

## Γραφική επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού

Η γραφική μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού με δυο μόνο μεταβλητές. Στην περίπτωση που περιλαμβάνονται τρεις ή περισσότερες μεταβλητές, η εφαρμογή της μεθόδου είναι πρακτικά δύσκολη· ενώ, όταν περιλαμβάνονται τέσσερις ή περισσότερες, είναι αδύνατη και αυτό διότι η μέθοδος στηρίζεται στη διαγραμματική παρουσίαση του προβλήματος σε ένα επίπεδο ή στο χώρο. Συνεπώς, είναι κατάλληλη για προβλήματα δυο ή το πολύ τριών διαστάσεων.

Η διαδικασία που ακολουθείται για την επίλυση ενός προβλήματος με τη γραφική μέθοδο περιλαμβάνει γενικά τα παρακάτω βήματα:

1. Δημιουργία μιας περιοχής (εφικτή περιοχή) που περιλαμβάνει όλα τα σημεία (εφικτές λύσεις) του προβλήματος.
2. Αρχικός σχεδιασμός της ευθείας της αντικειμενικής συνάρτησης με βάση μία αυθαίρετη τιμή για τη μεταβλητή  $z$ .
3. Παράλληλη μετατόπιση της αρχικής ευθείας της αντικειμενικής συνάρτησης προς κατώτερες τιμές, όταν πρόκειται για πρόβλημα ελαχιστοποίησης, ή προς ανώτερες τιμές, όταν πρόκειται για πρόβλημα μεγιστοποίησης, μέχρι το σημείο που η ευθεία «αφήνει» την εφικτή περιοχή, δηλαδή μέχρι το σημείο πέραν του οποίου βρίσκεται πια έξω από την εφικτή περιοχή. Το σημείο αυτό προσδιορίζει και την βέλτιστη λύση του προβλήματος.

### 3.1 Επίλυση προβλημάτων μεγιστοποίησης

#### Παράδειγμα 3.1

Σε μια βιοτεχνία παρασκευάζεται ζύμη για εργαστήρια ζαχαροπλαστικής. Η ζύμη είναι δυο ειδών: τύπου Α και τύπου Β. Τα υλικά που χρησιμοποιούνται για την παρασκευή των δυο ειδών ζύμης είναι τέσσερα. Δίνονται στον παρακάτω πίνακα οι απαιτούμενες ποσότητες υλικών για μία μονάδα του κάθε είδους και οι διαθέσιμες ποσότητες τους κατά την τρέχουσα περίοδο.

| Ζύμη                      | Υλικά |       |     |       |
|---------------------------|-------|-------|-----|-------|
|                           | 1     | 2     | 3   | 4     |
| A                         | 70    | 40    | 30  | 130   |
| B                         | 80    | 70    | 20  | 100   |
| Διαθέσιμη ποσότητα υλικών | 2.400 | 1.800 | 900 | 4.600 |

### Κεφάλαιο 3

Από την πώληση κάθε μονάδας ζύμης τύπου A και τύπου B η βιοτεχνία αναμένεται να έχει κέρδος 10 και 16€ αντίστοιχα. Με δεδομένη τη διαθεσιμότητα των υλικών, πόσες μονάδες από τα δυο είδη πρέπει να παρασκευαστούν ώστε να μεγιστοποιηθεί το κέρδος;

#### Μαθηματική διατύπωση του προβλήματος

$x_1$ : παραγόμενες μονάδες ζύμης τύπου A

$x_2$ : παραγόμενες μονάδες ζύμης τύπου B

$$\max z = 10x_1 + 16x_2$$

$$(1): 70x_1 + 80x_2 \leq 2.400$$

$$(2): 40x_1 + 70x_2 \leq 1.800$$

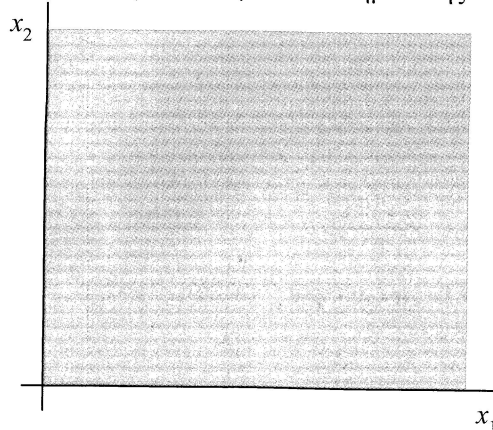
$$(3): 30x_1 + 20x_2 \leq 900$$

$$(4): 130x_1 + 100x_2 \leq 4.600$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

#### Επίλυση του προβλήματος

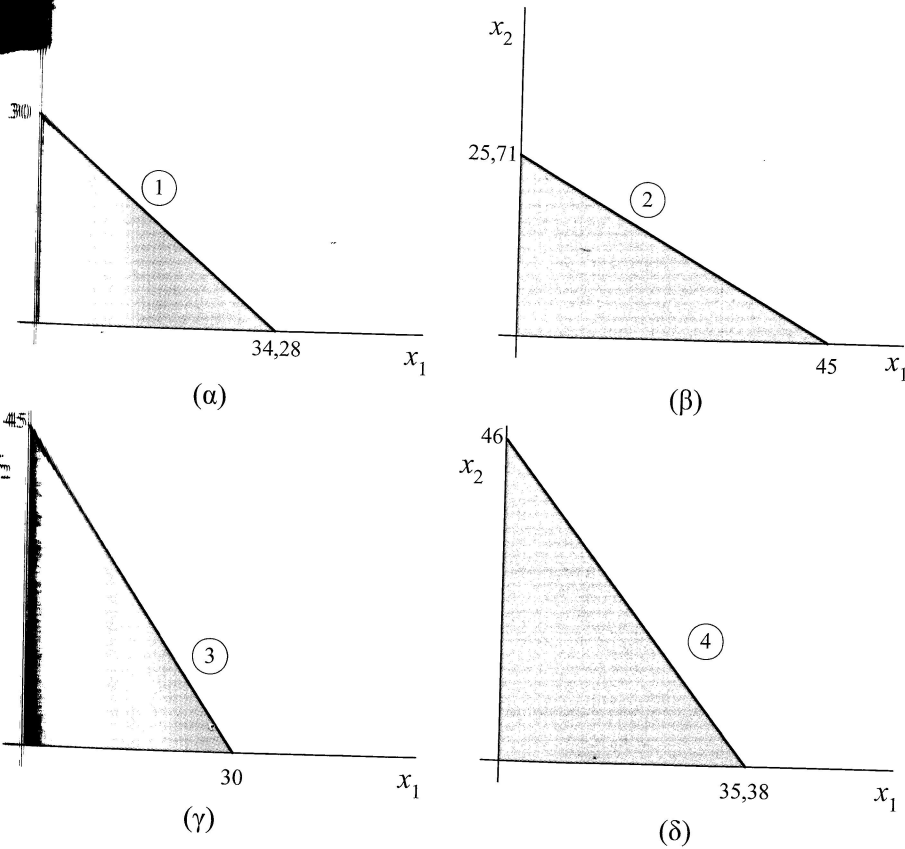
Στο σχήμα 3.1 παρουσιάζεται το καρτεσιανό διάγραμμα των τιμών των μεταβλητών  $x_1$  και  $x_2$ . Η περιοχή του πρώτου τεταρτημόριου (σκιαγραφημένη περιοχή) περιλαμβάνει όλα τα σημεία (λύσεις) που ικανοποιούν τους περιορισμούς μη αρνητικότητας των μεταβλητών, με δεδομένο ότι για κάθε σημείο της περιοχής ισχύει  $x_1, x_2 \geq 0$ .



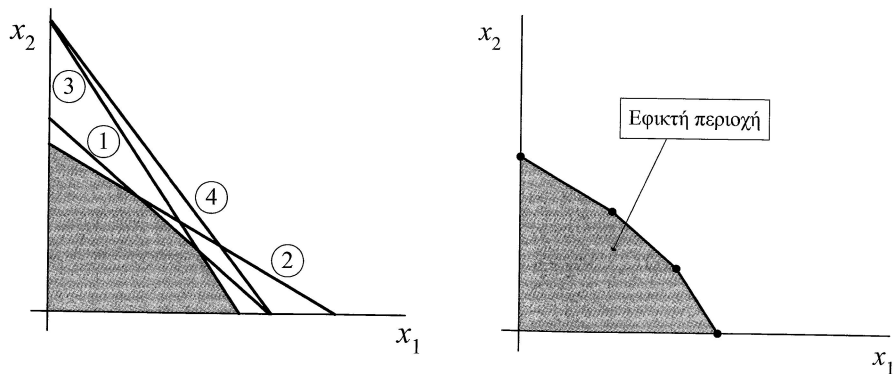
Σχήμα 3.1: Περιορισμοί μη αρνητικότητας

Ο πρώτος περιορισμός του προβλήματος είναι:  $70x_1 + 80x_2 \leq 2.400$  και, για να προσδιοριστεί η περιοχή (ημιεπίπεδο) των σημείων που τον ικανοποιούν, πρέπει πρώτα να παρουσιαστεί η γραμμή της εξίσωσης:  $70x_1 + 80x_2 = 2.400$  και επομένως τα σημεία που τον ικανοποιούν ως ισότητα. Θέτοντας  $x_1 = 0$ , η  $x_2$  είναι ίση με 30· ενώ για  $x_2 = 0$ , η  $x_1$  είναι ίση με 34,28. Επομένως, δυο σημεία που ορίζουν τη γραμμή της εξίσωσης έχουν συντεταγμένες (0, 30) και (34,28, 0). Τα σημεία που βρίσκονται πάνω σε αυτήν τη γραμμή και τα σημεία που βρίσκονται στα αριστερά της (εντός του πρώτου τεταρτημόριου) ικανοποιούν τον πρώτο περιορισμό του προβλήματος, καθώς και τους περιορισμούς μη αρνητικότητας των μεταβλητών (βλέπε σκια-

περιοχή στο σχήμα 3.2(α)). Με εντελώς ανάλογο τρόπο προσδιορίζονται οι περιοχές που περιλαμβάνουν τα σημεία που ικανοποιούν και τους υπόλοιπους περιορισμούς του προβλήματος (βλέπε σκιαγραφημένες περιοχές των γραφικών παραστάσεων 3.2(β), 3.2(γ) και 3.2(δ)). Τέλος, έχοντας προσδιορίσει τις περιοχές (ημι-επιπέδων) που ικανοποιούν έναν προς έναν όλους τους περιορισμούς, προκύπτει ότι η περιοχή που τους ικανοποιεί όλους ταυτόχρονα είναι η τομή των περιοχών (ημιοριζών). Η τομή αυτή ονομάζεται *εφικτή περιοχή* και περιλαμβάνει όλα τα σημεία (λύσεις) του προβλήματος (βλέπε γραφικές παραστάσεις 3.3).



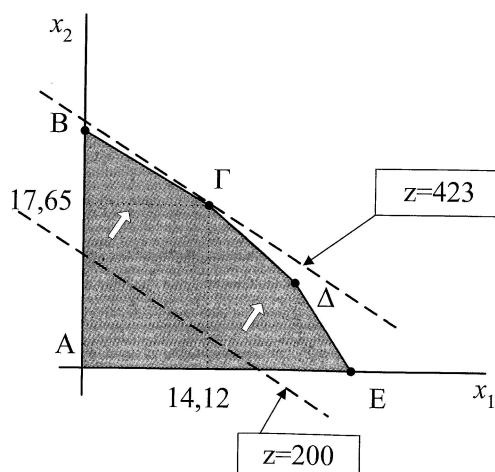
Σχήμα 3.2: Γραφική απεικόνιση περιορισμών



Σχήμα 3.3: Γραφική απεικόνιση εφικτής περιοχής

Με δεδομένη την εφικτή περιοχή, η διαδικασία που ακολουθείται για την εύρεση της βέλτιστης λύσης είναι η εξής:

1. Δίνεται μία αυθαίρετη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση, έστω  $z = 200$ , και σχεδιάζεται η ευθεία της εξίσωσης:  $10x_1 + 16x_2 = 200$  πάνω στο διάγραμμα. Θέτοντας  $x_1 = 0$ , η  $x_2$  είναι ίση με 12,5' ενώ για  $x_2 = 0$ , η  $x_1$  είναι ίση με 20. Επομένως, τα δυο σημεία που ορίζουν την ευθεία της εξίσωσης είναι:  $(0, 12,5)$  και  $(20, 0)$ .
2. Μετατοπίζεται παράλληλα προς τα δεξιά η ευθεία της αντικειμενικής συνάρτησης, μέχρι το τελευταίο σημείο της εφικτής περιοχής (σημείο Γ). Σημειώνεται ότι παράλληλη μετατόπιση προς τα δεξιά συνεπάγεται αύξηση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης. Στο σημείο Γ, σύμφωνα με τη γραφική παράσταση του σχήματος 3.4, αντιστοιχεί η βέλτιστη λύση του προβλήματος:  $(x_1, x_2) = (14,12, 17,65)$ . Η συγκεκριμένη λύση δίνει στην αντικειμενική συνάρτηση  $z$  την τιμή 423,6 ( $\approx 423$ ).



Σχήμα 3.4: Εύρεση βέλτιστης λύσης

## Παρατηρήσεις:

1. Η προηγούμενη λύση προσδιορίστηκε διαγραμματικά, με αποτέλεσμα να είναι μία κατά προσέγγιση βέλτιστη λύση. Απόλυτη ακρίβεια μπορεί να επιτευχθεί λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων που τέμνονται στο σημείο Γ. Από τη γραφική παράσταση του σχήματος 3.3 προκύπτει ότι στο σημείο Γ τέμνονται οι εξισώσεις (1) και (2).

$$(1): 70x_1 + 80x_2 = 2.400$$

$$(2): 40x_1 + 70x_2 = 1.800$$

Η λύση του παραπάνω συστήματος δίνει τη βέλτιστη λύση του προβλήματος.

$$x_1 = 14,11765 \text{ και } x_2 = 17,64706$$

$$\max z = 10x_1 + 16x_2 = 10 \cdot 14,11765 + 16 \cdot 17,64706 = 423,5294$$

2. Το προηγούμενο πρόβλημα διατυπώνεται με μορφή εξισώσεων (τυπική μορφή) ως εξής:

$$\max z = 10x_1 + 16x_2$$

$$70x_1 + 80x_2 + s_1 = 2.400$$

$$40x_1 + 70x_2 + s_2 = 1.800$$

$$30x_1 + 20x_2 + s_3 = 900$$

$$30x_1 + 100x_2 + s_4 = 4.600$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Οι μεταβλητές  $s_1, s_2, s_3$  και  $s_4$  ονομάζονται *περιθώριες (slacks)* και στην περίπτωση που, με δεδομένη τη βέλτιστη λύση, είναι θετικές δείχνουν ότι το αντίστοιχο υλικό δεν χρησιμοποιείται εξ ολοκλήρου στη διαδικασία παρασκευής των προϊόντων. Αν εφαρμοστεί η βέλτιστη λύση  $(x_1, x_2) = (14,11765, 17,64706)$ , τότε προκύπτουν οι παρακάτω τιμές για τις περιθώριες μεταβλητές

| Περιορισμός | Μεταβλητή | Τιμή     |
|-------------|-----------|----------|
| 1           | $s_1$     | 0        |
| 2           | $s_2$     | 0        |
| 3           | $s_3$     | 123,5294 |
| 4           | $s_4$     | 1.000    |

και επομένως 123 περίπου μονάδες από την πρώτη ύλη 3 και ακριβώς 1.000 μονάδες από την πρώτη ύλη 4 δεν είναι απαραίτητες για την παρασκευή των ποσοτήτων της βέλτιστης λύσης· ενώ, αντίθετα, οι πρώτες ύλες των δύο πρώτων ποσοτήτων της βέλτιστης λύσης, εξ ολοκλήρου. Όμως, οι περιορισμοί 1 των περιορισμών χρησιμοποιούνται στο άριστο σημείο της εφικτής περιοχής. Οι και 2 είναι εκείνοι που τέμνονται στο άριστο σημείο της εφικτής περιοχής. Από περιορισμοί αυτοί ονομάζονται *δεσμευτικοί*, ενώ οι υπόλοιποι *χαλαροί*. Από αυτήν την παρατήρηση συνάγεται ότι: «Οι περιορισμοί που τέμνονται στο βέλτιστο σημείο της εφικτής περιοχής των λύσεων ενός προβλήματος γ.π. επαληθεύονται ως εξισώσεις και επομένως έχουν μηδενικές περιθώριες μεταβλητές».

### Κεφάλαιο 3

3. Η βέλτιστη λύση του προβλήματος βρίσκεται σε μία από τις κορυφές της εφικτής περιοχής των λύσεων, συγκεκριμένα στη Γ, και αποτελείται από τέσσερις θετικές μεταβλητές: τις  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $s_3$  και  $s_4$ , και δύο μηδενικές: τις  $s_1$  και  $s_2$ . Επομένως η βέλτιστη λύση περιλαμβάνει τόσες θετικές μεταβλητές, όσος είναι και ο αριθμός των περιορισμών του προβλήματος. Μια τέτοια λύση είναι βασική λύση. Αλλά και οι λύσεις που αντιστοιχούν στις άλλες κορυφές της εφικτής περιοχής, δηλαδή στις Α, Β, Δ και Ε, είναι επίσης βασικές διότι περιλαμβάνουν το πολύ τέσσερις θετικές μεταβλητές. Ισχύει για όλα τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού το εξής πόρισμα: «Οι κορυφές της εφικτής περιοχής των λύσεων αντιστοιχούν στις βασικές λύσεις και, κατά συνέπεια, σύμφωνα με το δεύτερο από τα βασικά θεωρήματα του γραμμικού προγραμματισμού, η βέλτιστη λύση μπορεί να προσδιοριστεί εκτιμώντας για κάθε μία από αυτές την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης και επιλέγοντας στη συνέχεια εκείνη που τη μεγιστοποιεί ή την ελαχιστοποιεί». Προς επαλήθευση του εν λόγω πορίσματος παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα οι σχετικοί υπολογισμοί, αναφορικά με το πρόβλημα του παραδείγματος 3.1.

| Κορυφή | Λύση                                            | Τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης z |
|--------|-------------------------------------------------|--------------------------------------|
| A      | $(x_1, x_2) = (0, 0)$                           | 0                                    |
| B      | $(x_1, x_2) = (0, 25,71)$                       | 411,36                               |
| Γ      | <b><math>(x_1, x_2) = (14,12, 17,65)</math></b> | <b>423,6 (βέλτιστη λύση)</b>         |
| Δ      | $(x_1, x_2) = (24, 9)$                          | 384                                  |
| E      | $(x_1, x_2) = (30, 0)$                          | 300                                  |

4. Σύμφωνα με το σχήμα 3.3, η ευθεία του τέταρτου περιορισμού του προβλήματος ( $130x_1 + 100x_2 = 4.600$ ) βρίσκεται εκτός της εφικτής περιοχής των λύσεων και, επομένως, ο περιορισμός μπορεί να θεωρηθεί *πλεονάζων*. Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι η εφικτή περιοχή του προβλήματος δεν αλλάζει, αν ο συγκεκριμένος περιορισμός διαγραφεί από το σύστημα των περιορισμών του προβλήματος.
5. Η εφικτή περιοχή του προβλήματος είναι κυρτή. Όπως ήδη αναφέρθηκε, μια περιοχή ονομάζεται κυρτή όταν, όπως και να επιλέγουν δύο σημεία της, το ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει ανήκει επίσης στην ίδια περιοχή.

#### Παράδειγμα 3.2

Μία βιοτεχνία ρούχων παράγει, μεταξύ των άλλων προϊόντων της, δύο ειδών πουκάμισα. Για την παραγωγή του πρώτου είδους απαιτούνται 1,5 ώρες μηχανής και 0,5 ώρες εργασίας, ενώ για την παραγωγή του δεύτερου είδους απαιτούνται 1,2 ώρες μηχανής και 1 ώρα εργασίας. Η βιοτεχνία πρέπει να παράγει κατά τη διάρκεια της τρέχουσας εβδομάδας τουλάχιστον 20 πουκάμισα από το πρώτο είδος. Στο ίδιο χρονικό διάστημα οι διαθέσιμες ώρες μηχανής είναι 180 και οι διαθέσιμες ώρες εργασίας 120. Το κέρδος/μονάδα προϊόντος είναι 12 € και 18€ για το πρώτο και το δεύτερο είδος πουκαμίσων αντίστοιχα. Να προγραμματιστεί η εβδομαδιαία παρα-