

Ανάλυση ευαισθησίας

Περιεχόμενα:

1. Τι είναι η ανάλυση ευαισθησίας
2. Ερωτήματα που απαντώνται
3. Εύρεση κλίσης ευθείας
4. Αλλαγές στους συντελεστές
5. Εύρεση ορίων-ανάλυση ευαισθησίας συντελεστών
6. Κανόνας του 100%.

1. Τι είναι η ανάλυση ευαισθησίας

Είναι η μελέτη των αλλαγών στις παραμέτρους προβλημάτων Γ.Π. και κατά πόσο αυτές οι αλλαγές επηρεάζουν την τελική λύση. Η ανάλυση ευαισθησίας παρέχει σημαντικές πληροφορίες, αφού οι παράμετροι που μελετούνται, αναφέρονται σε οικονομικά μεγέθη, όπως τιμές πώλησης, κόστος παραγωγής, διαθεσιμότητα παραγωγικών συντελεστών κλπ.

2. Ερωτήματα που απαντώνται

Εξετάζεται η επίδραση των αλλαγών των παραμέτρων (Α. συντελεστών αντικ.συνάρτησης, Β. σταθερών όρων) στη βέλτιστη λύση του προβλήματος. Εδώ θα εξεταστεί μόνο η περίπτωση Α.

Θα χρησιμοποιηθεί το Παράδειγμα 3.2 του βιβλίου, (η βέλτιστη τιμή της αντικ.συνάρτησης του προβλήματος βρέθηκε και είναι 2280, με βέλτιστες λύσεις $x_1=40$, $x_2=100$).

$\max z = 12x_1 + 18x_2 = 2280$	Αντικ.συνάρτηση
$1,5x_1 + 1,2x_2 \leq 180$	Γραμ.Περιορισμός (1)
$0,5x_1 + 1,0x_2 \leq 120$	Γραμ.Περιορισμός (2)

3. Εύρεση κλίσης ευθείας

Στην ευθεία της αντικειμενικής συνάρτησης $12x_1 + 18x_2 = 2280$, λύνουμε ως προς $x_2 = (2280 - 12x_1) / 18 = -12/18x_1 + 126,67$.

Ο αριθμός $-12/18$ είναι η **κλίση** της ευθείας και το $126,67$ δείχνει **το σημείο** που η ευθεία τέμνει τον άξονα x_2 .

4. Αλλαγές στους συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης

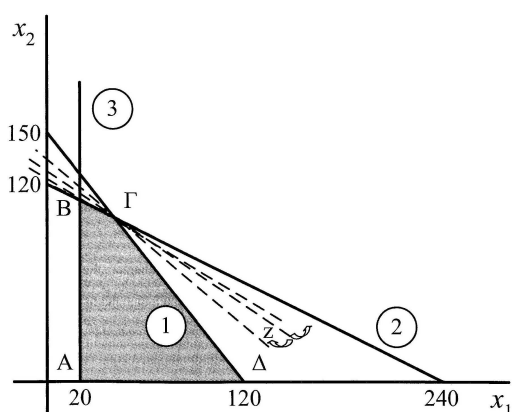
Είναι φανερό ότι οι αλλαγές στους συντελεστές της αντικ.συνάρτησης 12 και 18, δεν επηρεάζουν την εφικτή περιοχή, αφού αυτή ορίζεται από τις ευθείες των περιορισμών. Αυτό είναι σαφέστερο στον παρακάτω πίνακα.

Πιθανές αλλαγές στους συντελεστές της αντικειμενικής

Συντελ. που αλλ.	Παλιά τιμή	Νέα τιμή	$z=$	$x_2=$	Αποτελ.
Συντελ. της x_1	12	13	$(13 \cdot 40) + (18 \cdot 100) = 2320$	$(2320 - 13x_1) / 18 =$ $-13/18x_1 + 128,9$	Κλίση ευθ.πιο αρνητ.(φορά δεικτών)
Συντελ. της x_1	12	11	$(11 \cdot 40) + (18 \cdot 100) = 2240$	$(2240 - 11x_1) / 18 =$ $-11/18x_1 + 124,45$	Κλίση ευθ.λιγότερο αρνητ.
Συντελ. της x_2	18	19	$(12 \cdot 40) + (19 \cdot 100) = 2380$	$(2380 - 12x_1) / 19 =$ $-12/19x_1 + 125,56$	Κλίση ευθ.λιγότερο αρνητ.
Συντελ. της x_2	18	17	$(12 \cdot 40) + (17 \cdot 100) = 2180$	$(2180 - 12x_1) / 17 =$ $-12/17x_1 + 128,84$	Κλίση ευθ.πιο αρνητ.

Τελικό συμπέρασμα είναι, ότι όταν αλλάζουν οι τιμές των συντελεστών της αντικ.συνάρτησης αλλάζει η τιμή της, όχι όμως υποχρεωτικά και η βέλτιστη λύση.

Τα όρια εντός των οποίων μπορεί να περιστραφεί η ευθεία της αντικ.συνάρτησης, χωρίς να αλλάξει η λύση, προσδιορίζονται από τα όρια των ευθειών του περιορισμού (2) (ευθ.τμήμα ΒΓ) και του περιορισμού (1) (ευθ.τμήμα ΓΔ).



Σχήμα 3.13: Ανάλυση ευαισθησίας του συντελεστή c_1

5. Εύρεση ορίων εντός των οποίων μπορεί να περιστραφεί η ευθεία της αντικ.συνάρτησης χωρίς να αλλάξει η βέλτιστη λύση.

A. Αλλαγές συντελεστών αντικειμενικής συνάρτησης (I. c_1 και II. c_2)

I. Ανάλυση ευαισθησίας του συντελεστή c_1 .

Με σταθερό τον συντελεστή $c_2=18$ της x_2 , (δηλαδή η αντικ.συνάρτηση είναι: $c_1x_1+18x_2$)

Αν c_2 σταθερό και ίσο με 18, στην $c_1x_1+18x_2=2280$, (κλίση της ευθείας $-c_1/18$): τότε:

(1) $1,5x_1+1,2x_2=180$, οπότε $x_2=(-1,5 / 1,2)x_1 + 150$ κλίση ευθείας $-1,5 / 1,2$

(2) $0,5x_1+1,0x_2=120$, οπότε $x_2=(-0,5 / 1,0)x_1 + 120$ κλίση ευθείας $-0,5 / 1,0$

Το σημείο Γ που είναι η τομή των παραπάνω ευθειών, θα συνεχίσει να παρέχει τη βέλτιστη λύση, αν η κλίση της ευθείας που αλλάζει (αντ.συνάρτηση) είναι ανάμεσα στις κλίσεις των ευθειών των δεσμευτικών περιορισμών, δηλαδή:

$(-1,5 / 1,2) \leq (-c_1/18) \leq (-0,5 / 1,0)$, $\Rightarrow -1,25 \leq (-c_1/18) \leq -0,5$ και πολλαπλασιάζοντας με το -18 , έχουμε: $22,5 \geq c_1 \geq 9$, οπότε $9 \leq c_1 \leq 22,5$.

Τελικό συμπέρασμα: με σταθερό το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος B, το κέρδος του A μπορεί να μειωθεί ως 9 ή να αυξηθεί ως τα 25, χωρίς να αλλάξει η βέλτιστη λύση.

II. Ανάλυση ευαισθησίας του συντελεστή c_2 .

Με σταθερό τον συντελεστή $c_1=12$ της x_1 , (δηλαδή η αντικ.συνάρτηση είναι: $12x_1+c_2x_2$)

Αν c_1 σταθερό και ίσο με 12, στην $12x_1+c_2x_2=2280$, (κλίση της ευθείας $-c_2/12$), τότε:

(1) $1,5x_1+1,2x_2=180$, οπότε $x_1=(-1,2 / 1,5)x_2 + 120$ κλίση ευθείας $-1,2 / 1,5$

(2) $0,5x_1+1,0x_2=120$, οπότε $x_1=(-1,0 / 0,5)x_2 + 240$ κλίση ευθείας $-1,0 / 0,5$

Το σημείο Γ που είναι η τομή των παραπάνω ευθειών, θα παρέχει τη βέλτιστη λύση αν η κλίση της ευθείας που αλλάζει (αντικ.συνάρτηση) είναι ανάμεσα στις κλίσεις των ευθειών των δεσμευτικών περιορισμών, δηλαδή αν:

$(-1,0 / 0,5) \leq (-c_2/12) \leq (-1,2 / 1,5)$, $\Rightarrow -2 \leq (-c_2/12) \leq -0,8$ και πολλαπλασιάζοντας με το -12 , έχουμε: $24 \geq c_2 \geq 9,6$, οπότε $9,6 \leq c_2 \leq 24$.

Τελικό συμπέρασμα: με σταθερό το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος A, το κέρδος του B μπορεί να μειωθεί ως 9,6 ή να αυξηθεί ως τα 24 χωρίς να αλλάξει η βέλτιστη λύση.

Ανάλυση ευαισθησίας

6. Ταυτόχρονες αλλαγές και στους δύο συντελεστές της αντικ.συνάρτησης

Κανόνας του 100%: η βέλτιστη λύση παραμένει η ίδια όταν το άθροισμα των ποσοστιαίων μεταβολών των συντελεστών που αυξάνονται και αυτών που μειώνονται δε ξεπερνάει το 100%. Για τους συντελεστές που αυξάνονται υπολογίζεται η αύξηση ως ποσοστό της επιτρεπόμενης αύξησης, ενώ για τους συντελεστές που μειώνονται υπολογίζεται η μείωση ως ποσοστό της επιτρεπόμενης μείωσης.

Παράδειγμα: Έχουμε την αντικ.συνάρτηση $\max z = 12x_1 + 18x_2 = 2280$ και τα όρια αύξησης και μείωσης των συντελεστών είναι: $9 \leq c_1 \leq 22,5$, και $9,6 \leq c_2 \leq 24$

Έστω ότι η τιμή του συντελεστή της μεταβλητής x_1 αυξάνεται κατά 4 μονάδες, ενώ τιμή του συντελεστή της μεταβλητής x_2 μειώνεται κατά 5 μονάδες. Να βρεθεί αν αλλάζει η βέλτιστη λύση.

	Μεταβολή	Ποσό μεταβολής	Όρια Επιτρεπόμενων (Ανώτερο –Τρέχον) ή (Τρέχον-Κατώτερο)	Ποσοστό τρέχουσας μεταβολής
Συντ. x_1	Αύξηση	4	$22,5 - 12 = 10,5$	$(4/10,5) * 100 = 38,1\%$
Συντ. x_2	Μείωση	5	$18 - 9,6 = 8,4$	$(5/8,4) * 100 = 59,5\%$
Σύνολο				97,6%

Το άθροισμα είναι κάτω από 100% οπότε οι παραπάνω μεταβολές δεν αλλάζουν τη βέλτιστη λύση του προβλήματος. Πιο συγκεκριμένα η αντικειμενική συνάρτηση γίνεται: $z = 16x_1 + 13x_2 \Rightarrow 13x_2 = z - 16x_1 \Rightarrow x_2 = (-16/13)x_1 + z/13$. Η κλίση $(-16/13)$ της ευθείας παραμένει εντός των επιτρεπόμενων ορίων $(-1,5/1,2) < (-16/13) < (-0,5/1,0)$.