

ΚΕΦ.7 ΔΥΑΔΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Τα προβλήματα αυτά εμπεριέχουν τη λήψη αποφάσεων του τύπου “ναι” ή “όχι”. Τότε η αντίστοιχη μεταβλητή του προβλήματος μπορεί να πάρει μόνο **δύο τιμές, 0 ή 1**, και η σχετική απόφαση παριστάνεται με μια μεταβλητή x τέτοια ώστε:

$x = 1$ αν η απόφαση είναι ναι

0 αν η απόφαση είναι όχι

Οι μεταβλητές αυτού του τύπου ονομάζονται δυαδικές.

Παράδειγμα 7.1

Μια εμπορική επιχείρηση θέλει να επεκταθεί στην περιοχή της Δυτικής Μακεδονίας. Η επιχείρηση σκέφτεται να δημιουργήσει ένα υποκατάστημα στην Κοζάνη ή στην Καστοριά ή από ένα υποκατάστημα και στις δύο πόλεις. Υπάρχει επίσης η σκέψη για την ίδρυση μιας αποθήκης στην περιοχή, αλλά στην περίπτωση αυτή, η αποθήκη πρέπει να γίνει στα περίχωρα της πόλης που θα δημιουργηθεί υποκατάστημα. Η επιχείρηση εκτίμησε τις καθαρές αποδόσεις για τα πρώτα 5 χρόνια, που φαίνονται στον παρακάτω πίνακα. Επίσης, στον πίνακα δίνονται τα απαιτούμενα κεφάλαια για τη δημιουργία υποκαταστημάτων και αποθηκών. Η επιχείρηση έχει διαθέσιμα (το πολύ) 50.000€ για την αρχική επένδυση. Να βρεθεί ο σχεδιασμός που θα δώσει τη **μέγιστη απόδοση**.

Απόφαση	Ναι ή όχι	Απόδοση	Απαιτ.κεφάλαιο
1	Υποκατ. στην Κοζάνη	45.000	30.000
2	Υποκατ. στην Καστοριά	25.000	15.000
3	Αποθήκη στην Κοζάνη	30.000	25.000
4	Αποθήκη στην Καστοριά	20.000	10.000

Στο πρόβλημα υπάρχουν 4 αποφάσεις του τύπου “ναι” ή “όχι” και, επομένως, στο μαθηματικό πρότυπο θα υπάρχουν επίσης 4 δυαδικές **μεταβλητές** x_1, x_2, x_3 , και x_4 , όπου:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{αν η απόφαση } j \text{ είναι ναι} \\ 0 & \text{αν η απόφαση } j \text{ είναι όχι} \end{cases}$$

Δηλαδή αν γίνει υποκατάστημα στην Κοζάνη τότε $x_1=1$, αν δε γίνει στην Κοζάνη τότε $x_1=0$, αν γίνει στην Καστοριά $x_2=1$ κ.ο.κ.

Οι **περιορισμοί** που πρέπει να δημιουργηθούν προκύπτουν από τα παρακάτω:

- Επειδή θα δημιουργηθεί τουλάχιστον ένα υποκατάστημα στην περιοχή, πρέπει να είναι: $x_1 + x_2 \geq 1$.
- Επίσης, θα δημιουργηθεί το πολύ μια αποθήκη: $x_3 + x_4 \leq 1$.
- Περιορισμός κεφαλαίου: $30x_1 + 15x_2 + 25x_3 + 10x_4 \leq 50$.
- Οι αποθήκες θα γίνουν σε σχέση με τα υποκαταστήματα, οπότε: Αν 1^η απόφαση είναι όχι (υποκατάστημα στην Κοζάνη), τότε και η 3^η απόφαση (αποθήκη στην Κοζάνη) πρέπει να είναι όχι.

Αν η 2^η απόφαση είναι όχι (υποκατάστημα στην Καστοριά) , τότε και η 4^η απόφαση (αποθήκη στην Καστοριά) πρέπει να είναι όχι, δηλαδή: $x_3 \leq x_1$ και $x_4 \leq x_2$.

Το τελικό πρόβλημα διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \max z &= 45x_1 + 25x_2 + 30x_3 + 20x_4 \\ x_1 + x_2 &\geq 1 \\ x_3 + x_4 &\leq 1 \\ x_3 &\leq x_1 \Rightarrow x_3 - x_1 \leq 0 \\ x_4 &\leq x_2 \Rightarrow x_4 - x_2 \leq 0 \\ 30x_1 + 15x_2 + 25x_3 + 10x_4 &\leq 50 \\ x_1, x_2, x_3, \text{ και } x_4 &\in \{0,1\} \end{aligned}$$

Μαθηματικές διατυπώσεις προβλημάτων

Λογικές δομές

- Ζεύγη περιορισμών είτε-είτε (αν ικανοποιείται ένας από τους περιορισμούς)
- Τουλάχιστον Κ από τους Ν περιορισμούς πρέπει να ισχύουν
- Συναρτήσεις με Ν δυνατές τιμές
- Συναρτήσεις υπό συνθήκη.

Παραδείγματα

Παράδειγμα 7.5

Μια εταιρεία έχει 4 επενδυτικά σχέδια Α, Β, Γ και Δ. Έχει εκτιμηθεί η παρούσα αξία των καθαρών ταμειακών ροών κάθε σχεδίου και οι απαιτήσεις του σε επενδυμένο κεφάλαιο, σε κάθε μία από τέσσερις χρονικές περιόδους. Επιπλέον, το διαθέσιμο κεφάλαιο της εταιρείας σε κάθε περίοδο είναι περιορισμένο, στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται τα σχετικά δεδομένα.

		Απαιτ.κεφάλαιο			
Σχέδιο	Παρούσα αξία	1 ^η περίοδος	2 ^η περίοδος	3 ^η περίοδος	4 ^η περίοδος
Α	30.000	5.000	8.000	6.000	4.000
Β	14.000	2.000	4.000	3.000	0
Γ	10.000	2.000	3.500	0	1.500
Δ	24.000	12.000	8.000	0	0
Διαθ.κεφάλαιο		20.000	22.000	10.000	6.000

Ποια από τα σχέδια πρέπει να επιλέγουν, ώστε να **μεγιστοποιηθεί** η συνολική παρούσα αξία:

Μαθηματική διατύπωση:

Οι μεταβλητές απόφασης είναι:

$x_1=1$, όταν επιλέγεται το σχέδιο Α, διαφορετικά $x_1=0$.

$x_2=1$, όταν επιλέγεται το σχέδιο Β, διαφορετικά $x_2=0$.

$x_3=1$, όταν επιλέγεται το σχέδιο Γ, διαφορετικά $x_3=0$.

$x_4=1$, όταν επιλέγεται το σχέδιο Δ, διαφορετικά $x_4=0$.

Το τελικό πρόβλημα θα είναι:

$$\max z = 30.000x_1 + 14.000x_2 + 10.000x_3 + 24.000x_4$$

$$5.000x_1 + 2.000x_2 + 2.000x_3 + 12.000x_4 \leq 20.000$$

$$8.000x_1 + 4.000x_2 + 3.500x_3 + 8.000x_4 \leq 22.000$$

$$6.000x_1 + 3.000x_2 \leq 10.000$$

$$4.000x_1 + 1.500x_3 \leq 6.000$$

$$x_1, x_2, x_3, \text{ και } x_4 \in \{0,1\}$$