

Μέθοδος Simplex

Η μέθοδος simplex ξεκινάει από μια **κορυφή (λύση)** και πηγαίνει, από κορυφή σε κορυφή, κατά μήκος των ακμών της εφικτής περιοχής, ώστε να βελτιώνεται η αντικειμενική συνάρτηση, μέχρι να φτάσει σε μια κορυφή, που δεν έχει καλύτερες γειτονικές κορυφές.

Τα 3 βήματα της μεθόδου:

- Ποια μεταβλητή συμφέρει να γίνει βασική και να εισέλθει στη βάση
- Ποια μεταβλητή θα γίνει μη βασική, δηλαδή θα εξέλθει από τη βάση
- Ποια είναι η νέα εφικτή λύση;

Παράδειγμα σελ.90 βιβλίου

$\max z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$	Αντικ.συνάρτηση	
$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5$	Γραμ.Περιορισμός (1)	
$4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 11$	Γραμ.Περιορισμός (2)	(I)
$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8$	Γραμ.Περιορισμός (3)	
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$		

Μετατροπή σε **τυπική μορφή** με τη χρήση περιθωρίων μεταβλητών, s_1 , s_2 , και s_3 , οι οποίες θεωρούνται βασικές.

$\max z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$	Αντικ.συνάρτηση	
$2x_1 + 3x_2 + x_3 + s_1 = 5$	Γραμ.Περιορισμός (1)	
$4x_1 + x_2 + 2x_3 + s_2 = 11$	Γραμ.Περιορισμός (2)	(II)
$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + s_3 = 8$	Γραμ.Περιορισμός (3)	
$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$		

Το παραπάνω σύστημα, μπορεί επίσης να γραφεί στη μορφή (λύση ως προς θετικές-βασικές):

$z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$	Αντικ.συνάρτηση	
$s_1 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3$	Γραμ.Περιορισμός (1)	
$s_2 = 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3$	Γραμ.Περιορισμός (2)	(III)
$s_3 = 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3$	Γραμ.Περιορισμός (3)	

Μια πρώτη **εφικτή λύση** είναι η $x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 = (0, 0, 0, 5, 11, 8)$, η οποία δίνει στην αντικειμενική συνάρτηση z , την τιμή 0.

1^η επανάληψη

Βήμα 1^ο Επιλογή μεταβλητής που συμφέρει να αυξηθεί (Βασικές-θετικές: s_1, s_2, s_3)

Στην αντικ.συνάρτηση $z=5x_1+4x_2+3x_3$, εξετάζεται ποια μεταβλητή έχει το **μεγαλύτερο θετικό συντελεστή** και συμφέρει να αυξηθεί. Εδώ είναι η x_1 , η οποία έχει συντελεστή 5, οι άλλες παραμένουν 0.

Βήμα 2^ο Επιλογή μεταβλητής που γίνεται μη βασική

Το σύστημα (III) γίνεται (αφού τα x_2, x_3 παραμένουν 0):

$$s_1=5-2x_1$$

$$s_2=11-4x_1$$

$$s_3=8-3x_1$$

Όλες οι παραπάνω εξισώσεις, πρέπει να είναι ≥ 0 , οπότε:

$$5-2x_1 \geq 0, \text{ οπότε } x_1 \leq 5/2=2,5$$

$$11-4x_1 \geq 0, \text{ οπότε } x_1 \leq 11/4=2,75$$

$$8-3x_1 \geq 0, \text{ οπότε } x_1 \leq 8/3=2,67$$

Οι 3 περιορισμοί **συναληθεύουν** για $x_1 \leq 2,5$, άρα η μεγαλύτερη τιμή που παίρνει η x_1 είναι η 2,5. Όταν η $x_1 = 2,5$, ο περιορισμός γίνεται ισότητα και η s_1 μηδενίζεται (στην $s_1=5-2x_1$) και γίνεται μη βασική και βγαίνει από το σύστημα. Οι άλλες **λύσεις** είναι: $s_2=11-4x_1 = 1$ και $s_3=8-3x_1=0,5$.

Βήμα 3^ο Νέα εφικτή λύση- διαμόρφωση νέου συστήματος εξισώσεων (Βασικές-θετικές: x_1, s_2, s_3)

Νέα εφικτή λύση: $(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3) = (5/2, 0, 0, 0, 1, 1/2)$, η οποία είναι καλύτερη από την

προηγούμενη, αφού δίνει στην αντικ.συνάρτηση την τιμή 12,5 ($z=5x_1+4x_2+3x_3=5 \cdot 2,5 + 0 + 0=12,5$).

Νέο σύστημα εξισώσεων: Μετατρέπουμε το σύστημα (III), έχοντας στο α' μέρος μόνο τις θετικές-βασικές (x_1, s_2, s_3) και στο β' μέρος μόνο τις μη βασικές; (μη βασικές- (x_2, x_3, s_1)).

$$z=5x_1+4x_2+3x_3 \Rightarrow z=5(5/2-3/2x_2-1/2x_3-1/2s_1)+4x_2+3x_3$$

$$(III) \quad s_1=5-2x_1+3x_2+x_3 \Rightarrow x_1=5/2-3/2x_2-1/2x_3-1/2s_1$$

$$s_2=11-4x_1+x_2+2x_3 \Rightarrow s_2=11-4(5/2-3/2x_2-1/2x_3-1/2s_1)-x_2-2x_3$$

$$s_3=8-3x_1+4x_2+2x_3 \Rightarrow s_3=8-3(5/2-3/2x_2-1/2x_3-1/2s_1)-4x_2-2x_3$$

$$z=25/2-7/2x_2+1/2x_3-5/2s_1$$

$$x_1=5/2-3/2x_2-1/2x_3-1/2s_1$$

$$s_2=1+5x_2+2s_1$$

$$s_3=1/2+1/2x_2-1/2x_3+3/2s_1$$

(IV)

2^η επανάληψη

Βήμα 1^ο Επιλογή μεταβλητής που συμφέρει να αυξηθεί (Βασικές-θετικές: x_1, s_2, s_3)

Στην αντικ.συνάρτηση $z = 25/2 - 7/2x_2 + \boxed{1/2}x_3 - 5/2s_1$, εξετάζεται ποια μεταβλητή έχει το μεγαλύτερο θετικό συντελεστή και συμφέρει να αυξηθεί. Εδώ είναι η x_3 , η οποία έχει συντελεστή $1/2=0,5$.

Βήμα 2^ο Επιλογή μεταβλητής που γίνεται μη βασική

Το σύστημα (IV) γίνεται (αφού τα x_2, s_1 παραμένουν 0):

$$x_1 = 5/2 - 1/2x_3$$

$$s_2 = 1$$

$$s_3 = 1/2 - 1/2x_3$$

Όλες οι παραπάνω εξισώσεις, πρέπει να είναι ≥ 0 , οπότε:

$$x_1 = 5/2 - 1/2x_3 \geq 0 \Rightarrow 5/2 \geq 1/2x_3 \Rightarrow x_3 \leq 5$$

$$s_2 = 1 \geq 0$$

$$s_3 = 1/2 - 1/2x_3 \geq 0 \Rightarrow 1/2 \geq 1/2x_3 \Rightarrow x_3 \leq 1$$

Άρα η μεγαλύτερη τιμή που παίρνει η x_3 είναι η 1. Όταν η $x_3 = 1$, ο περιορισμός γίνεται ισότητα και η s_3 μηδενίζεται (στην $s_3 = 1/2 - 1/2x_3$) και γίνεται μη βασική. Οι άλλες λύσεις είναι: $x_1 = 5/2 - 1/2x_3 = 2$ και $s_2 = 1$.

Βήμα 3^ο Νέα εφικτή λύση- διαμόρφωση νέου συστήματος εξισώσεων (Βασικές-θετικές: x_1, x_3, s_2)

Νέα εφικτή λύση: $(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3) = (2, 0, 1, 0, 1, 0)$, η οποία είναι καλύτερη από την προηγούμενη, αφού δίνει στην αντικ.συνάρτηση την τιμή $\boxed{13}$ ($z = 25/2 - 7/2x_2 + 1/2x_3 - 5/2s_1 = 25/2 - 0 + 1/2 - 0 = 13$).

Νέο σύστημα εξισώσεων: Μετατρέπουμε το σύστημα (IV), έχοντας στο α' μέρος μόνο τις θετικές-βασικές μεταβλητές (x_1, x_3, s_2) και στο β' μέρος μόνο τις μη βασικές, (μη βασικές- (x_2, s_1, s_3)).

$$z = 25/2 - 7/2x_2 + 1/2x_3 - 5/2s_1 \Rightarrow z = 25/2 - 0 + 1 + x_2 + 3s_1 - 2s_3 + 0$$

$$(IV) \quad x_1 = 5/2 - 3/2x_2 - 1/2x_3 - 1/2s_1 \Rightarrow x_1 = 5/2 - 0 - 1/2 (+x_2 + 3s_1 - 2s_3) - 0$$

$$s_2 = 1 + 5x_2 + 2s_1 \Rightarrow$$

$$s_3 = 1/2 + 1/2x_2 - 1/2x_3 + 3/2s_1 \Rightarrow x_3 = 1 + x_2 + 3s_1 - 2s_3$$

$$z = 13 - 3x_2 - s_1 - s_3$$

$$x_1 = 2 - 2x_2 - 2s_1 + s_3$$

$$x_3 = 1 + x_2 + 3s_1 - 2s_3$$

$$s_2 = 1 + 5x_2 + 2s_1$$

(V)

Στην τελευταία αντικειμενική συνάρτηση, όλες οι μεταβλητές έχουν αρνητικό συντελεστή $(-3, -1, -1)$, οπότε όποια κι αν αυξηθεί θα έχουμε μείωση της τιμής. Επομένως, δε μπορεί να προσδιοριστεί καλύτερη λύση και η βέλτιστη είναι: $x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 = (2, 0, 1, 0, 1, 0)$, με βέλτιστη τιμή $z=13$.

Μέθοδος Simplex