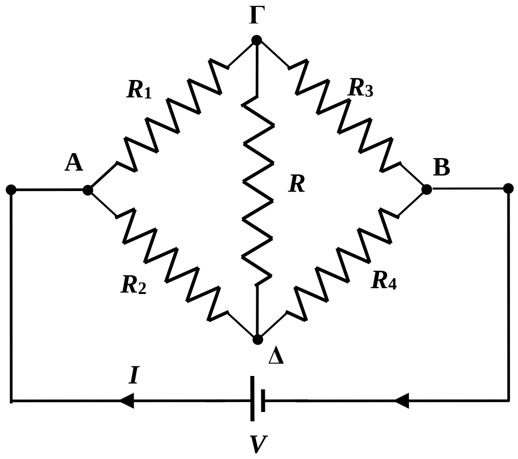
1. Γέφυρα Wheatstone



Η παραπάνω συνδεσμολογία αντιστατών ονομάζεται γέφυρα Wheatstone. Η ισοδύναμη αντίστασή της μπορεί να βρεθεί με διάφορες μεθόδους και δίνεται από τον τύπο :

$$R_W = (R_1 + R_3) \,||\, (R_2 + R_4) \cdot \frac{1 + \dfrac{R_1 \,||\, R_3 + R_2 \,||\, R_4}{R}}{1 + \dfrac{(R_1 + R_2) \,||\, (R_3 + R_4)}{R}}$$

Α) Να υπολογίσετε την ισοδύναμη αντίσταση της γέφυρας από τον παραπάνω τύπο και το συνολικό ρεύμα I που παρέχει η πηγή στο κύκλωμα για : $R_1 = 1\ \Omega,\ R_2 = 2\ \Omega,\ R_3 = 3\ \Omega,\ R_4 = 4\ \Omega,\ R = 1\ \Omega,\ V = 10$ V.

Β) Να υπολογίσετε τα ηλεκτρικά ρεύματα στους κλάδους του κυκλώματος και την πτώση τάσης $V_{\Gamma\Delta}$ (με όποια μέθοδο θέλετε).

Λύση:

Α) $(R_1 + R_3) \,||\, (R_2 + R_4) = (1+3) \,||\, (2+4) = \dfrac{4 \cdot 6}{4+6} = \dfrac{24}{10} = 2,4\ \Omega$

$$R_1 \,||\, R_3 + R_2 \,||\, R_4 = \frac{1 \cdot 3}{1+3} + \frac{2 \cdot 4}{2+4} = \frac{3}{4} + \frac{4}{3} = 0,75 + 1,33 = 2,08\ \Omega$$

$$(R_1 + R_2) \,||\, (R_3 + R_4) = \frac{(1+2) \cdot (3+4)}{(1+2) + (3+4)} = \frac{21}{10} = 2,1\ \Omega$$

$$R_W = 2,4 \cdot \frac{1 + 2,08}{1 + 2,1} \Rightarrow \boxed{R_W = 2,385\ \Omega}$$

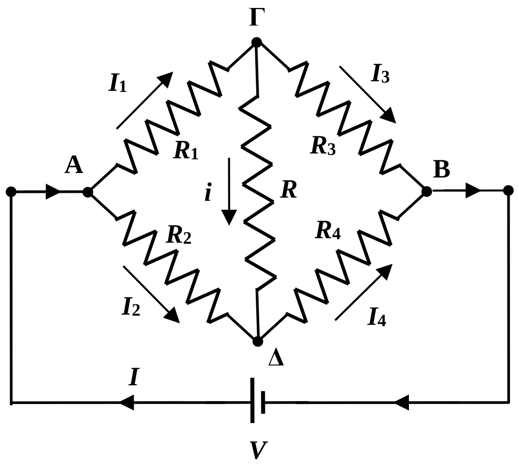
$$I = \frac{V}{R_W} = \frac{10}{2,3845} \Rightarrow \boxed{I = 4,19\ \text{A}}$$

<u>Β) 1ος τρόπος : Μέθοδος κλαδικών ρευμάτων (κανόνες Kirchhoff)</u>

Καθορίζουμε ρεύματα στους κλάδους.

Το κύκλωμα έχει 4 κομβους : Α, Β, Γ, Δ
6 κλάδους : ΑΓ (I_1), ΓΒ (I_3), ΑΔ (I_2), ΔΒ (I_4), ΓΔ (i), ΑΒ (I)
6 βρόχους : ΑΓΔΑ (ελάχιστος), ΓΒΔΓ (ελάχιστος), ΑΔΒΑ (ελάχιστος)
ΑΓΒΑ, ΑΔΓΒΑ, ΑΓΔΒΑ

Έχουμε 6 αγνώστους (τα 6 ρεύματα κλάδων) και άρα χρειαζόμαστε 6 εξισώσεις.



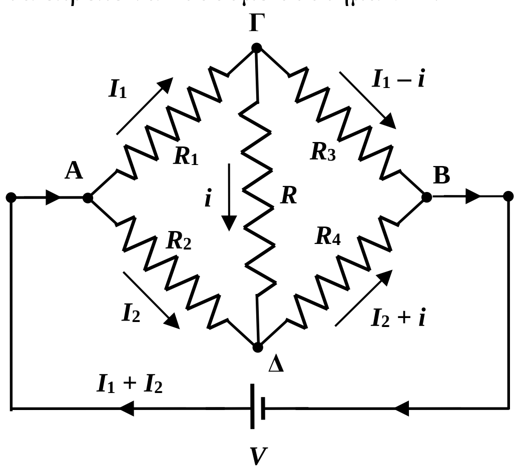
Εφαρμόζοντας τον κανόνα ρευμάτων του Kirchhoff στους κόμβους

$$\sum_i I_i = 0$$

θα πάρουμε 4 – 1 = 3 ανεξάρτητες εξισώσεις :

$$I = I_1 + I_2\,, \qquad I_3 = I_1 - i\,, \qquad I_4 = I_2 + i\,,$$

Από τον κανόνα τάσεων του Kirchhoff θα πάρουμε τις υπόλοιπες 3 εξισώσεις που χρειαζόμαστε. Όμως πριν τον εφαρμόσουμε***, ενσωματώνουμε τις παραπάνω εξισώσεις των ρευμάτων σε νέο σχήμα*** και έτσι μας απομένουν 3 άγνωστοι, τα ρεύματα I_1, I_2 και i , που διαρρέουν τους κλάδους της γέφυρας. Με τον τρόπο αυτό θα καταλήξουμε σε ένα σύστημα 3x3. Αλλιώς θα έπρεπε να λύσουμε σύστημα 6x6.



Εφαρμόζοντας τον κανόνα τάσεων του Kirchhoff στους 3 ελάχιστους βρόχους ΑΓΔΑ, ΓΒΔΓ, ΑΔΒΑ

$$\sum_{(ij)} V_{ij} = 0 \qquad (7),$$

παίρνουμε τρεις εξισώσεις για τους τρεις αγνώστους

ΑΓΔΑ:

$$V_{\text{ΑΓ}} + V_{\text{ΓΔ}} + V_{\text{ΔΑ}} = 0 \Rightarrow I_1R_1 + iR - I_2R_2 = 0 \Rightarrow \qquad 1\cdot I_1 - 2\cdot I_2 + 1\cdot i = 0 \quad (8)$$

ΓΒΔΓ :

$$V_{\text{ΓΒ}} + V_{\text{ΒΔ}} + V_{\text{ΔΓ}} = 0 \Rightarrow (I_1 - i)R_3 - (I_2 + i)R_4 - iR = 0 \Rightarrow 3\cdot I_1 - 4\cdot I_2 - 8\cdot i = 0 \quad (9)$$

ΑΔΒΑ:

$$V_{\text{ΑΔ}} + V_{\text{ΔΒ}} + V_{\text{ΒΑ}} = 0 \Rightarrow I_2R_2 + (I_2 + i)R_4 - V = 0 \Rightarrow \qquad 0\cdot I_1 + 6\cdot I_2 + 4\cdot i = 10 \qquad (10)$$

Γράφουμε τις εξισώσεις του παραπάνω συστήματος 3x3 σε μορφή πίνακα και το λύνουμε με τη μέθοδο των οριζουσών.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & -8 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad (11)$$

Η ορίζουσα του συστήματος είναι :

$$D=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & -4 & -8\\ 0 & 6 & 4\end{vmatrix}=1\cdot(-4)\cdot 4+0+1\cdot 3\cdot 6-0-(-8)\cdot 6\cdot 1-4\cdot(-2)\cdot 3=74 \qquad (12)$$

Οι ορίζουσες των αγνώστων είναι :

$$D_{I_1}=\begin{vmatrix}0 & -2 & 1\\ 0 & -4 & -8\\ 10 & 6 & 4\end{vmatrix}=(-2)(-8)10-1(-4)10=200$$

$$D_{I_2}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & 0 & -8\\ 0 & 10 & 4\end{vmatrix}=-10\left[-8-3\right]=110$$

$$D_{i}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & -4 & 0\\ 0 & 6 & 10\end{vmatrix}=-10\left[-4-(-2)3\right]=20$$

Οι τιμές των ρευμάτων δίνονται από : $I_1=\dfrac{D_{I_1}}{D}=\dfrac{200}{74}=2,70\ \text{A}$

$$I_2=\frac{D_{I_2}}{D}=\frac{110}{74}=1,49\ \text{A}$$

$$i=\frac{D_i}{D}=\frac{20}{74}=0,27\ \text{A}$$

και $I=I_1+I_2=4,19\ \text{A}$

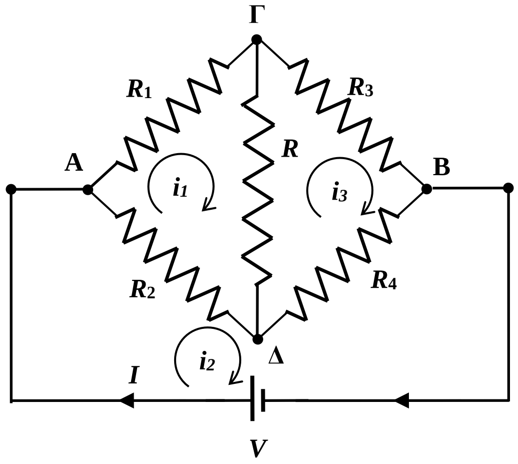
$$I_3=I_1-i=2,70-0,27=2,43\ \text{A}$$

$$I_4=I_2+i=1,49+0,27=1,76\ \text{A}$$

Από απλή εφαρμογή του νόμου του Ohm βρίσκουμε την πτώση τάσης $V_{\Gamma\Delta}$: $V_{\Gamma\Delta}=iR=0,27\cdot 1=0,27\ \text{V}$

Β) 2ος τρόπος : Μέθοδος ρευμάτων βρόχων (ελαχίστων)

Καθορίζουμε ρεύματα i_1 , i_2 και i_3 στους ελάχιστους βρόχους. Τα φυσικά ρεύματα των κλάδων προκύπτουν από τη διαφορά ή το άθροισμα των ρευμάτων βρόχων ανάλογα με τη φορά που έχουν στο σχήμα (δείτε αντίστοιχο σχήμα στους κανόνες Kirchhoff παραπάνω): $I=i_2$, $I_1=i_1$, $I_2=i_2-i_1$, $I_3=i_3$, $I_4=i_2-i_3$, $i=i_1-i_3$.



Γράφουμε κατευθείαν με απλή εποπτεία του κυκλώματος το σύστημα 3x3 των αγνώστων ρευμάτων βρόχων:

$$\begin{pmatrix} R_1+R_2+R & -R_2 & -R \\ -R_2 & R_2+R_4 & -R_4 \\ -R & -R_4 & R_3+R_4+R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ V \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -4 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Θυμίζουμε :
στοιχεία κύριας διαγωνίου = η ολική αντίσταση κάθε βρόχου
μη διαγώνια στοιχεία = η ολική αντίσταση του κοινού κλάδου των αντίστοιχων βρόχων με –
(επειδή τα δύο ρεύματα πάνε αντίθετα)
διάνυσμα σταθερών = η ολική ΗΕΔ του αντίστοιχου βρόχου (με τη φορά που τον διαγράφουμε)

Η ορίζουσα του συστήματος είναι : $D=\begin{vmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -4 \\ -1 & -4 & 8 \end{vmatrix}=74$

Η ορίζουσα του i_1 είναι : $D_1=\begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 10 & 6 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{vmatrix}=200$

Η ορίζουσα του i_2 είναι : $D_2=\begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 10 & -4 \\ -1 & 0 & 8 \end{vmatrix}=310$

Η ορίζουσα του i_3 είναι : $D_3=\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 10 \\ -1 & -4 & 0 \end{vmatrix}=180$

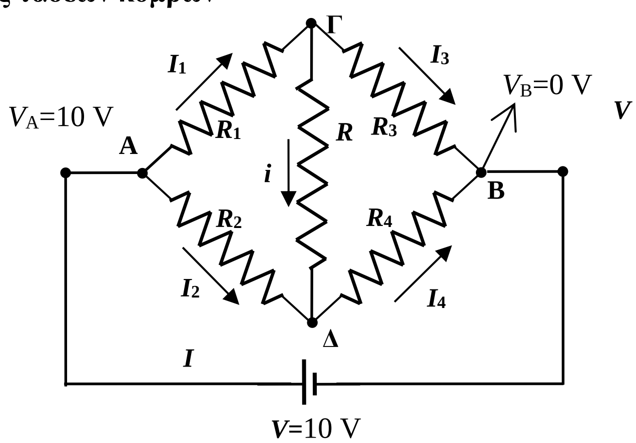
Τα ρεύματα βρόχων είναι : $i_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{200}{74}=2,70\ \text{A}$

$i_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{310}{74}=4,19\ \text{A}$,

$i_3=\dfrac{180}{74}=2,43\ \text{A}$

Άρα τα ρεύματα των κλάδων είναι
$I=i_2=4,19\ \text{A}$, $I_1=i_1=2,70\ \text{A}$, $I_2=i_2-i_1=4,19-2,70=1,49\ \text{A}$,
$I_3=i_3=2,43\ \text{A}$, $I_4=i_2-i_3=4,19-2,43=1,76\ \text{A}$, $i=i_1-i_3=2,70-2,43=0,27\ \text{A}$

Β) 3ος τρόπος : Μέθοδος τάσεων κόμβων



Επιλέγουμε ως κόμβο αναφοράς τον Β ($V_\text{B}=0$). Τότε το δυναμικό στον κόμβο Α θα είναι $V_\text{A}=10\ \text{V}$, ενώ τα δυναμικά των δύο άλλων κόμβων V_Γ, V_Δ θα είναι οι άγνωστοι του προβλήματος . Με δεδομένα τα δυναμικά των κόμβων, τα ρεύματα των κλάδων από τον νόμο του Ohm, θα είναι :

$$I_1 = \frac{V_{A\Gamma}}{R_1} = \frac{V_A - V_\Gamma}{R_1},\ I_2 = \frac{V_{A\Delta}}{R_2} = \frac{V_A - V_\Delta}{R_2},\ I_3 = \frac{V_{\Gamma B}}{R_3} = \frac{V_\Gamma - V_B}{R_3},\ I_4 = \frac{V_{\Delta B}}{R_4} = \frac{V_\Delta - V_B}{R_4},\ i = \frac{V_\Gamma - V_\Delta}{R}$$

Η εφαρμογή του κανόνα ρευμάτων του Kirchhoff στους κόμβους Γ και Δ θα μας δώσει δύο εξισώσεις από όπου θα βρούμε τους δύο αγνώστους:

Κόμβος Γ :

$$I_1 = i + I_3 \Rightarrow \frac{V_A - V_\Gamma}{R_1} = \frac{V_\Gamma - V_\Delta}{R} + \frac{V_\Gamma - V_B}{R_3} \Rightarrow \frac{10 - V_\Gamma}{1} = \frac{V_\Gamma - V_\Delta}{1} + \frac{V_\Gamma - 0}{3} \Rightarrow 30 - 3V_\Gamma = 3V_\Gamma - 3V_\Delta + V_\Gamma \Rightarrow$$

$$\boxed{7V_\Gamma - 3V_\Delta = 30} \qquad (1)$$

Κόμβος Δ :

$$I_2 + i = I_4 \Rightarrow \frac{V_A - V_\Delta}{R_2} + \frac{V_\Gamma - V_\Delta}{R} = \frac{V_\Delta - V_B}{R_4} \Rightarrow \frac{10 - V_\Delta}{2} + \frac{V_\Gamma - V_\Delta}{1} = \frac{V_\Delta - 0}{4} \Rightarrow 20 - 2V_\Delta + 4V_\Gamma - 4V_\Delta = V_\Delta \Rightarrow$$

$$\boxed{-4V_\Gamma + 7V_\Delta = 20} \qquad (2)$$

Το σύστημα είναι 2x2 και λύνεται εύκολα. Λύνουμε την (1) ως προς V_Δ και αντικαθιστούμε στην (2)

$$(1):\ V_\Delta = \frac{7}{3}V_\Gamma - 10$$

$$(1)\rightarrow(2):\ -4V_\Gamma + 7\left(\frac{7}{3}V_\Gamma - 10\right) = 20 \Rightarrow -12V_\Gamma + 49V_\Gamma - 210 = 60 \Rightarrow V_\Gamma = \frac{270}{37} = 7,297297 \text{ V}$$

$$V_\Delta = \frac{7}{3}\frac{270}{37} - 10 = 7,027027 \text{ V}$$

Οπότε τα ρεύματα των κλάδων είναι

$$I_1 = \frac{V_A - V_\Gamma}{R_1} = \frac{10 - 7,297297}{1} = 2,70270 = 2,70 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{10 - 7,027027}{2} = 1,486486 = 1,49 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{V_\Gamma - V_B}{R_3} = \frac{7,297297 - 0}{3} = 2,432432 = 2,43 \text{ A}$$

$$I_4 = \frac{V_\Delta - V_B}{R_4} = \frac{7,027027 - 0}{4} = 1,756756 = 1,76 \text{ A}$$

$$i = \frac{V_\Gamma - V_\Delta}{R} = \frac{7,297297 - 7,027027}{1} = 0,270270 = 0,270 \text{ A}$$

Ελέγχουμε ότι πράγματι ισχύουν : $I_1 = i + I_3 = 2,43 + 0,27 = 2,70$

$$I_4 = I_2 + i = 1,49 + 0,27 = 1,76$$

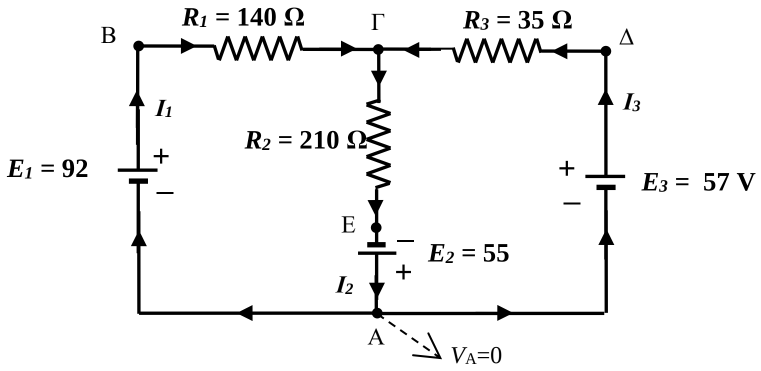
Το συνολικό ρεύμα του κυκλώματος είναι :

$$I = I_1 + I_2 = 2,70 + 1,49 = 4,19 \text{ A}$$

Η πτώση τάσης $V_{\Gamma\Delta}$ είναι :

$$V_{\Gamma\Delta} = V_\Gamma - V_\Delta = 7,297 - 7,027 = 0,27 \text{ V}$$

2. Να λύσετε το παρακάτω κύκλωμα, δηλαδή να βρείτε τα ρεύματα και όλες τις πτώσεις τάσεων.



Λύση

Το έχουμε λύσει με διάφορους τρόπους στην πρώτη συλλογή ασκήσεων. Τώρα θα το λύσουμε με τη μέθοδο των **κομβικών τάσεων**. Υποθέτουμε τη φορά των ρευμάτων σύμφωνα με τις πολικότητες των πηγών. Εδώ όλες δίνουν ρεύμα προς την ίδια φορά.

Επιλέγουμε ως κόμβο αναφοράς τον Α ($V_{\rm A}=0$). Τότε τα δυναμικά των κόμβων Β, Γ και Δ είναι :

$V_{\rm B}=92\ {\rm V},\ V_{\Delta}=57\ {\rm V},\ V_{\rm E}=-55\ {\rm V}$

[Αν είχαμε επιλέξει ως κόμβο αναφοράς τον Ε τότε τα δυναμικά θα ήταν :

$V_{\rm E}=0\ {\rm V},\ \ V_{\rm A}=55\ {\rm V},\ V_{\rm B}=55+192=147\ {\rm V},\ \ V_{\Delta}=55+57=112\ {\rm V}$]

Μόνο ένα δυναμικό, το V_Γ είναι απροσδιόριστο και άρα χρειαζόμαστε μια εξίσωση για να το βρούμε. Αυτή είναι ο κανόνας ρευμάτων του Kirchhoff σε έναν από τους κόμβους Α ή Γ: $I_2=I_1+I_3$ (1)

Τα ρεύματα εκφράζονται από το νόμο του Ohm

$$I_1=\frac{V_{{\rm B}\Gamma}}{R_1}=\frac{V_{\rm B}-V_\Gamma}{R_1}=\frac{92-V_\Gamma}{140}$$

$$I_2=\frac{V_{\Gamma{\rm E}}}{R_2}=\frac{V_\Gamma-V_{\rm E}}{R_2}=\frac{V_\Gamma-(-55)}{210}=\frac{V_\Gamma+55}{210}$$

$$I_3=\frac{V_{\Delta\Gamma}}{R_3}=\frac{V_\Delta-V_\Gamma}{R_3}=\frac{57-V_\Gamma}{35}$$

Οπότε η εξίσωση (1) γίνεται : $\dfrac{V_\Gamma+55}{210}=\dfrac{92-V_\Gamma}{140}+\dfrac{57-V_\Gamma}{35}$

από τη λύση της οποίας παίρνουμε το άγνωστο δυναμικό V_Γ

Όλα επί 210

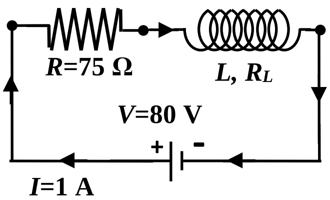
$$V_\Gamma+55=\frac{210}{140}\left(92-V_\Gamma\right)+\frac{210}{35}\left(57-V_\Gamma\right)\Rightarrow V_\Gamma+55=1,5\left(92-V_\Gamma\right)+6\left(57-V_\Gamma\right)\Rightarrow$$

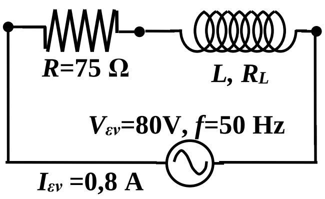
$$V_\Gamma+1,5V_\Gamma+6V_\Gamma=1,5\cdot 92+6\cdot 57-55\Rightarrow 8,5V_\Gamma=425\Rightarrow V_\Gamma=\frac{425}{8,5}\Rightarrow$$

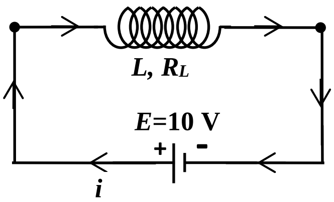
$$\boxed{V_\Gamma=50\ {\rm V}}$$

Άρα τα ρεύματα είναι : $\boxed{I_1=\dfrac{92-50}{140}=0,3\ {\rm A}}$ $\boxed{I_2=\dfrac{50+55}{210}=0,5\ {\rm A}}$ $\boxed{I_3=\dfrac{57+50}{35}=0,2\ {\rm A}}$

3. Προσδιορισμός στοιχείων πηνίου







Πηνίο με αυτεπαγωγή L και ωμική αντίσταση R_L συνδέεται σε σειρά με ωμική αντίσταση R =75 Ω και πηγή συνεχούς τάσης V = 80 V. Όταν αποκατασταθεί μόνιμο ρεύμα στο κύκλωμα η τιμή του είναι I =1 A.

Α) Πόση είναι η ωμική αντίσταση του πηνίου R_L ?

$$R_{ολ} = \frac{V}{I} = \frac{80}{1} = 80\ \Omega$$

$$R_{ολ} = R + R_L \Rightarrow R_L = R_{ολ} - R = 80 - 75 \Rightarrow \boxed{R_L = 5\ \Omega}$$

Στη συνέχεια συνδέουμε την ίδια διάταξη σε πηγή εναλλασσόμενης τάσης συχνότητας f = 50 Hz και ενεργού τιμής $V_{εν}$ = 80 V. Το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα τώρα έχει ενεργό τιμή $I_{εν}$ = 0,8 A.

Β) Πόση είναι η αυτεπαγωγή του πηνίου L ?

$$\omega = 2\pi f = 2\cdot 3{,}14\cdot 50 = 314\ \text{rad/s}$$

$$X_L = L\omega$$

$$Z = \frac{V_{εν}}{I_{εν}} = \frac{80}{0{,}8} = 100\ \Omega$$

$$Z = \sqrt{R_{ολ}^2 + X_L^2} \Rightarrow X_L^2 = Z^2 - R_{ολ}^2 = 100^2 - 80^2 = 3.600 \Rightarrow X_L = \sqrt{3600} = 60\ \Omega$$

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{60}{314} = 0{,}19108280 = 0{,}191 \Rightarrow \boxed{L = 191\,\text{mH}}$$

Στη συνέχεια, τη χρονική στιγμή t=0, συνδέουμε μόνο του το πηνίο σε πηγή συνεχούς ηλεκτρικής τάσης με ΗΕΔ E = 10 V.

Γ) Ποια είναι η σταθερά χρόνου του κυκλώματος ?

$$\tau = \frac{L}{R_L} = \frac{191\cdot 10^{-3}}{5} \Rightarrow \tau = 38{,}2\ \text{ms}$$

Δ) Ποια είναι η τιμή του ρεύματος τη χρονική στιγμή t = 2τ. Δίνεται e^{-2}= 0,135 **]**

Το τελικό μόνιμο ρεύμα θα είναι

$$I = \frac{V}{R_L} = \frac{10}{5} = 2\ \text{A}$$

Κάθε χρονική στιγμή t το ρεύμα i του κυκλώματος δίνεται από τον τύπο

$$i(t) = I(1 - e^{-t/\tau}) = 2\cdot(1 - e^{-2}) = 2\cdot(1 - 0{,}135) = 2\cdot 0{,}865 = 1{,}73\ \text{A}$$

Ε) Την ίδια χρονική στιγμή t = 2τ , πόση ισχύ παρέχει η πηγή, πόση ισχύς καταναλώνεται στην ωμική αντίσταση του πηνίου και πόση αποθηκεύεται στο μαγνητικό του πεδίο?

$$P_{πηγ}(t) = E\cdot i(t) = 10\cdot 1{,}73 = 17{,}3\ \text{W}$$

$$P_R(t) = i^2(t)\cdot R = 1{,}73^2\cdot 5 = 14{,}96\ \text{W}$$

$$P_L(t) = \upsilon_L(t)\cdot i(t)$$

Από διατήρηση ενέργειας

$$P_{πηγης} = P_R + P_L \Rightarrow P_L = P_{πηγης} - P_R = 17{,}3 - 14{,}96 = 2{,}34\ \text{W}$$

Με απευθείας υπολογισμό. Η επαγωγική τάση στο πηνίο είναι κάθε χρονική στιγμή ίση με

$$\upsilon_L(t) = L\frac{di}{dt}$$

$$\frac{di}{dt} = I\frac{d}{dt}(1 - e^{-t/\tau}) = I\left(-\frac{e^{-t/\tau}}{-\tau}\right) = \frac{I}{\tau}e^{-t/\tau}$$

Άρα

$$P_L = \upsilon_L i = L\frac{I}{\tau}e^{-t/\tau}\cdot i = 191\cdot 10^{-3}\frac{2}{38,2\cdot 10^{-3}}0,135\cdot 1,73 = 2,34 \text{ W}$$