

Κεφ. 9 Ανάλυση αποφάσεων

Η θεωρία αποφάσεων έχει ως αντικείμενο την επιλογή της καλύτερης στρατηγικής. Τα αποτελέσματα κάθε στρατηγικής εξαρτώνται από παράγοντες, οι οποίοι μπορεί να είναι καταστάσεις της φύσης ή ανταγωνιστικές στρατηγικές (Θεωρία παιγνίων).

9.1 Πίνακας αποτελεσμάτων

Περιέχει στις γραμμές τις στρατηγικές προς επιλογή και στις στήλες τις καταστάσεις της φύσης.

Πίνακας αποτελεσμάτων				
	Φ_1	Φ_2		Φ_n
Σ_1	α_{11}	α_{12}		α_{1n}
Σ_2	α_{21}	α_{22}		α_{2n}
....				
Σ_m	α_{m1}	α_{m2}		α_{mn}

Τα α_{ij} συμβολίζουν το αποτέλεσμα της επιλογής της στρατηγικής i όταν η κατάσταση της φύσης είναι j .

9.2 Κριτήρια αποφάσεων

9.2.2 Κριτήρια αποφάσεων σε συνθήκες κινδύνου

Πρόβλημα αγρότη:

Ένας αγρότης θέλει να αποφασίσει τι θα καλλιεργήσει στη γη που έχει στη διάθεσή του και έχει δύο εναλλακτικές δυνατότητες: να καλλιεργήσει το είδος Α ή το είδος Β. Είναι λογικό ότι το αποτέλεσμα της απόφασης θα εξαρτηθεί από τις κλιματολογικές συνθήκες που θα εμφανιστούν κατά τη διάρκεια της καλλιέργειας.

Έστω ότι οι καταστάσεις της φύσης είναι 3: καλός καιρός (Φ_1), μέτριος καιρός (Φ_2) και άσχημος καιρός (Φ_3), με πιθανότητες εμφάνισης: 0,25, 0,50 και 0,25 αντίστοιχα. Στόχος του αγρότη είναι η **μεγιστοποίηση** του **κέρδους**. Η απόδοση (κέρδος) ανά στρέμμα της καλλιέργειας του πρώτου είδους στην περίπτωση που ο καιρός είναι καλός, μέτριος ή άσχημος είναι 250€, 200€ και 150€ αντίστοιχα, ενώ η καλλιέργεια του δεύτερου είδους αποφέρει 400€, 150€, και 20€ αντίστοιχα.

Τα παραπάνω δεδομένα παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα αποτελεσμάτων:

Πίνακας αποτελεσμάτων			
	$P(\Phi_1)=0,25$	$P(\Phi_2)=0,50$	$P(\Phi_3)=0,25$
Σ_1	250€	200€	150€
Σ_2	400€	150€	20€

Σε μια τέτοια κατάσταση χρησιμοποιούνται τα παρακάτω κριτήρια:

- Το κριτήριο της αναμενόμενης αξίας ή μαθηματικής ελπίδας ή μέσης τιμής
- Το κριτήριο της αναμενόμενης απώλειας ευκαιρίας

Σύμφωνα με το **πρώτο κριτήριο** η καλύτερη στρατηγική (όταν επιδιώκουμε κέρδος), είναι εκείνη στην οποία αντιστοιχεί η μεγαλύτερη μαθηματική ελπίδα ή μέση τιμή.

- $E(\Sigma_1) = (250 * 0,25) + (200 * 0,50) + (150 * 0,25) = 200$. (Τύπος: Κέρδος X Πιθανότητα)
- $E(\Sigma_2) = 400 * 0,25 + 150 * 0,50 + 20 * 0,25 = 180$.

Άρα συμφέρει στον αγρότη να καλλιεργήσει το πρώτο είδος.

Το **δεύτερο κριτήριο** έχει τη λογική ότι η μαθηματική ελπίδα αντιπροσωπεύει εκείνο που θα συμβεί μακροπρόθεσμα, όταν η ίδια κατάσταση παρουσιαστεί πολλές φορές. Αυτό σημαίνει ότι ο αγρότης θα έχει κατά μέσο όρο ένα κέρδος μεγαλύτερο κατά 20 (200-180) διαλέγοντας κάθε φορά τη στρατηγική Σ_1 έναντι της Σ_2 , έτσι εδώ ο πίνακας διαμορφώνεται με βάση το **διαφυγόν κέρδος ή το κόστος ευκαιρίας**. Ο συλλογισμός είναι: αν ο αγρότης επέλεγε τη Στρατηγική Σ_1 και επαληθευόταν η Φ_1 , τότε θα είχε επιλέξει τη χειρότερη στρατηγική και θα είχε διαφυγόν κέρδος 150 (400-250). Αν αντίθετα επέλεγε τη Σ_2 και επαληθευόταν η Φ_1 , τότε θα είχε επιλέξει την καλύτερη στρατηγική και θα είχε διαφυγόν κέρδος ίσο με μηδέν (400-400). Έτσι διαμορφώνεται ο πίνακας:

Πίνακας διαφυγόντων κερδών			
	$P(\Phi_1)=0,25$	$P(\Phi_2)=0,50$	$P(\Phi_3)=0,25$
Σ_1	150 (=400-250)	0 (=200-200)	0 (=150-150)
Σ_2	0	50	130
Καλύτερη	400	200	150

Σε αυτό το σημείο υπολογίζεται η αναμενόμενη απώλεια κάθε στρατηγικής. Καλύτερη στρατηγική είναι εκείνη που έχει τη μικρότερη αναμενόμενη απώλεια.

- $E(\Sigma_1) = 150 * 0,25 + 0 * 0,50 + 0 * 0,25 = 37,5$.
- $E(\Sigma_2) = 0 * 0,25 + 50 * 0,50 + 130 * 0,25 = 57,5$.

Στον αγρότη συμφέρει να καλλιεργήσει το πρώτο είδος.

Είναι σαφές ότι τα δύο **κριτήρια είναι ισοδύναμα** και δίνουν την ίδια λύση.

Παράδειγμα 9.2

Η δημιουργία του χαρτοφυλακίου μιας εταιρείας επενδύσεων απαιτεί την αγορά μιας μετοχής από τις τέσσερις σημαντικότερες εταιρείες ενός κλάδου. Η συμπεριφορά κάθε μετοχής είναι διαφορετική σε συνάρτηση με την πορεία του γενικού δείκτη του χρηματιστηρίου. Οι αναλυτές επενδύσεων της εταιρείας προσδιόρισαν τα ετήσια προσδοκώμενα κέρδη κάθε μετοχής για επένδυση 100.000€, παίρνοντας υπόψη τρία σενάρια αναφορικά με την πορεία του δείκτη: το αισιόδοξο(Φ_1), το κανονικό (Φ_2) και το απαισιόδοξο (Φ_3).

Πίνακας αποτελεσμάτων (Κέρδη)			
Στρατηγικές	Φ_1	Φ_2	Φ_3
Σ_1 (αφορά της μετοχής Α)	18000	10000	-8800
Σ_2 (αφορά της μετοχής Β)	15000	8000	-6200
Σ_3 (αφορά της μετοχής Γ)	10000	6000	-3500
Σ_4 (αφορά της μετοχής Δ)	7500	4000	-1600

1. Να προσδιοριστεί η καλύτερη στρατηγική σύμφωνα με το κριτήριο της αναμενόμενης αξίας, όταν η εκτίμηση των πιθανοτήτων για τα σενάρια Φ_1 , Φ_2 , και Φ_3 είναι 0,2, 0,3 και 0,5 αντίστοιχα.
2. Να υπολογιστεί η καλύτερη στρατηγική σύμφωνα με το κριτήριο της αναμενόμενης απώλειας.

Λύση

1. Κριτήριο της αναμενόμενης αξίας ή μαθηματικής ελπίδας

$$E(\Sigma_1) = 18000 * 0,2 + 10000 * 0,3 - 8800 * 0,5 = 2200.$$

$$E(\Sigma_2) = 15000 * 0,2 + 8000 * 0,3 - 6200 * 0,5 = 2300.$$

$$E(\Sigma_3) = 10000 * 0,2 + 6000 * 0,3 - 3500 * 0,5 = 2050.$$

$$E(\Sigma_4) = 7500 * 0,2 + 4000 * 0,3 - 1600 * 0,5 = 1900.$$

Η καλύτερη στρατηγική είναι η Σ_2 .

2. Κριτήριο της αναμενόμενης απώλειας ευκαιρίας

	$P(\Phi_1)=0,20$	$P(\Phi_2)=0,30$	$P(\Phi_3)=0,50$
Σ_1	0	0	7200
Σ_2	3000	2000	4600
Σ_3	8000	4000	1900
Σ_4	10500	6000	0
Καλύτερη-μέγιστη(max)	18000	10000	-1600

Υπολογισμός αναμενόμενης απώλειας κάθε στρατηγικής:

$E(\Sigma_1) = (0 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,3 + 7200 \cdot 0,5) = 3600$
$E(\Sigma_2) = 3500$
$E(\Sigma_3) = 3750$
$E(\Sigma_4) = 3900$

Η καλύτερη στρατηγική είναι η Σ_2 γιατί έχει την μικρότερη αναμενόμενη απώλεια.

9.2.3 Κριτήρια αποφάσεων σε συνθήκες αβεβαιότητας

Μια κατάσταση κινδύνου ονομάζεται **κατάσταση αβεβαιότητας** όταν δεν υπάρχει δυνατότητα εκτίμησης των πιθανοτήτων των καταστάσεων της φύσης. Δεν μπορούν να εφαρμοστούν τα κριτήρια αναμ.αξίας και αναμενόμενης απώλειας ευκαιρίας.

Κριτήριο Wald

Προτείνεται η επιλογή της στρατηγικής που έχει τη μεγαλύτερη απόδοση στις λιγότερο ευνοϊκές καταστάσεις. Στο παράδειγμα του αγρότη, αν επιλεγεί η Στρατηγική Σ_1 το χειρότερο αποτέλεσμα είναι 150. Αντίθετα, αν επιλεγεί η Σ_2 το χειρότερο που μπορεί να συμβεί είναι 20.

Πίνακας αποτελεσμάτων				min
	Φ_1	Φ_2	Φ_3	
Σ_1	250€	200€	150€	150€
Σ_2	400€	150€	20€	20€

Χειρότερα αποτελέσματα ανά στρατηγική

150 (Σ_1)

20 (Σ_2)

Επομένως ο αγρότης έχει συμφέρον να επιλέξει τη στρατηγική Σ_1 , που εγγυάται το καλύτερο(max) αποτέλεσμα από τα χειρότερα(min). Αυτό το αποτέλεσμα ονομάζεται **max-min** και το κριτήριο του Wald συντίθεται λέγοντας ότι: “σε συνθήκες αβεβαιότητας καλύτερη στρατηγική είναι εκείνη που οδηγεί στο καλύτερο από τα χειρότερα αποτελέσματα”.

1. Μεγάλη βιομηχανία παραγωγής άρτου παράγει ένα είδος ψωμιού του ενός κιλού για το οποίο η ημερήσια ζήτηση ακολουθεί την παρακάτω κατανομή πιθανοτήτων:

Ζήτηση (kg)	18000	20000	22000
Πιθανότητα	0,30	0,50	0,20

Ένα κιλό ψωμί έχει κόστος παραγωγής 0,60€ και τιμή πώλησης 1,00€ (άρα κέρδος: $1-0,60=0,40$). Στην περίπτωση που το ψωμί δεν πουληθεί την ημέρα παραγωγής, δίνεται σε μία μονάδα εκτροφής ζώων στην τιμή των 0,25€ ανά κιλό ψωμί (άρα ζημία: $0,25-0,60=-0,35$). Πόσα κιλά ψωμί πρέπει να παράγει ημερησίως η βιομηχανία;

Λύση:

Οι στρατηγικές που μπορεί να ακολουθήσει η βιομηχανία είναι οι εξής:

Σ_1 : η βιομηχανία παράγει 18.000kg ψωμιού,

Σ_2 : η βιομηχανία παράγει 20.000kg ψωμιού,

Σ_3 : η βιομηχανία παράγει 22.000kg ψωμιού,

Τα αποτελέσματα των παραπάνω στρατηγικών είναι συνάρτηση τριών καταστάσεων:

Φ_1 : η ζήτηση είναι 18.000 ($P(\Phi_1)=0,3$),

Φ_2 : η ζήτηση είναι 20.000 ($P(\Phi_2)=0,5$),

Φ_3 : η ζήτηση είναι 22.000 ($P(\Phi_3)=0,2$).

I. Το πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί με το κριτήριο της μέσης τιμής.

Υπολογίζουμε τα κέρδη ανά στρατηγική για να διαμορφωθεί ο πίνακας αποτελεσμάτων.

- Στην στρατηγική Σ_1 τα αποτελέσματα δεν διαφοροποιούνται, δεδομένου ότι όποια και αν είναι η κατάσταση της φύσης, όλη η παραγωγή πωλείται και το κέρδος είναι 7200 ($=18000*(1-0,6)$).
- Στην στρατηγική Σ_2 τα αποτελέσματα διαφοροποιούνται, δεδομένου ότι αν έχουμε κατάσταση Φ_1 προκύπτει κέρδος 6500 ($=18000*(1-0,6)+ 2000*(0,25-0,6)$).. Αν έχουμε κατάσταση Φ_2 ή Φ_3 προκύπτει κέρδος 8000 ($=20000*(1-0,6)$).
- Στην στρατηγική Σ_3 τα αποτελέσματα διαφοροποιούνται, δεδομένου ότι αν έχουμε κατάσταση Φ_1 προκύπτει κέρδος 5800 ($=18000*(1-0,6)+ 4000*(0,25-0,6)$), όταν έχουμε κατάσταση Φ_2 προκύπτει κέρδος 7300 ($=20000*(1-0,6) + 2000*(0,26-0,6)$), ενώ αν έχουμε κατάσταση Φ_3 προκύπτει κέρδος 8800 ($=22000*(1-0,6)$).

Έτσι διαμορφώνεται ο παρακάτω πίνακας αποτελεσμάτων:

Πίνακας αποτελεσμάτων			
	$P(\Phi_1)=0,3$	$P(\Phi_2)=0,5$	$P(\Phi_3)=0,2$
Σ_1	7200	7200	7200
Σ_2	6500	8000	8000
Σ_3	5800	7300	8800
Μέγιστο(max)	7200	8000	8800

Υπολογίζουμε τις μαθηματικές ελπίδες των στρατηγικών:

$$E(\Sigma_1) = 7200 * 0,3 + 7200 * 0,5 + 7200 * 0,2 = 7200.$$

$$E(\Sigma_2) = 6500 * 0,3 + 8000 * 0,5 + 8000 * 0,2 = \mathbf{7360}.$$

$$E(\Sigma_3) = 5800 * 0,3 + 7300 * 0,5 + 8000 * 0,2 = 7150.$$

Άρα καλύτερη στρατηγική είναι η 2 και η βιομηχανία πρέπει να παράγει 20.000 κιλά ψωμιού.

II. Κριτήριο αναμενόμενης απώλειας.

Αν η βιομηχανία επέλεγε τη Στρατηγική Σ_1 και επαληθευόταν η κατάσταση της φύσης Φ_1 , τότε θα είχε επιλέξει την καλύτερη στρατηγική και θα είχε ένα διαφυγόν κέρδος ίσο με μηδέν ($=7200-7200$).

Αν η βιομηχανία επέλεγε τη Στρατηγική Σ_3 και επαληθευόταν η κατάσταση της φύσης Φ_1 , τότε θα είχε επιλέξει τη χειρότερη στρατηγική και θα είχε ένα διαφυγόν κέρδος ίσο με 1400 ($=7200-5800$) κ.ο.κ.

Πίνακας διαφυγόντων κερδών			
	$P(\Phi_1)=0,3$	$P(\Phi_2)=0,5$	$P(\Phi_3)=0,2$
Σ_1	0	800	1600
Σ_2	700	0	800
Σ_3	1400	700	0

Τώρα υπολογίζεται η αναμενόμενη απώλεια κάθε στρατηγικής.

$$E(\Sigma_1) = 0 * 0,3 + 800 * 0,5 + 1600 * 0,2 = 720.$$

$$E(\Sigma_2) = 700 * 0,3 + 0 * 0,5 + 800 * 0,2 = \mathbf{370}.$$

$$E(\Sigma_3) = 1600 * 0,3 + 800 * 0,5 + 0 * 0,2 = 880.$$

Η καλύτερη στρατηγική είναι αυτή με τη μικρότερη αναμενόμενη απώλεια και είναι η 2^η. Το ίδιο αποτέλεσμα είχε εξαχθεί και με το κριτήριο της αναμενόμενης τιμής.

9.5 Θεωρία παιγνίων (ανταγωνιστικές στρατηγικές)

Ο φορέας της απόφασης (παίκτης) μεγιστοποιεί κάποια **συνάρτηση πληρωμής** (αντικ.συνάρτηση) που εξαρτάται από τις αποφάσεις και άλλων **ανταγωνιστών** (παικτών). Έτσι το όφελος του ενός παίκτη μπορεί να είναι σε κάποιο βαθμό, ή και ολοκληρωτικά, σε σύγκρουση με το όφελος κάποιου άλλου παίκτη. Ως συνέπεια, μια απόφαση που μοιάζει λογική μπορεί να οδηγήσει σε αρνητικό αποτέλεσμα.

Τα βασικά στοιχεία ενός παιγνίου είναι: οι παίκτες, οι κανόνες του παιχνιδιού, οι πληροφορίες που υπάρχουν κατά τη διάρκειά του, η αξιολόγηση των αποτελεσμάτων από τους παίκτες, και οι μεταβλητές (αποφάσεις) που λαμβάνονται από αυτούς.

Παίγνιο δύο παικτών μηδενικού αθροίσματος: Υπάρχουν δύο παίκτες που παίζουν ένα παιχνίδι, όπου ότι κερδίζει ο ένας, το χάνει ο άλλος. Αν υποθέσουμε ότι οι δυνατές επιλογές των παικτών είναι πεπερασμένες, το παίγνιο μπορεί να παρασταθεί από έναν πίνακα **αποτελεσμάτων ή πληρωμών** δύο διαστάσεων. Ο πίνακας δείχνει ποιες πληρωμές πρέπει να γίνουν μετά το τέλος του παιχνιδιού. Οι δυνατές επιλογές του πρώτου παίκτη είναι οι γραμμές του πίνακα, ενώ οι δυνατές επιλογές του δεύτερου παίκτη είναι οι στήλες. Το σχέδιο δράσης που είναι μια γραμμή του πίνακα, ονομάζεται **στρατηγική** του πρώτου παίκτη, ενώ το σχέδιο που αντιπροσωπεύεται από μια στήλη ονομάζεται στρατηγική του δεύτερου παίκτη.

Παράδειγμα 9.7

Δύο παίκτες παίζουν το εξής παίγνιο: επιλέγουν ταυτόχρονα ένα ή δύο δάκτυλα χεριών. Αν το άθροισμα των δακτύλων είναι άρτιο κερδίζει ο παίκτης I μια μονάδα από τον II. Διαφορετικά ο II κερδίζει μία μονάδα από τον I. Ποιος είναι ο πίνακας πληρωμών του παιχνιδιού;

Στρατηγικές παίκτη I (γραμμές του πίνακα):

1. Να επιλέξει ένα(1) δάκτυλο:

- αν και ο II επιλέξει ένα(1) τότε κερδίζει ($1+1=\text{άρτιο}$), επομένως αποτέλεσμα $+1$ (κελί a_{11}).
- αν ο II επιλέξει δύο(2) τότε χάνει ($1+2=\text{περιττό}$), επομένως αποτέλεσμα -1 (κελί a_{21}).

2. Να επιλέξει δύο(2) δάκτυλα:

- αν ο II επιλέξει ένα(1) τότε χάνει ($2+1=\text{περιττό}$), επομένως αποτέλεσμα -1 (κελί a_{21}).
- αν ο II επιλέξει δύο(2) τότε κερδίζει ($2+2=\text{άρτιο}$), επομένως αποτέλεσμα $+1$ (κελί a_{22}).

Από τα αποτελέσματα αυτά διαμορφώνεται ο παρακάτω πίνακας πληρωμών. Αντίστοιχος πίνακας θα προέκυπτε αν καταγράφαμε τις στρατηγικές από τη μεριά (άποψη) του παίκτη II.

Πίνακας πληρωμών του παίκτη I

I	II	
	1	2
1	+1	-1
2	-1	+1

Παράδειγμα 9.8

Αφορά μία ναυμαχία που εξελίχθηκε στο Β' παγκόσμιο πόλεμο μεταξύ Ιαπώνων και Αμερικανών. Μετά από μάχη μερικών ημερών, οι Ιάπωνες χρειάστηκαν ενισχύσεις και αυτό το πληροφορήθηκαν και οι Αμερικανοί. Οι ενισχύσεις των Ιαπώνων μπορούσαν να έρθουν από δύο διαφορετικές διαδρομές Βόρεια(B) και Νότια(N), που το ταξίδι τους θα κρατούσε 3 μέρες. Οι Αμερικανοί για να εντοπίσουν αυτές τις ενισχύσεις είχαν την επιλογή να βάλουν τον κύριο όγκο των αναγνωριστικών τους πτήσεων, ώστε να εντοπίσουν την ιαπωνική νηοπομπή βόρεια ή νότια. Από τη στιγμή που οι Αμερικανοί θα ανακάλυπταν τις ενισχύσεις των Ιαπώνων, θα τους βομβάρδιζαν συνεχώς μέχρι να φτάσουν στον προορισμό τους. Στον παρακάτω πίνακα πληρωμών, μονάδα μέτρησης είναι οι μέρες βομβαρδισμού της Ιαπωνικής νηοπομπής (προφανώς πολλές μέρες βομβαρδισμού ευνοούν τους Αμερικανούς και βαρύνουν τους Ιάπωνες).

Στρατ.Αμερικ.	Στρατ.Ιαπώνων		
	B	N	
B	2	2	Στρατηγική Αμερικάνων για βόρεια πορεία
N	1	3	Στρατηγική Αμερικάνων για νότια πορεία

Παράδειγμα 9.9

Μια εταιρεία γεωτρήσεων εξετάζει αν πρέπει να συνεχιστεί η γεώτρηση για πετρέλαιο σε συγκεκριμένη τοποθεσία. Αν δεν υπάρχει πετρέλαιο και συνεχιστεί η γεώτρηση θα χάσει 5 χρημ.μονάδες, ενώ αν υπάρχει θα κερδίσει 8 χρημ.μονάδες. Αν σταματήσει τη γεώτρηση και δεν υπάρχει πετρέλαιο, κερδίζει 0,8 χρημ.μονάδες, ενώ αν υπάρχει πετρέλαιο θα χάσει 4 χρημ.μονάδες. Να γίνει ο πίνακας πληρωμής αυτού του παιχνιδιού έναντι της φύσης.

Υπάρχουν δύο ενδεχόμενα τα οποία θεωρούνται οι στρατηγικές της φύσης {υπάρχει πετρέλαιο, δεν υπάρχει πετρέλαιο} και δύο στρατηγικές του παίκτη {συνέχιση της γεώτρησης, σταμάτημα της γεώτρησης}. Ο πίνακας πληρωμών του παιγνίου είναι:

	Συνέχιση γεώτρησης	Σταμάτημα γεώτρησης
Υπάρχει πετρέλαιο	8	-4
Δεν υπάρχει πετρέλαιο	-5	0,8

9.5.2 Το κριτήριο minimax

Το κριτήριο αυτό έγκειται στις παρακάτω αποφάσεις των 2 παικτών:

- Ο πρώτος παίκτης επιλέγει το μέγιστο από τα ελάχιστα κέρδη (ανά στρατηγική).
- Ο δεύτερος παίκτης(ανταγωνιστής του 1^{ου}) επιλέγει την ελάχιστη από τις μέγιστες ζημίες (ανά στρατηγική).

Αν αυτές οι επιλογές έχουν την ίδια τιμή, τότε αυτή η τιμή αντιπροσωπεύει την τιμή του παιγνίου και λέγεται **σημείο ισορροπίας**.

Παράδειγμα 9.11

Χρησιμοποιείται ο πίνακας πληρωμής του παραδείγματος 9.8.

Στρατ.Αμερικ.	Στρατ.Ιαπώνων	
	B	N
B	2	2
N	1	3

Ακολουθεί η ανάλυση των στρατηγικών των δύο αντιπάλων.

Αμερικανοί: αν ακολουθήσουν την πρώτη στρατηγική (B), το χειρότερο που μπορούν να κερδίσουν $\{\min(2,2)=2\}$ είναι 2 μονάδες. Αν ακολουθήσουν τη στρατηγική (N) το χειρότερο που μπορούν να κερδίσουν $\{\min(1,3)=1\}$ είναι 1 μονάδα. Επομένως θα επιλέξουν την πρώτη στρατηγική που τους εξασφαλίζει το μεγαλύτερο από τα μικρότερα κέρδη $\{\max(2,1)=2\}$. Δηλαδή τελικά επιλέγουν το **μέγιστο(max) από τα ελάχιστα(min)** κέρδη.

Ιάπωνες: αν ακολουθήσουν την πρώτη στρατηγική (B), το χειρότερο που μπορούν να βομβαρδίζονται είναι για 2 μέρες $\{\max(2,1)=2\}$. Αν ακολουθήσουν τη στρατηγική (N) το χειρότερο είναι να βομβαρδίζονται για 3 μέρες $\{\max(2,3)=3\}$. Επομένως θα επιλέξουν την πρώτη στρατηγική(B) που περιορίζει το χάσιμο σε 2 μέρες βομβαρδισμού $\{\min(2,3)=2\}$ και τους εξασφαλίζει το καλύτερο από τα χειρότερα κέρδη. Δηλαδή τελικά επιλέγουν την **ελάχιστη(min) από τις μέγιστες(max)** ζημίες.

Επομένως και οι δύο θα επιλέξουν τη **διαδρομή B** και το σημείο ισορροπίας θα είναι το 2. Αυτό φαίνεται και στον παρακάτω πίνακα.

Στρατ.Αμερικ.	Στρατ.Ιαπώνων			
	B	N	min(γραμμής)	max
B	2	2	2	2=maxmin
N	1	3	1	
max(στήλης)	2	3		
min	2=minmax			

10. Δύο παίκτες παίζουν το εξής παίγνιο: επιλέγουν ταυτόχρονα ένα, δύο ή τρία δάκτυλα χεριών. Αν το άθροισμα των δακτύλων είναι άρτιο κερδίζει ο παίκτης I μια μονάδα από τον II. Διαφορετικά ο II κερδίζει μία μονάδα από τον I. Ποιος είναι ο πίνακας πληρωμών του παιχνιδιού;

Στρατηγικές παίκτη I (γραμμές του πίνακα):

3. Να επιλέξει ένα(1) δάκτυλο:

- a. αν και ο II επιλέξει ένα τότε κερδίζει ($1+1=\text{άρτιο}$), επομένως αποτέλεσμα $+1$ (κελί a_{11}).
- b. αν ο II επιλέξει δύο τότε χάνει ($1+2=\text{περιττό}$), επομένως αποτέλεσμα -1 (κελί a_{21}).
- c. αν ο II επιλέξει τρία τότε κερδίζει ($1+3=\text{άρτιο}$), επομένως αποτέλεσμα $+1$ (κελί a_{31}).

4. Να επιλέξει δύο(2) δάκτυλα:

- a. αν ο II επιλέξει ένα τότε χάνει ($2+1=\text{περιττό}$), επομένως αποτέλεσμα -1 (κελί a_{21}).
- b. αν ο II επιλέξει δύο τότε κερδίζει ($2+2=\text{άρτιο}$), επομένως αποτέλεσμα $+1$ (κελί a_{22}).
- c. αν ο II επιλέξει τρία τότε χάνει ($2+3=\text{περιττό}$), επομένως αποτέλεσμα -1 (κελί a_{23}).

5. Να επιλέξει τρία(3) δάκτυλα:

- a. αν ο II επιλέξει ένα τότε κερδίζει ($3+1=\text{άρτιο}$), επομένως αποτέλεσμα $+1$ (κελί a_{31}).
- b. αν ο II επιλέξει δύο τότε χάνει ($3+2=\text{περιττό}$), επομένως αποτέλεσμα -1 (κελί a_{32}).
- c. αν ο II επιλέξει τρία τότε κερδίζει ($3+3=\text{άρτιο}$), επομένως αποτέλεσμα $+1$ (κελί a_{33}).

Από τα αποτελέσματα αυτά διαμορφώνεται ο παρακάτω πίνακας πληρωμών. Αντίστοιχος πίνακας θα προέκυπτε αν καταγράφαμε τις στρατηγικές από τη μεριά (άποψη) του παίκτη II.

Πίνακας πληρωμών του παίκτη I

I	II		
	1	2	3
1	+1	-1	+1
2	-1	+1	-1
3	+1	-1	+1