin{aligned} \min z &= 3x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 &\geq 18 \\ 7x_1 + 7x_2 &\geq 24 \\ x_1 &\geq 0, x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

Πρέπει να μετατρέψουμε το πρόβλημα σε κανονική μορφή:

- Θέτουμε $x_2 = -x'_2$, όπου $x'_2 \geq 0$.
- Αντικαθιστούμε την νέα τιμή για το x_2 , οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \min z &= 3x_1 - 2x'_2 \\ 3x_1 - 2x'_2 &\geq 18 \\ 7x_1 - 7x'_2 &\geq 24 \\ x_1, x'_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Το δυϊκό πρόβλημα είναι :

$$\begin{aligned} \max v &= 18y_1 + 24y_2 \\ 3y_1 + 7y_2 &\leq 3 \\ -2y_1 - 7y_2 &\leq -2 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί το δυϊκό του προβλήματος:

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 &\leq 2 \\ 2x_1 - x_2 &\geq 3 \\ x_1 - x_2 &\leq 1 \\ x_1 &\geq 0, x_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Για να είναι αρχικά σε κανονική μορφή πρέπει οι περιορισμοί να είναι ανισώσεις να είναι της μορφής $\leq$ και το x_2 να είναι θετικό.

Το $x_1 + x_2 = 2$ γίνεται δύο ανισώσεις: $x_1 + x_2 \leq 2$ και $x_1 + x_2 \geq 2$, το οποίο γίνεται $-x_1 - x_2 \leq -2$

Το $2x_1 - x_2 \geq 3$, γίνεται $-2x_1 + x_2 \leq 3$.

Επίσης θέτω $x_2 = x'_2 - x''_2$, με $x'_2, x''_2 \geq 0$

Μετά και την αντικατάσταση της νέας τιμής του x_2 , έχουμε:

$$\max z = 2x_1 + x'_2 - x''_2$$

$$x_1 + x'_2 - x''_2 \leq 2$$

$$-x_1 - x'_2 + x''_2 \leq -2$$

$$-2x_1 + x'_2 - x''_2 \leq -3$$

$$x_1 - x'_2 + x''_2 \leq 1$$

$$x_1, x'_2, x''_2 \geq 0$$

Το δυϊκό θα είναι:

$$\min v = 2y_1 - 2y_2 - 3y_3 + y_4$$

$$y_1 - y_2 - 2y_3 + y_4 \leq 2$$

$$y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \leq 1$$

$$-y_1 + y_2 - y_3 + y_4 \leq -1$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

3. Δυναμικός προγραμματισμός

Παράδειγμα 7.5

Μια εταιρεία έχει 3 επενδυτικά σχέδια Α, Β, και Γ. Έχει εκτιμηθεί η παρούσα αξία των καθαρών ταμειακών ροών κάθε σχεδίου και οι απαιτήσεις του σε επενδυμένο κεφάλαιο, σε κάθε μία από τέσσερις χρονικές περιόδους. Επιπλέον, το διαθέσιμο κεφάλαιο της εταιρείας σε κάθε περίοδο είναι περιορισμένο. Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται τα σχετικά δεδομένα.

		Απαιτ.κεφάλαιο			
Σχέδιο	Παρούσα αξία	1 ^η περίοδος	2 ^η περίοδος	3 ^η περίοδος	4 ^η περίοδος
A	450	150	120	100	80
B	320	100	120	140	0
Γ	280	140	110	0	90
Διαθ.κεφάλαιο		450	420	220	180

Το πρόβλημα είναι ποια από τα σχέδια πρέπει να επιλέγουν, ώστε να **μεγιστοποιηθεί** η συνολική παρούσα αξία. Επίσης υπάρχει ο περιορισμός ότι πρέπει να επιλεγούν το πολύ 2 σχέδια. Να διατυπωθεί μαθηματικά το πρόβλημα.

Λύση:

Οι μεταβλητές απόφασης είναι:

$x_1=1$, όταν επιλέγεται το σχέδιο Α, διαφορετικά $x_1=0$.

$x_2=1$, όταν επιλέγεται το σχέδιο Β, διαφορετικά $x_2=0$.

$x_3=1$, όταν επιλέγεται το σχέδιο Γ, διαφορετικά $x_3=0$.

Η μαθηματική διατύπωση του τελικού προβλήματος θα είναι:

$\max z = 450x_1 + 320x_2 + 280x_3$		Παρούσα αξία
$150x_1 + 100x_2 + 140x_3$	≤ 450	Διαθ.κεφάλαιο της 1 ^{ης} περιόδου
$120x_1 + 120x_2 + 110x_3$	≤ 420	Διαθ.κεφάλαιο της 2 ^{ης} περιόδου
$100x_1 + 140x_2 +$	≤ 220	Διαθ.κεφάλαιο της 3 ^{ης} περιόδου
$80x_1 + 90x_3$	≤ 180	Διαθ.κεφάλαιο της 4 ^{ης} περιόδου
$x_1 + x_2 + x_3$	≤ 2	Επιλογή το πολύ 2 σχεδίων
$x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\}$		Δυαδικές μεταβλητές

Πρόβλημα

Μια τεχνική εταιρεία που αναλαμβάνει την εκτέλεση μεγάλων έργων, έχει δεχτεί για την επόμενη τριετία πολλές προτάσεις για ανάληψη έργων. Έπειτα από μια επιλογή κατέληξε σε έναν κατάλογο πέντε έργων. Τα έργα αυτά διαφέρουν ως προς την απόδοσή τους, ως προς το ύψος της χρηματοδότησης και ως προς τις ανάγκες σε προσωπικό και εξοπλισμό. Τα στοιχεία αυτά καταγράφονται στον παρακάτω πίνακα.

			Έργα		
	1	2	3	4	5
Απόδοση	17	10	15	19	7
Χρηματοδότηση	43	28	34	48	17
Προσωπικό	6	5	4	7	4
Εξοπλισμός	NAI	NAI		NAI	NAI

Το συνολικό διαθέσιμο κεφάλαιο της εταιρείας είναι 100 εκ., το διαθέσιμο προσωπικό 16 άτομα, ενώ ο εξοπλισμός επαρκεί για 3 έργα. Τα έργα 1 και 2 είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα, όπως και τα 3 και 4. Επιπλέον ούτε το 3 ούτε το 4 μπορούν να αναληφθούν, αν δεν αναληφθούν το 1 και το 2 αντίστοιχα. Να διατυπωθεί μαθηματικά το πρόβλημα.

Λύση:

Οι μεταβλητές απόφασης θα είναι οι παρακάτω:

$x_1=1$, όταν επιλέγεται το έργο 1, διαφορετικά $x_1=0$.

$x_2=1$, όταν επιλέγεται το έργο 2, διαφορετικά $x_2=0$.

$x_3=1$, όταν επιλέγεται το έργο 3, διαφορετικά $x_3=0$.

$x_4=1$, όταν επιλέγεται το έργο 4, διαφορετικά $x_4=0$.

$x_5=1$, όταν επιλέγεται το έργο 5, διαφορετικά $x_5=0$.

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος διατυπώνονται οι παρακάτω περιορισμοί:

- Αντικειμενική συνάρτηση (μεγιστοποίηση απόδοσης): $\max z = 17x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 19x_4 + 7x_5$
- Περιορισμός χρηματοδότησης: $43x_1 + 28x_2 + 34x_3 + 48x_4 + 17x_5 \leq 100$
- Διαθεσιμότητα προσωπικού: $6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 4x_5 \leq 16$
- Εξοπλισμός(το πολύ 3 έργα): $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 3$.
- Περιορισμοί για αμοιβαίως αποκλειόμενα έργα: $x_1 + x_2 \leq 1$, $x_3 + x_4 \leq 1$.
- Εξαρτήσεις μεταξύ έργων: $x_3 \leq x_1$, $x_4 \leq x_2$

4. Ανάλυση αποφάσεων

Προβλήματα προς επίλυση, σελ.284

10. Δύο παίκτες παίζουν το εξής παίγνιο: επιλέγουν ταυτόχρονα ένα, δύο ή τρία δάκτυλα χεριών. Αν το άθροισμα των δακτύλων είναι άρτιο κερδίζει ο παίκτης **I μια μονάδα** από τον **II**. Διαφορετικά ο **II** κερδίζει μία μονάδα από τον **I**. Ποιος είναι ο πίνακας πληρωμών του παιχνιδιού για τον παίκτη **I**;

Ας υπολογίσουμε τις στρατηγικές του παίκτη **I** (γραμμές του πίνακα πληρωμών):

1. Να επιλέξει ένα(1) δάκτυλο:

- αν και ο **II** επιλέξει ένα τότε κερδίζει ($1+1=\text{άρτιο}$), επομένως αποτέλεσμα $+1$ (κελί a_{11}).
- αν ο **II** επιλέξει δύο τότε χάνει ($1+2=\text{περιττό}$), επομένως αποτέλεσμα -1 (κελί a_{21}).
- αν ο **II** επιλέξει τρία τότε κερδίζει ($1+3=\text{άρτιο}$), επομένως αποτέλεσμα $+1$ (κελί a_{31}).

2. Να επιλέξει δύο(2) δάκτυλα:

- αν ο **II** επιλέξει ένα τότε χάνει ($2+1=\text{περιττό}$), επομένως αποτέλεσμα -1 (κελί a_{21}).
- αν ο **II** επιλέξει δύο τότε κερδίζει ($2+2=\text{άρτιο}$), επομένως αποτέλεσμα $+1$ (κελί a_{22}).
- αν ο **II** επιλέξει τρία τότε χάνει ($2+3=\text{περιττό}$), επομένως αποτέλεσμα -1 (κελί a_{23}).

3. Να επιλέξει τρία(3) δάκτυλα:

- αν ο **II** επιλέξει ένα τότε κερδίζει ($3+1=\text{άρτιο}$), επομένως αποτέλεσμα $+1$ (κελί a_{31}).
- αν ο **II** επιλέξει δύο τότε χάνει ($3+2=\text{περιττό}$), επομένως αποτέλεσμα -1 (κελί a_{32}).
- αν ο **II** επιλέξει τρία τότε κερδίζει ($3+3=\text{άρτιο}$), επομένως αποτέλεσμα $+1$ (κελί a_{33}).

Από τα αποτελέσματα αυτά διαμορφώνεται ο παρακάτω πίνακας πληρωμών. Αντίστοιχος πίνακας θα προέκυπτε αν καταγράφαμε τις στρατηγικές από τη μεριά (άποψη) του παίκτη **II**.

*Πίνακας πληρωμών του παίκτη **I***

Παίκτης I	Παίκτης II		
	1 δάκτυλο	2 δάκτυλα	3 δάκτυλα
1 δάκτυλο	+1	-1	+1
2 δάκτυλα	-1	+1	-1

3 δάκτυλα	+1	-1	+1
------------------	----	----	----

Πρόβλημα 10α. Αν στο παραπάνω πρόβλημα 10, το ποσό πληρωμής είναι το άθροισμα των δακτύλων, ποιος θα ήταν ο πίνακας πληρωμής του παίκτη I; Να βρεθεί το σημείο ισορροπίας με το κριτήριο minimax. Ας υπολογίσουμε τις στρατηγικές του παίκτη I (γραμμές του πίνακα πληρωμών):

1. Να επιλέξει ένα(1) δάκτυλο:

- d. αν και ο II επιλέξει ένα τότε κερδίζει ($1+1=\text{άρτιο}$), επομένως αποτέλεσμα +2 (κελί a_{11}).
- e. αν ο II επιλέξει δύο τότε χάνει ($1+2=\text{περιττό}$), επομένως αποτέλεσμα -3 (κελί a_{21}).
- f. αν ο II επιλέξει τρία τότε κερδίζει ($1+3=\text{άρτιο}$), επομένως αποτέλεσμα +4 (κελί a_{31}).

2. Να επιλέξει δύο(2) δάκτυλα:

- g. αν ο II επιλέξει ένα τότε χάνει ($2+1=\text{περιττό}$), επομένως αποτέλεσμα -3 (κελί a_{21}).
- h. αν ο II επιλέξει δύο τότε κερδίζει ($2+2=\text{άρτιο}$), επομένως αποτέλεσμα +4 (κελί a_{22}).
- i. αν ο II επιλέξει τρία τότε χάνει ($2+3=\text{περιττό}$), επομένως αποτέλεσμα -5 (κελί a_{23}).

3. Να επιλέξει τρία(3) δάκτυλα:

- a. αν ο II επιλέξει ένα τότε κερδίζει ($3+1=\text{άρτιο}$), επομένως αποτέλεσμα +4 (κελί a_{31}).
- b. αν ο II επιλέξει δύο τότε χάνει ($3+2=\text{περιττό}$), επομένως αποτέλεσμα -5 (κελί a_{32}).
- c. αν ο II επιλέξει τρία τότε κερδίζει ($3+3=\text{άρτιο}$), επομένως αποτέλεσμα +6 (κελί a_{33}).

Από τα αποτελέσματα αυτά διαμορφώνεται ο παρακάτω πίνακας πληρωμών. Αντίστοιχος πίνακας θα προέκυπτε αν καταγράφαμε τις στρατηγικές από τη μεριά (άποψη) του παίκτη II.

Πίνακας πληρωμών του παίκτη I

Παίκτης I	Παίκτης II			
	1 δάκτυλο	2 δάκτυλα	3 δάκτυλα	
1 δάκτυλο	+2	-3	+4	-3
2 δάκτυλα	-3	+4	-5	-5
3 δάκτυλα	+4	-5	+6	-5
max	4	4	6	

Σύμφωνα με το κριτήριο minimax, βρίσκουμε τα ελάχιστα κέρδη του 1^{ου} παίκτη ανά στρατηγική και τις μέγιστες ζημίες του 2^{ου} παίκτη ανά στρατηγική. Μετά επιλέγουμε το maxmin των γραμμών που είναι το -3 και το minmax των στηλών που είναι το 4, οπότε δεν υπάρχουν σαγματικά σημεία (σημεία ισορροπίας). Το πρόβλημα πρέπει να λυθεί με γραμμικό προγραμματισμό.

Παράδειγμα 9.12

Ο επόμενος πίνακας δείχνει το κέρδος του πρώτου παίκτη (I) σε ένα παίγνιο εναντίον του αντιπάλου του που είναι ο II. Να βρεθεί το σημείο ισορροπίας με το κριτήριο minimax.

I	II		
	1	2	3
1	4	7	4
2	-2	0	3
3	1	4	-3

Στον παρακάτω πίνακα βρίσκονται τα ελάχιστα ανά γραμμή και τα μέγιστα ανά στήλη.

I	II			min
	1	2	3	
1	4	7	4	4
2	-2	0	3	-2
3	1	4	-3	-3
max	4	7	4	

Το maxmin των γραμμών είναι το 4 και το minmax των στηλών το 4, οπότε το σημείο ισορροπίας είναι το 4. Ο παίκτης I πρέπει να ακολουθήσει την στρατηγική 1, ενώ ο II πρέπει να ακολουθήσει την 1 ή την 3.

Παράδειγμα: Να λυθεί με το κριτήριο minimax το παίγνιο που έχει τον παρακάτω πίνακα πληρωμής. Ο παίκτης A έχει 2 στρατηγικές και ο B 3.

Στρατηγικές του A	Στρατηγικές του B			Ελάχιστο σειράς
	B1	B2	B3	
A1	6	2	4	2
A2	4	9	8	4
Μέγιστο στήλης	6	9	8	

Το maximin του A είναι 4, ενώ το minimax του B είναι 6 και έτσι δεν υπάρχει σημείο ισορροπίας.