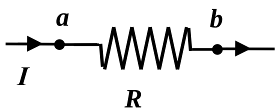
ΥΛΗ

Η ύλη Ηλεκτροτεχνίας για την εξέταση είναι μόνο τα παρακάτω βασικά.
Έχω περίληψη θεωρίας και λυμένα παραδείγματα τα οποία είναι παρόμοια με τα θέματα των εξετάσεων.
Αν το να περάσετε το μάθημα είναι σημαντικό για σας για διάφορους λόγους για τους οποίους μου γράφετε μετά την εξέταση (έναρξη πρακτικής, πρόσληψη, απόκτηση πτυχίου κλπ.) τότε φροντίστε να προετοιμαστείτε και να διαβάσετε τα λυμένα παραδείγματα για να περάσετε.

1. Νόμος Ohm
2. Εξάρτηση αντίστασης από υλικό, μήκος, διατομή, θερμοκρασία
3. Συνδυασμοί αντιστάσεων
4. Διαιρέτης τάσης
5. Διαιρέτης ρεύματος
6. Ισχύς
7. Κανόνες Kirchhoff (χωρίς σύστημα)
8. Μέθοδος κομβικών τάσεων (χωρίς σύστημα)
9. Φόρτιση – εκφόρτιση πυκνωτή (RC)
10. Ανάπτυξη – μηδενισμός ρεύματος με πηνίο (RL)
11. Εφαρμογή τύπων εναλλασσόμενου σε κύκλωμα σειράς RLC

Καλό διάβασμα

ΝΟΜΟΣ OHM – ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ ΑΝΤΙΣΤΑΣΕΩΝ



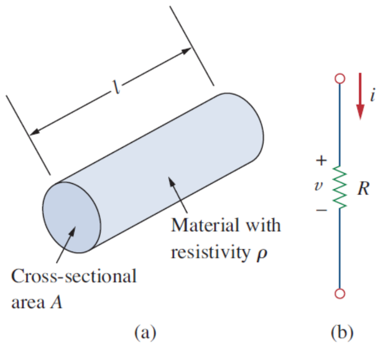
Το ηλεκτρικό ρεύμα ρέει από σημεία υψηλότερου δυναμικού σε σημεία χαμηλότερου δυναμικού, όπως το νερό ρέει προς στην κατηφόρα.
Το σημείο *a* έχει ψηλότερο δυναμικό από το σημείο *b* : $V_a > V_b$
Πτώση τάσης είναι η διαφορά : $V_{ab} = V_a - V_b$ (αρχικό δυναμικό μείον τελικό)
Διαφορά δυναμικού είναι η διαφορά : $\Delta V = V_b - V_a$ (τελικό δυναμικό μείον αρχικό)
Νόμος Ohm για μεταλλικούς αγωγούς : Το ρεύμα είναι ανάλογο της πτώσης τάσης **στα άκρα του αγωγού** και αντιστρόφως ανάλογο της αντίστασης του αγωγού :

$$\boxed{I = \frac{V_{ab}}{R}}$$

Στο νόμο του Ohm βάζουμε την τάση στα άκρα του αντιστάτη και όχι όποιο *V* βρούμε μπροστά μας!

Η ωμική αντίσταση ενός αγωγού εξαρτάται από το υλικό και τα γεωμετρικά του χαρακτηριστικά

$$R = \rho \frac{\ell}{S}$$



Η ειδική αντίσταση ρ κάθε υλικού (και άρα και η ωμική αντίσταση) εξαρτάται από τη θερμοκρασία.

$$\rho = \rho_0(1+\alpha\Delta\theta) \Rightarrow R = R_0(1+\alpha\Delta\theta)$$

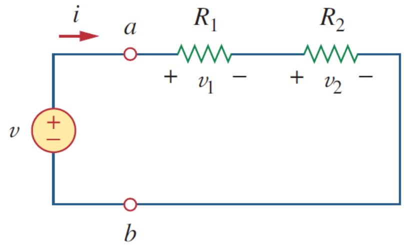
Όπου α ονομάζεται θερμοκρασιακός συντελεστής και ρ_0, R_0 είναι οι τιμές σε μια θερμοκρασία αναφοράς ή στην αρχική μας θερμοκρασία. Οι τιμές του ρ στους πίνακες δίνονται συνήθως για θερμοκρασία 20º C

Το αντίστροφο της αντίστασης ονομάζεται αγωγιμότητα : $G = \dfrac{1}{R}$

Για να βρούμε την ισοδύναμη αντίσταση συνδυασμού αντιστάσεων σε σειρά τις προσθέτουμε

$$R_{\sigma\varepsilon\iota\rho} = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots$$

Σε σειρά σημαίνει : διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα.



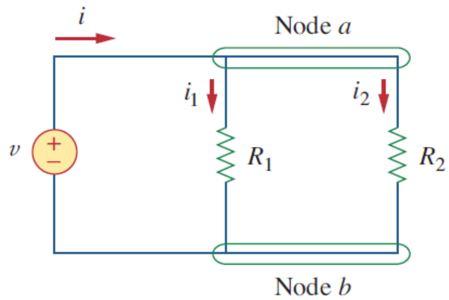
Για να βρούμε την ισοδύναμη αντίσταση συνδυασμού αντιστάσεων παράλληλα αντιστρέφουμε την ισοδύναμη αγωγιμότητα η οποία βρίσκεται προσθέτοντας τις αγωγιμότητες

$$G_{\pi\alpha\rho} = G_1 + G_2 + G_3 + \ldots \Rightarrow$$

$$\frac{1}{R_{\pi\alpha\rho}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots$$

Παράλληλα σημαίνει έχουν κοινά άκρα και άρα ίδια πτώση τάσης στα άκρα τους.
Για δύο αντιστάσεις παράλληλα, η ισοδύναμη συμβολίζεται $R_1 \,||\, R_2$, ενώ ο τύπος γίνεται

$$R_{\pi\alpha\rho} \equiv R_1 \,||\, R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$



Παράδειγμα 01

Η ωμική αντίσταση ενός χάλκινου πηνίου κάποιας μηχανής πριν την δουλέψουμε είναι 180 Ω. Αφού η μηχανή δουλέψει, ξαναμετράμε και βρίσκουμε 210 Ω. Πόσους βαθμούς έχει ανέβει η θερμοκρασία του πηνίου ;

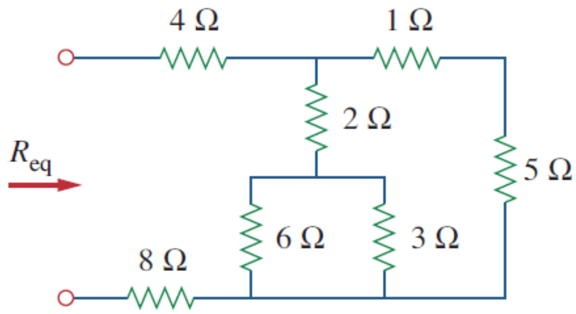
[θερμοκρασιακός συντελεστής χαλκού : $\alpha = 0,00386 / {}^{o}\mathrm{C}$

Απάντηση

$$R = R_0(1+\alpha\Delta\theta) \Rightarrow \Delta\theta = \frac{R - R_0}{\alpha R_0} = \frac{210-180}{0,00386 \cdot 180} = 43^{o}\mathrm{C}$$

Παράδειγμα 02

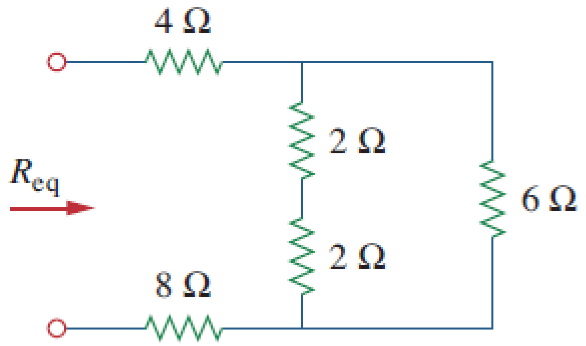
Βρείτε την ισοδύναμη αντίσταση του συνδυασμού αντιστάσεων του σχήματος



Απάντηση

Οι 1 Ω και 5 Ω είναι σε σειρά. Οι 3 Ω και 6 Ω είναι παράλληλες. Τις συνδυάζουμε και ξανασχεδιάζουμε αντικαθιστώντας τις ισοδύναμες.

$1+5=6\ \Omega,$ $\qquad 3\,||\,6 = \dfrac{3\cdot 6}{3+6} = 2\ \Omega$

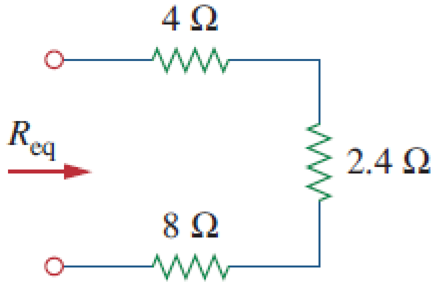


(a)

Τώρα οι 2 Ω και 2 Ω είναι σε σειρά $2+2=4\ \Omega$ και ο συνδυασμός τους είναι παράλληλος με την 6 Ω :

$$(2+2)\,||\,6 = 4\,||\,6 = \frac{4\cdot 6}{4+6} = 2,4\ \Omega$$

Ξανασχεδιάζουμε αντικαθιστώντας τις ισοδύναμες.



(b)

Τώρα όλες είναι σε σειρά : $\qquad R_{eq} = 4 + 2,4 + 8 = 14,4\ \Omega$

ΙΣΧΥΣ

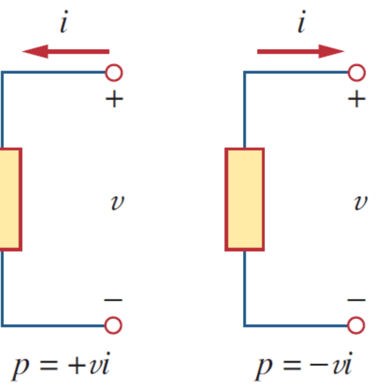
Η ισχύς που καταναλώνει ένα στοιχείο κυκλώματος που διαρρέεται από ρεύμα I και βρίσκεται υπό τάση V δίνεται από τον τύπο

$$\boxed{P = V \cdot I}$$

Όταν γράφουμε τη σχέση με μικρά γράμματα εννοούμε στιγμιαίες τιμές ισχύος, τάσης και ρεύματος καθώς αυτές μεταβάλλονται χρονικά στο εναλλασσόμενο ρεύμα

$$p = \upsilon \cdot i$$

Η πτώση τάσης υπολογίζεται κατά τη φορά του ρεύματος.
Όταν το ρεύμα εισέρχεται από τον θετικό ακροδέκτη (ψηλότερο δυναμικό) του στοιχείου και εξέρχεται από τον αρνητικό ακροδέκτη (χαμηλότερο δυναμικό) το στοιχείο καταναλώνει ενέργεια (αυτό συμβαίνει πάντα στις αντιστάσεις). Όταν συμβαίνει το αντίθετο, δηλαδή το ρεύμα να εισέρχεται από τον αρνητικό και να εξέρχεται από τον θετικό ακροδέκτη τότε το στοιχείο προσφέρει ισχύ (παράγει ενέργεια). Το δεύτερο συμβαίνει στις πηγές, εκτός αν η φορά του ρεύματος είναι αντίθετη οπότε η πηγή (μπαταρία) φορτίζει καταναλώνοντας ενέργεια.



(a) (b)

Το (a) είναι ή αντίσταση ή μπαταρία που φορτίζει. Καταναλώνει ισχύ $+\upsilon i$.
Το (b) είναι πηγή. Καταναλώνει ισχύ $-\upsilon i$, δηλαδή προσφέρει στο κύκλωμα ισχύ $+\upsilon i$

Η ισχύς που καταναλώνεται σε μια ωμική αντίσταση προκύπτει από το νόμο του Ohm

$$P = VI = \frac{V^2}{R} = I^2 R$$

Η ισχύς που παράγει μια πηγή με ΗΕΔ E , όταν διαρρέεται από ρεύμα I είναι

$$P = EI$$

Επειδή οι πηγές παρουσιάζουν και εσωτερική αντίσταση r, όταν διαρρέονται από ρεύμα έχουν τάση εξόδου μικρότερη από την ΗΕΔ: $V_T = E - Ir < E$ και η ισχύς που προσφέρουν στο υπόλοιπο κύκλωμα είναι

$$P = V_T I = EI - I^2 r$$

Διατήρηση ενέργειας : Το άθροισμα όλων των ισχύων σε ένα κύκλωμα είναι ίσο με μηδέν

$$\sum_i P_i = 0$$

Όση ενέργεια παράγεται από κάποια στοιχεία καταναλώνεται στα υπόλοιπα.

Επειδή η ισχύς είναι ενέργεια ανά μονάδα χρόνου $P = W/t$ για να βρούμε την ενέργεια που καταναλώθηκε (και άρα το κόστος της, επειδή η ενέργεια πωλείται και όχι η ισχύς) πολλαπλασιάζουμε την ισχύ επί το χρόνο λειτουργίας :

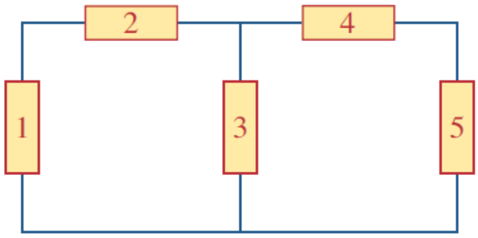
$$W = P \cdot t$$

Έτσι ορίζεται και η μονάδα ενέργειας κιλοβατώρα kWh :

$$\mathrm{kWh} = 1\mathrm{kW}\cdot 1\mathrm{h} = 1000\mathrm{W}\cdot 1\mathrm{h} = 1000\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}\cdot 1\mathrm{h}\cdot 60\frac{\mathrm{min}}{\mathrm{h}}\cdot 60\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{min}} = 3.600.000\ \mathrm{J} = 3,6\ \mathrm{MJ}$$

Παράδειγμα 03

Το παρακάτω σχήμα δείχνει ένα κύκλωμα με 5 στοιχεία. Αν οι ισχύες των στοιχείων 1, 2, 4 και 5 είναι αντίστοιχα $P_1 = -205\ \mathrm{W}$, $P_2 = 60\ \mathrm{W}$, $P_4 = 45\ \mathrm{W}$, $P_5 = 30\ \mathrm{W}$ τότε το στοιχείο 3 καταναλώνει ή προσφέρει ισχύ και πόση;



Απάντηση

$$\sum_i P_i = 0 \Rightarrow P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 0 \Rightarrow -205 + 60 + P_3 + 45 + 30 = 0 \Rightarrow P_3 = +70\ \mathrm{W}$$

Καταναλώνει 70 W

Παράδειγμα 04

Οικιακός καταναλωτής καταναλώνει 700 kWh τον Ιανουάριο. Το πάγιο είναι 20€. Η τιμολόγηση της ενέργειας είναι : πρώτες 100 kWh τιμή 0,06 €/kWh, επόμενες 200 kWh τιμή 0,08 €/kWh, πέραν των 300 kWh τιμή 0,10 €/kWh. Τι ποσό X θα πληρώσει για το λογαριασμό του ;

Απάντηση

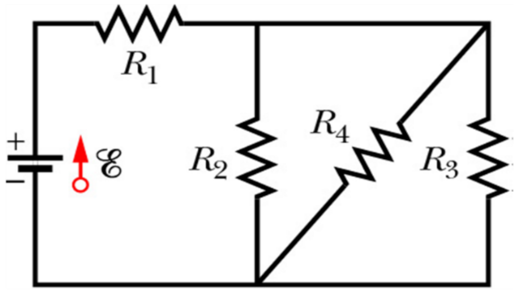
$$X = 20 + 100\cdot 0,06 + 200\cdot 0,08 + 400\cdot 0,1 = 20 + 6 + 16 + 40 = 82\ €$$

ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΠΟΥ ΛΥΝΟΝΤΑΙ ΜΕ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΥΣ ΑΝΤΙΣΤΑΣΕΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ ΚΑΙ ΣΕΙΡΙΑΚΑ

Παράδειγμα 1

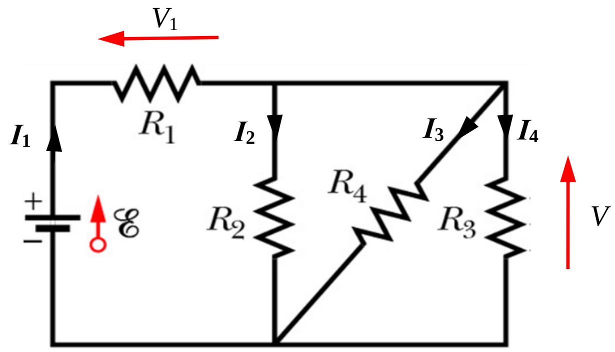
Να υπολογιστούν τα ρεύματα και οι διαφορές δυναμικού (ή οι πτώσεις τάσης) στο παρακάτω κύκλωμα που έχει πηγή με ηλεκτρεγερτική δύναμη (ΗΕΔ) E=6,0 V και αντιστάτες R_1=100 Ω, R_2=R_3=50 Ω, R_4=75 Ω. Πόση ισχύς καταναλώνεται στην αντίσταση R_4;

Σημαντική παρατήρηση : Τα δεδομένα δίνονται σε δύο σημαντικά ψηφία (π.χ. 6,0) άρα τα τελικά αποτελέσματα θα πρέπει να στρογγυλοποιηθούν σε 2 σημαντικά ψηφία. Σε ενδιάμεσους υπολογισμούς κρατάμε όσα ψηφία θέλουμε.



Λύση

Σχεδιάζουμε τα ρεύματα και τις διαφορές δυναμικού στο κύκλωμα



Ισχύουν οι κανόνες Kirchhoff

$$I_1 = I_2 + I_3 + I_4$$

$$E = V_1 + V$$

Οι R_2, R_3, R_4 είναι παράλληλες (ίδια πτώση τάσης στα άκρα τους).

$$\frac{1}{R_{234}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{50} + \frac{1}{50} + \frac{1}{75} = 0,02 + 0,02 + 0,01\overline{3} = 0,05\overline{3} \Rightarrow R_{234} = \frac{1}{0,05\overline{3}} = 18,75\ \Omega$$

Ο συνδυασμός τους είναι σε σειρά με την R_1 (διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα)

$$R_{o\lambda} = R_1 + R_{234} = 100 + 18,75 = 118,75\ \Omega$$

Το συνολικό ρεύμα που παρέχει η πηγή με ΗΕΔ E είναι

$$I_1 = \frac{E}{R_{o\lambda}} = \frac{6}{118,75} = 0,0505226 \approx 51\ \text{mA}$$

Άρα η τάση στην R_1 από νόμο Ohm είναι $V_1 = I_1 R_1 = \dfrac{6}{118,75} 100 = 5,0526315789 \approx 5,05\ \text{V}$

(δεν στρογγυλοποιούμε στο 5,0 γιατί πρέπει με το V να αθροίζουν στο 6,0 V)

Στις παράλληλες *R₁, R₂, R₃* , ισχύει από νόμο του Ohm :

$$V = IR_{234} = I_2 R_2 = I_3 R_3 = I_4 R_4$$

Άρα $V = IR_{234} = \dfrac{6}{118,75} 18,75 = 0,947368 \approx 0,95\ \text{V}$ και

$$I_2 = \frac{V}{R_2} = \frac{0,947368}{50} = 0,018947 \approx 19\ \text{mA}$$

$$I_3 = \frac{V}{R_3} = \frac{0,947368}{50} = 0,018947 \approx 19\ \text{mA}$$

$$I_4 = \frac{V}{R_4} = \frac{0,947368}{75} = 0,01263158 \approx 13\ \text{mA}$$

Ελέγχουμε

Κανόνα ρευμάτων : $I_1 = I_2 + I_3 + I_4 \Rightarrow 51 = 19 + 19 + 13$ ισχύει

Κανόνα τάσεων : $E = V_1 + V \Rightarrow 6 = 5,05 + 0,95$ ισχύει

Ισχύς στην R_4 : $P_4 = I_4^2 R_4 = \left(13\times10^{-3}\right)75 = 0,012675 \approx 13\ \text{mW}$

Τα ίδια αποτελέσματα παίρνουμε και αν χρησιμοποιήσουμε κατευθείαν τους τύπους του διαιρέτη ρεύματος (όπου $G = 1/R$ η αγωγιμότητα) :

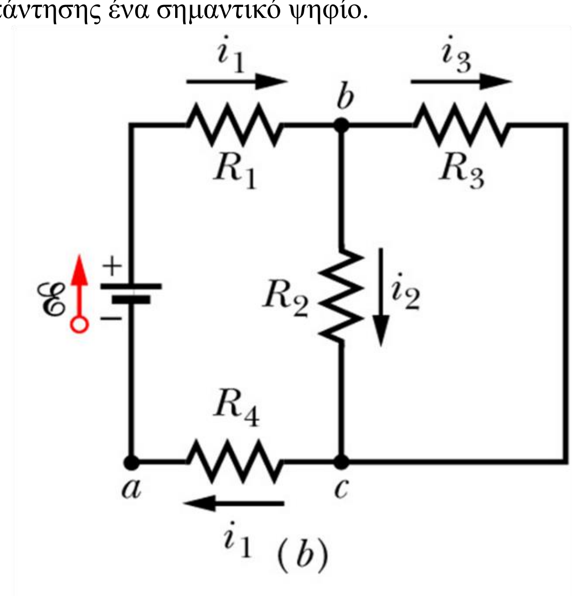
$$I_2 = I_1 \frac{G_2}{G_2+G_3+G_4} = \frac{6}{118,75}\cdot\frac{1/50}{1/50+1/50+1/75} = 0,01894737 \approx 19\ \text{mA}$$

$$I_3 = I_2 \approx 19\ \text{mA}$$

$$I_4 = I_1 \frac{G_4}{G_2+G_3+G_4} = \frac{6}{118,75}\cdot\frac{1/75}{1/50+1/50+1/75} = 0,01263158 \approx 13\ \text{mA}$$

Παράδειγμα 2

Ποιες είναι οι τιμές των ρευμάτων i_1 και i_3 στο παρακάτω κύκλωμα, αν $i_2 = 6\ \text{A}$ και R_2=2 Ω, R_3=3 Ω.
Ακρίβεια απάντησης ένα σημαντικό ψηφίο.



Οι R_2, R_3 είναι παράλληλες με πτώση τάση στα άκρα τους $V_{bc} \equiv V_b - V_c$ και για τις δύο.

Άρα $V_{bc} = V_{bc} \Rightarrow V_2 = V_3 \Rightarrow i_2R_2 = i_3R_3 \Rightarrow i_3 = i_2\dfrac{R_2}{R_3} \Rightarrow i_3 = 6\cdot\dfrac{2}{3} = 4\ \text{A}$

Το i_1 βρίσκεται από τον κανόνα ρευμάτων του Kirchhoff

$i_1 = i_2 + i_3 \Rightarrow i_1 = 6+4 = 10\ \text{A}$

ΠΙΟ ΣΥΝΘΕΤΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

Σε πιό σύνθετα κυκλώματα (όπως στο παρακάτω σχήμα) όπου υπάρχουν πολλές πηγές ή/και οι συνδυασμοί αντιστάσεων σε σειρά και παράλληλα δεν επαρκούν για να βρούμε τη συνολική αντίσταση χρησιμοποιούμε τους δύο κανόνες του Kirchhoff :

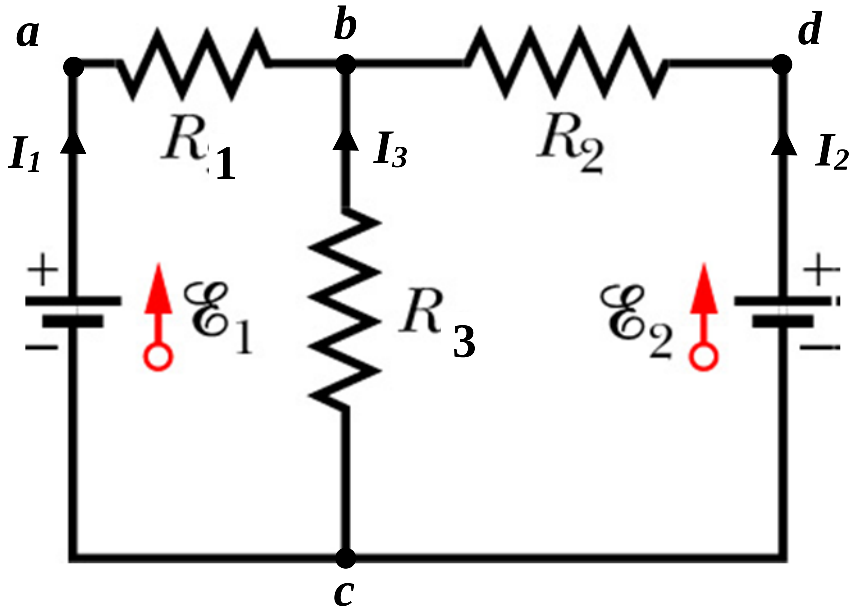
1) Κανόνας ρευμάτων ή κόμβων : $\boxed{I_1 + I_2 + I_3 = 0}$ [εισερχόμενα με + , εξερχόμενα με –]

Από διατήρηση ηλεκτρικού φορτίου: το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο που συσσωρεύεται σε ένα κόμβο είναι μηδέν ή το συνολικό ηλεκτρικό ρεύμα που εισέρχεται σε έναν κόμβο είναι μηδέν (ό,τι μπαίνει βγαίνει)

2) Κανόνας τάσεων ή βρόχων : $\boxed{V_{ab} + V_{bc} + V_{ca} = 0}$ [αρχικό τελικό σημείο ίδια]

Από διατήρηση ηλεκτροστατικής δυναμικής ενέργειας : η συνολική διαφορά δυναμικού (ή η πτώση τάσης) γύρω σε ένα βρόχο είναι μηδέν

[Η κινητική ενέργεια που αποκτούν τα ηλεκτρόνια από την επιτάχυνση του ηλεκτρικού πεδίου χάνεται σε θερμότητα πάνω στις αντιστάσεις. Τα ηλεκτρόνια κινούνται με σταθερή ταχύτητα ολίσθησης και έτσι η διατήρηση της ενέργειας ισοδυναμεί με διατήρηση της δυναμικής ενέργειας μόνο.]

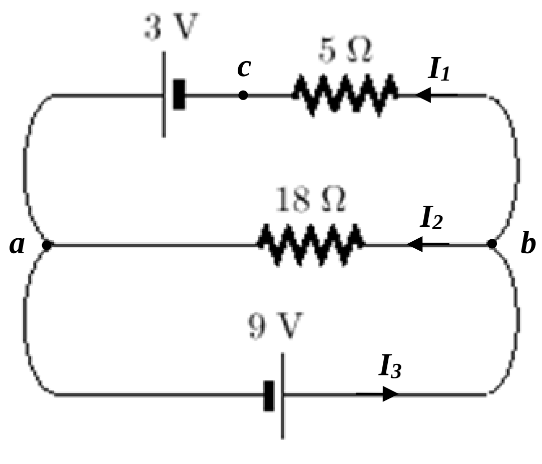


Αν ξέρουμε τις ΗΕΔ των πηγών και τις τιμές των αντιστάσεων, χρησιμοποιούμε τους παραπάνω κανόνες και παίρνουμε όσες εξισώσεις χρειαζόμαστε για να λύσουμε για τους αγνώστους που είναι τα ρεύματα των κλάδων. Παίρνουμε συστήματα εξισώσεων 2x2, 3x3, κλπ. Στο κύκλωμα του παραπάνω κυκλώματος, που έχουμε 3 ρεύματα προκύπτει σύστημα 3x3.

Θα σας ζητηθεί να εφαρμόσετε τους κανόνες του Kirchhoff για την επίλυση κυκλωμάτων, όμως τα κυκλώματα θα είναι τέτοια ώστε οι εξισώσεις να λύνονται η καθεμία από μόνη της, χωρίς να χρειαστεί να λύσετε συστημα. Μάθετε να τους εφαρμόζετε. Θα πέσουν σε όλους/όλες.

Επίσης, το παραπάνω κύκλωμα (που με κανόνες Kirchhoff θα χρειαζόταν συστημα 3x3) θα σας ζητηθεί να το λύσετε με τη μέθοδο των Τάσεων Κόμβων που οδηγεί σε μια μόνο εξίσωση με έναν άγνωστο. Διαβάστε την. Θα πέσει σε όλους/όλες.

Παράδειγμα 3 (**Κανόνες Kirchhoff, χωρίς σύστημα**)



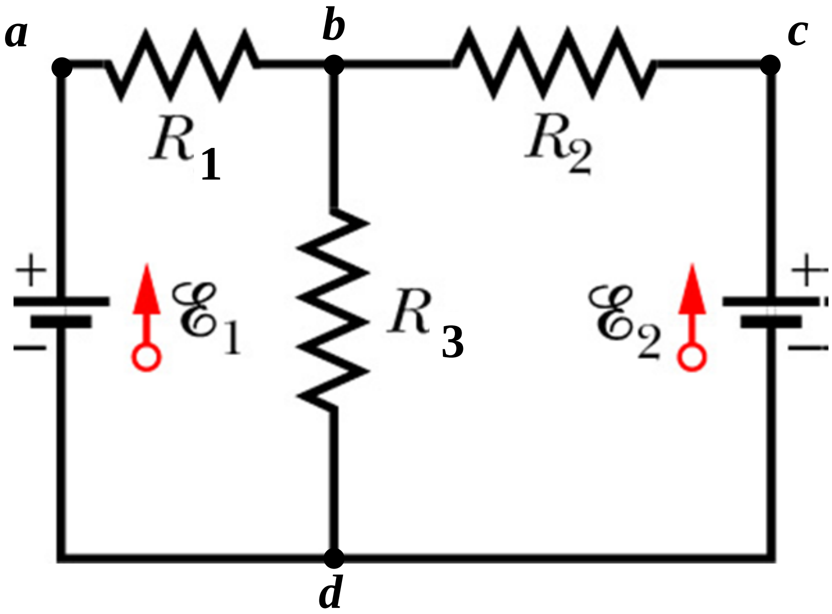
Βρείτε τα ρεύματα στο παραπάνω κύκλωμα.
Λύση

Βρόχος *a* 9V *b a* : $9\text{ V} - 18\,\Omega\cdot I_2 = 0 \Rightarrow I_2 = 0{,}5\text{ A}$

Βρόχος *a* 9V *b c a*: $9\ \text{V} - 5\ \Omega \cdot I_1 + 3\ \text{V} = 0 \Rightarrow I_1 = \dfrac{12}{5} = 2,4\ \text{A}$

Κόμβος *b* : $I_3 - I_1 - I_2 = 0 \Rightarrow I_3 = I_1 + I_2 = 2,4 + 0,5 = 2,9\ \text{A}$

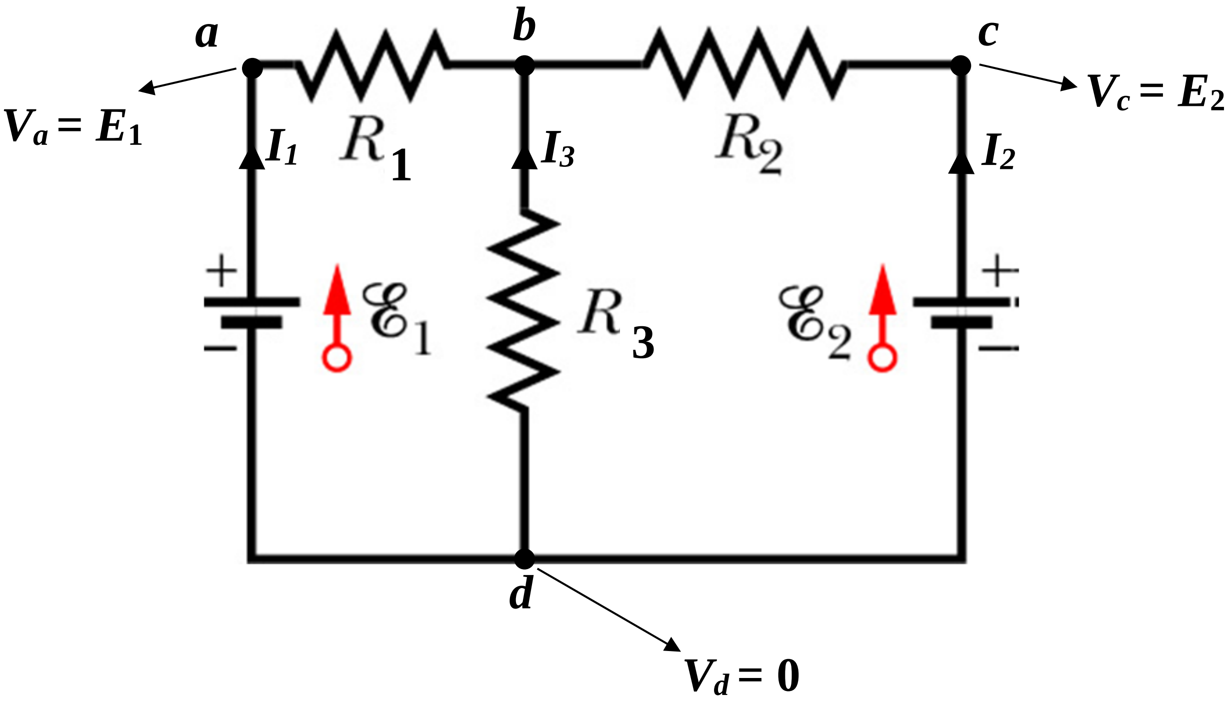
Παράδειγμα 4 (Μέθοδος κομβικών τάσεων)
Να βρείτε τα ρεύματα στο παρακάτω κύκλωμα αν $E_1 = 24\ \text{V}$, $E_2 = 12\ \text{V}$, $R_3 = 5,0\ \Omega$, $R_1 = R_2 = 30\ \Omega$ [ακρίβεια = δύο σημαντικά ψηφία]



Λύση
Θέτουμε $V_d = 0\ \text{V}$. Τότε $V_a = E_1 = 24\ \text{V}$, $V_c = E_2 = 12\ \text{V}$. Το μόνο άγνωστο δυναμικό που μένει είναι του σημείου *b*. Χρειαζόμαστε μια εξίσωση για να το βρούμε. Αυτή είναι ο κανόνας των κόμβων.

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \Rightarrow \frac{V_{ab}}{R_1} + \frac{V_{cb}}{R_2} + \frac{V_{db}}{R_3} = 0 \Rightarrow \frac{24 - V_b}{30} + \frac{12 - V_b}{30} + \frac{0 - V_b}{5} = 0$$

όλα επί 30 : $24 - V_b + 12 - V_b - 6V_b = 0 \Rightarrow 8V_b = 36 \Rightarrow V_b = 4,5\ \text{V}$



$$I_1 = \frac{V_{ab}}{R_1} = \frac{24-4,5}{30} = \frac{19,5}{30} = 0,65 \text{ A} = 650 \text{ mA}$$

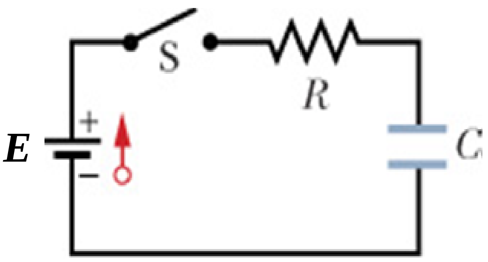
$$I_2 = \frac{V_{ab}}{R_1} = \frac{12-4,5}{30} = \frac{7,5}{30} = 0,25 \text{ A} = 250 \text{ mA}$$

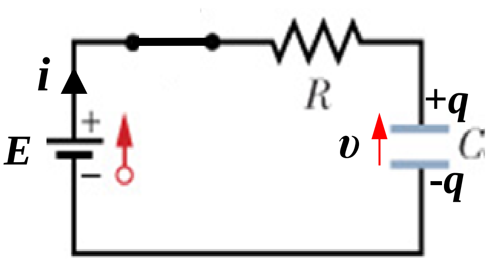
$$I_3 = \frac{V_{ab}}{R_1} = \frac{-4,5}{5} = -0,90 \text{ A} = -900 \text{ mA}$$

το I_3 διατρέχει τον κλάδο *bd* με φορά αντίθετη από αυτήν που το σχεδιάσαμε.

ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ RC ΚΑΙ RL ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΡΕΥΜΑΤΟΣ

Φόρτιση Πυκνωτή





Όταν κλείσει ο διακόπτης η πηγή θα φορτίσει τον πυκνωτή μέχρι να αποκτήσει τελικό φορτίο $Q = CE$. Το φορτίο στον πυκνωτή θα είναι μια αύξουσα συνάρτηση του χρόνου. Η συνάρτηση αυτή είναι η συνάρτηση της εκθετικής ανάπτυξης:

$$q(t) = CE\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$

και βρίσκεται με μια ολοκλήρωση από τον κανόνα τάσεων του Kirchhoff, ενώ

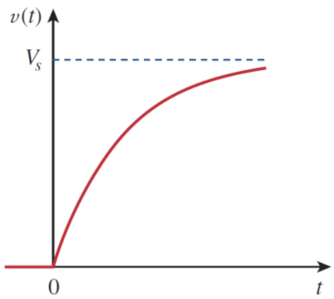
$$\tau = RC$$

είναι η σταθερά χρόνου του κυκλώματος Η τάση υ στα άκρα του πυκνωτή δίνεται κάθε στιγμή (από τον ορισμό της χωρητικότητας C) :

$$\upsilon(t) = \frac{q(t)}{C} = E\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$

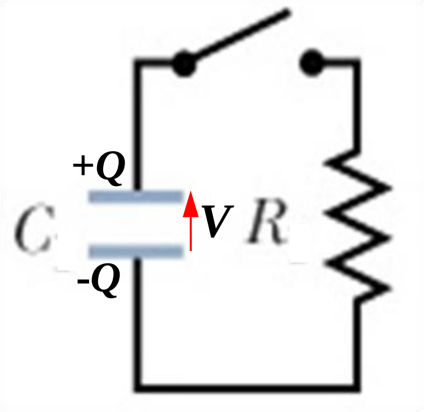
και το ρεύμα *i* που διαρρέει την αντίσταση από μία παραγώγιση :

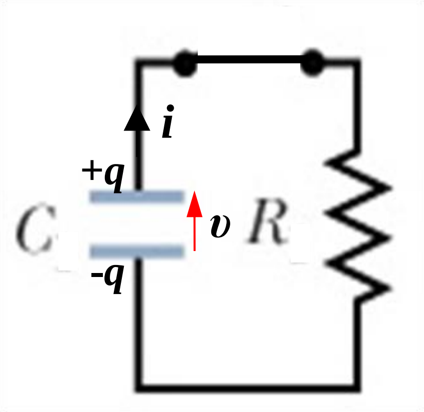
$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{E}{R}e^{-t/\tau}$$



(a)

Εκφόρτιση Πυκνωτή





Όταν κλείσει ο διακόπτης ο πυκνωτής θα εκφορτιστεί. Η εξάρτηση του φορτίου του πυκνωτή από τον χρόνο θα είναι μια φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου. Η συνάρτηση αυτή είναι η συνάρτηση της εκθετικής μείωσης:

$$q(t) = Qe^{-t/\tau}$$

και βρίσκεται με μια ολοκλήρωση από τον κανόνα τάσεων του Kirchhoff, ενώ

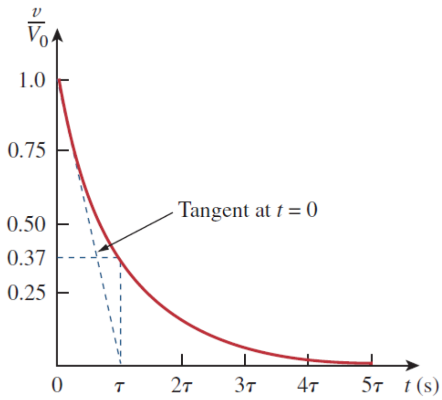
$$\tau = RC$$

είναι η σταθερά χρόνου του κυκλώματος Η τάση υ στα άκρα του πυκνωτή δίνεται κάθε στιγμή (από τον ορισμό της χωρητικότητας C) :

$$\upsilon(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{Q}{C}e^{-t/\tau} = Ve^{-t/\tau}$$

και το ρεύμα i που διαρρέει την αντίσταση (από το νόμο του Ohm) :

$$i(t) = \frac{\upsilon(t)}{R} = \frac{Q}{RC}e^{-t/\tau} = \frac{V}{R}e^{-t/\tau}$$



Παράδειγμα 5

Πυκνωτής χωρητικότητας $C = 50$ nF έχει αρχική τάση στα άκρα του $V = 60$ V και εκφορτίζεται μέσω αντίστασης $R = 20$ kΩ .

Πόσο είναι το αρχικό φορτίο του πυκνωτή ;

Πόσο είναι το αρχικό ρεύμα τη στιγμή που κλείνουμε το διακόπτη και αρχίζει η εκφόρτιση;

Πόση είναι η σταθερά χρόνου του κυκλώματος?

Πόσο είναι το φορτίο που έχει απομείνει στον πυκνωτή μετά από 2,5 ms ;

Πόση είναι η τάση στα άκρα του πυκνωτή μετά από 3,5 ms ;

Πόσο είναι το ρεύμα στο κύκλωμα μετά από 4,5 ms;

Απαντήσεις

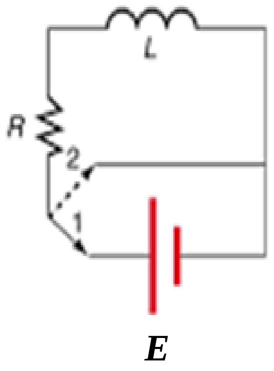
$$Q = CE = 50\times10^{-9}\cdot 60 = 300\times10^{-9} = 0,3\times10^{-6} = 0,3\ \mu\text{C}$$

$$i(0) \equiv I = \frac{V}{R} = \frac{60}{20\times10^{3}} = 3\ \text{mA}$$

$$\tau = RC = 20\times10^{3}\cdot 50\times10^{-9} = 1000\times10^{-6} = 10^{-3} = 1\ \text{ms}$$

$$q(2,5\text{ms}) = 0,3\times10^{-6}\cdot e^{-2,5/1} = 0,3\times10^{-6}\cdot 0,082085 = 0,025\ \mu\text{C}$$
$$\upsilon(3,5\text{ms}) = 60\cdot e^{-3,5/1} = 60\cdot 0,030197 = 1,8\ \text{V}$$
$$i(4,5\text{ms}) = 3\times10^{-3}\cdot e^{-4,5/1} = 3\times10^{-3}\cdot 0,011109 = 0,033\ \text{mA}$$

Ανάπτυξη ρεύματος σε κύκλωμα με πηνίο.



Όταν γυρίσουμε το διακόπτη στη θέση 1 το ρεύμα δεν παίρνει στιγμιαία την τελική του τιμή $I = \frac{E}{R}$ επειδή το πηνίο αντιδρά επαγωγικά και καθυστερεί την αύξησή του. Το ρεύμα στο κύκλωμα θα είναι μια αύξουσα συνάρτηση του χρόνου που είναι η συνάρτηση της εκθετικής ανάπτυξης

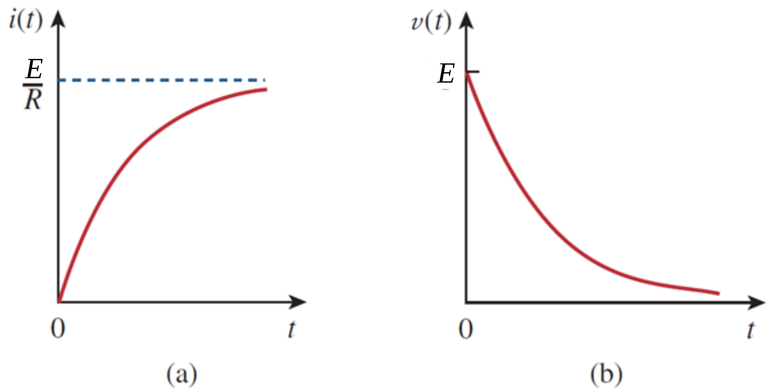
$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

και βρίσκεται με μια ολοκλήρωση από τον κανόνα τάσεων του Kirchhoff, όπου

$$\tau = \frac{L}{R}$$

είναι η σταθερά χρόνου του κυκλώματος.
Η επαγωγική τάση στα άκρα του πηνίου δίνεται από τον τύπο (νόμος Faraday)

$$\upsilon(t) = L\frac{di(t)}{dt} = Ee^{-t/\tau}$$



Μηδενισμός ρεύματος σε κύκλωμα με πηνίο

Όταν υπάρχει ρεύμα $I_0 = \frac{E}{R}$ στο κύκλωμα και γυρίσουμε το διακόπτη στη θέση 2, βγάζοντας την πηγή εκτός, το ρεύμα δεν θα μηδενιστεί στιγμιαία επειδή το πηνίο αντιδρά επαγωγικά και καθυστερεί τη μείωσή του. Το ρεύμα στο κύκλωμα θα είναι μια φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου που είναι η συνάρτηση της εκθετικής μείωσης

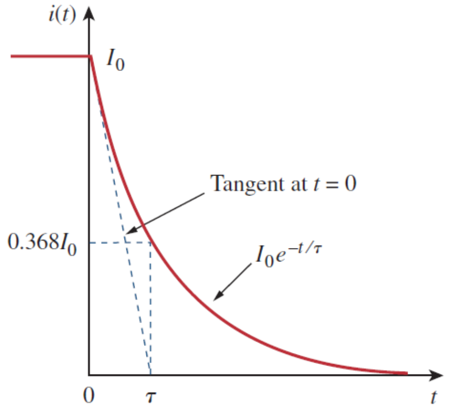
$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

και βρίσκεται με μια ολοκλήρωση από τον κανόνα τάσεων του Kirchhoff, όπου

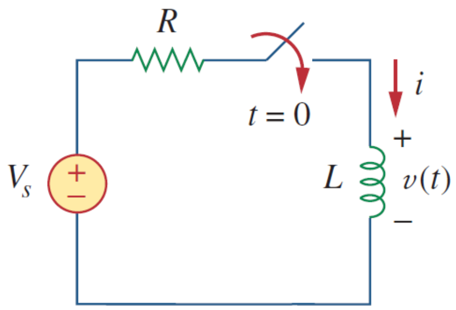
$$\tau = \frac{L}{R}$$

είναι η σταθερά χρόνου του κυκλώματος.
Η επαγωγική τάση στα άκρα της αντίστασης (που θα είναι αντίθετη από την επαγωγική τάση στα άκρα του πηνίου) δίνεται από τον νόμο του Ohm :

$$\upsilon(t) = i(t)R = I_0 R e^{-t/\tau} = E e^{-t/\tau}$$



Παράδειγμα 6
Πηνίο αυτεπαγωγής $L = 800$ mH είναι συνδεδεμένο σε σειρά με ωμική αντίσταση $R = 20\ \Omega$. Στα άκρα της διάταξης εφαρμόζεται τάση $V_s = 120$ V.



(a)

Ποιά είναι η σταθερά χρόνου του κυκλώματος;
Ποιο θα είναι το τελικό ρεύμα στο κύκλωμα ;
Ποια θα είναι η τελική επαγωγική τάση στα άκρα του πηνίου ;
Ποια θα είναι η τιμή του ρεύματος μετά από 0,12 s ;
Ποια θα είναι η τιμή της επαγωγικής τάσης μετά από 0,16 s ;
Απαντήσεις

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{800 \times 10^{-3}}{20} = 0,04 \text{ s}$$

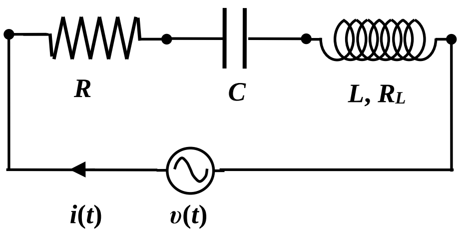
$$I = \frac{V_s}{R} = \frac{120}{20} = 6 \text{ A}$$

Αφού το ρεύμα θα αποκτήσει την τελική του τιμή και θα παραμένει σταθερό η επαγωγική τάση στα άκρα του πηνίου θα μηδενιστεί. Το πηνίο εμφανίζει επαγωγική τάση μόνο όταν το ρεύμα που το διαρρέει μεταβάλλεται $\upsilon_L = L\dfrac{di}{dt}$.

$$i(t) = I\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \Rightarrow i(0{,}12\text{ ms}) = 6\cdot\left(1 - e^{-0{,}12\text{ s}/0{,}04\text{ s}}\right) = 6\cdot\left(1 - e^{-3}\right) = 6\cdot(1 - 0{,}0497871) = 5{,}7\text{ V}$$

$$\upsilon(t) = V_s e^{-t/\tau} \Rightarrow \upsilon(0{,}16\text{ ms}) = 60e^{-0{,}16\text{ s}/0{,}04\text{ s}} = 60\cdot e^{-4} = 60\cdot 0{,}018316 = 1{,}1\text{ V}$$

ΑΠΛΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΣΤΟ ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΟ ΡΕΥΜΑ ΣΕ ΚΥΚΛΩΜΑ RLC ΣΕ ΣΕΙΡΑ



$$\upsilon(t) = V_{\max}\sin(\omega t), \qquad V_{\text{rms}} = \frac{V_{\max}}{\sqrt{2}} = 0{,}707\cdot V_{\max}$$

$$i(t) = I_{\max}\sin(\omega t - \theta), \qquad I_{\text{rms}} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} = 0{,}707\cdot I_{\max}$$

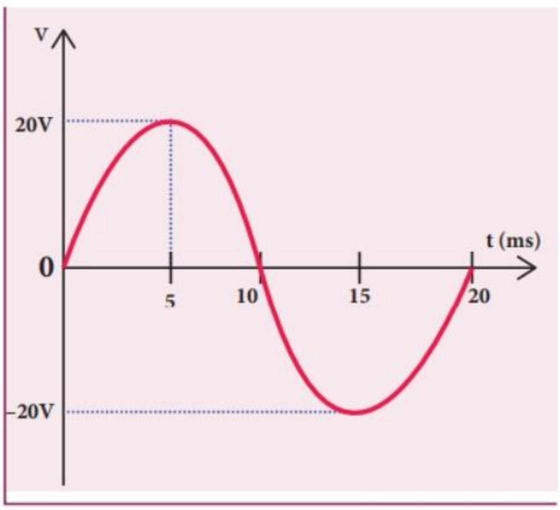
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f, \qquad \theta = \arctan\left(\frac{X_L - X_C}{R_{o\lambda}}\right)$$ η διαφορά φάσης της τάσης από το ρεύμα

$$R_{o\lambda} = R + R_L, \qquad X_L = L\omega = L2\pi f, \qquad X_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{C2\pi f},$$

$$I = \frac{V}{Z}$$ και για πλάτη (max) και για ενεργές τιμές (rms)

$$Z = \sqrt{R_{o\lambda}^2 + (X_L - X_C)^2}$$

Παράδειγμα 7
Η εναλλασσόμενη τάση σε ένα κύκλωμα δίνεται σαν συνάρτηση του χρόνου από την παρακάτω ημιτονοειδή καμπύλη.



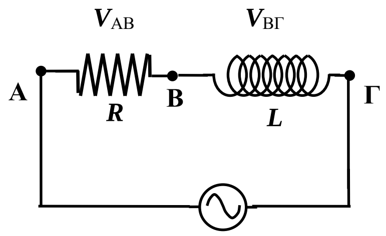
Ποια είναι η ενεργός τιμή της τάσης;
Ποια είναι η στιγμιαία τιμή της τάσης τη χρονική στιγμή t = 1,234 s
Απαντήσεις

Από τη γραφική παράσταση διαβάζουμε το πλάτος και την περίοδο της τάσης:
$V_{\max} = 20 \text{ V}$ και $T = 20 \text{ ms} = 20\times 10^{-3} \text{ s}$ [δυο σημαντικά ψηφία]
Η ενεργός τάση είναι ίση με
$$V_{rms} = \frac{V_{\max}}{\sqrt{2}} = 20\cdot 0,707 = 14 \text{ V}$$
Υπολογίζουμε την κυκλική συχνότητα : $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\cdot 3,1415}{20\times 10^{-3}} = 314,2 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
Η χρονική εξάρτηση της τάσης δίνεται από τη συνάρτηση
$$\upsilon(t) = V_{\max}\sin(\omega t) \Rightarrow \upsilon(t) = 20\sin(314,2\cdot t) \quad \text{(SI)}$$
Ελέγχουμε ότι το κομπιουτεράκι είναι γυρισμένο σε ακτίνια (RAD) και υπολογίζουμε
$\upsilon(1,234 \text{ s}) = 20\sin(314,2\cdot 1,234) = 20\cdot\sin(387,7) = -19 \text{ V}$
[στρογγυλοποιήσαμε στα δύο σημαντικά ψηφία]

Παράδειγμα 8
Ιδανικός πυκνωτής χωρητικότητας $C = 31,8\ \mu\text{F}$ συνδέεται σε πηγή εναλλασσόμενης τάσης ενεργού τιμής $V = 220 \text{ V}$ και συχνότητας $f = 50,0 \text{ Hz}$.
Ποια είναι η χωρητική αντίδραση του πηνίου ;
Ποια είναι η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος
Ποιά είναι η ενεργός τιμή του ρεύματος ;
Ποιο είναι το πλάτος του ρεύματος ;
Ποια είναι η διαφορά φάσης της τάσης από το ρεύμα; ;
Ποια είναι η εξίσωση της χρονικής εξάρτησης του ρεύματος ;

Απαντήσεις
$$X_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{C2\pi f} = \frac{1}{31,8\times 10^{-6}\cdot 2\cdot 3,1415\cdot 50} = 100\ \Omega$$
$\text{Z} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = X_C = 100\ \Omega$, αφού $R = 0$ και $X_L = 0$
ενεργός τιμή (rms) ρεύματος: $I = \frac{V}{Z} = \frac{220}{100} = 2,20 \text{ A}$
$$I_{\text{rms}} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow I_{\max} = I_{\text{rms}}\sqrt{2} = 2,20\cdot 1,414 = 3,11 \text{ A}$$
$\theta = \arctan\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) = \arctan\left(\frac{0-100}{0}\right) = \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2} = -90^{\circ}$, η τάση έπεται του ρεύματος κατά 90°, δηλ. το ρεύμα προηγείται κατά 90°
$$i(t) = I_{\max}\sin(\omega t - \theta) = I_{\max}\sin(2\pi f t - (-\pi/2)) \Rightarrow i(t) = 3,11\sin(314t + \pi/2)$$

Παράδειγμα 9

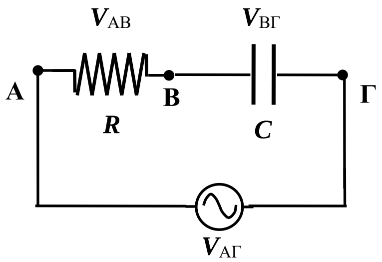


Η ενεργός τάση στην ωμική αντίσταση είναι $V_{AB} = 30 \text{ V}$ και στο ιδανικό πηνίο $V_{B\Gamma} = 40 \text{ V}$. Πόση είναι η ενεργός τιμή της τάσης της πηγής $V_{A\Gamma}$?
Απάντηση

Η τάση του πηνίου έχει διαφορά φάσης +90° από την τάση της αντίστασης άρα τα πλάτη ή οι ενεργές τιμές πρέπει να προστεθούν διανυσματικά :

$$V_{\text{ΑΓ}} = \sqrt{V_{\text{ΑΒ}}^2 + V_{\text{ΒΓ}}^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{2.500} = 50 \text{ V}$$

Παράδειγμα 10



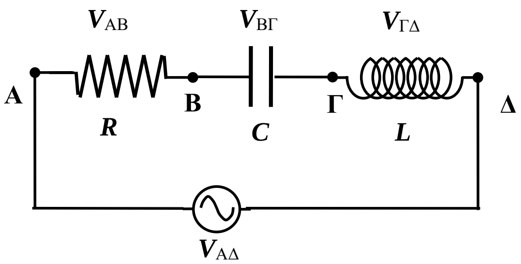
Η ενεργός τάση στην ωμική αντίσταση είναι $V_{\text{ΑΒ}} = 5 \text{ V}$ και στον ιδανικό πυκνωτή $V_{\text{ΒΓ}} = 12 \text{ V}$. Πόση είναι η ενεργός τιμή της τάσης της πηγής $V_{\text{ΑΓ}}$?

Απάντηση

Η τάση του πυκνωτή έχει διαφορά φάσης –90° από την τάση της αντίστασης άρα τα πλάτη ή οι ενεργές τιμές πρέπει να προστεθούν διανυσματικά :

$$V_{\text{ΑΓ}} = \sqrt{V_{\text{ΑΒ}}^2 + V_{\text{ΒΓ}}^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13 \text{ V}$$

Παράδειγμα 11



Η ενεργός τάση στην ωμική αντίσταση είναι $V_{\text{ΑΒ}} = 6 \text{ V}$, στον ιδανικό πυκνωτή $V_{\text{ΒΓ}} = 4 \text{ V}$ και στο ιδανικό πηνίο $V_{\text{ΓΔ}} = 12 \text{ V}$. Πόση είναι η ενεργός τιμή της τάσης της πηγής $V_{\text{ΑΔ}}$?

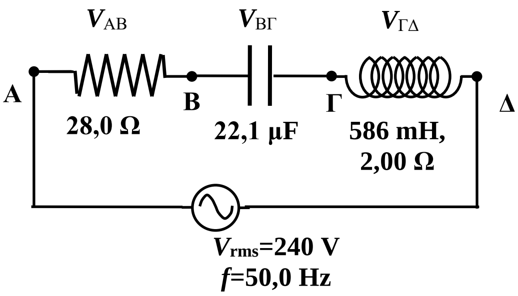
Απάντηση

Η τάση του πηνίου έχει διαφορά φάσης +90° από την τάση της αντίστασης ενώ η τάση του πυκνωτή έχει διαφορά φάσης –90° από την τάση της αντίστασης, άρα τα πλάτη ή οι ενεργές τιμές πρέπει να προστεθούν διανυσματικά. Αφού η τάση του πυκνωτή έχει διαφορά φάσης –180° από την τάση του πηνίου, αυτές οι τάσεις είναι αντίθετες (πάνω στην ίδια ευθεία) και αφαιρούνται.

$$V_{\text{ΑΓ}} = \sqrt{V_{\text{ΑΒ}}^2 + \left(V_{\text{ΓΔ}} - V_{\text{ΒΓ}}\right)^2} = \sqrt{6^2 + (12-4)^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ V}$$

Παράδειγμα 12

Ποια είναι η χρονική εξάρτηση του ρεύματος στο παρακάτω κύκλωμα



Απάντηση

$$R_{o\lambda} = R + R_L = 28 + 2 = 30,0\ \Omega,$$

$$X_L = L\omega = L2\pi f = 586\times 10^{-3}\cdot 2\cdot \pi \cdot 50 = 184\ \Omega,$$

$$X_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{C2\pi f} = \frac{1}{22,1\times 10^{-6}\cdot 2\cdot \pi \cdot 50} = 144\ \Omega,$$

$$Z = \sqrt{R_{o\lambda}^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{30^2 + (184-144)^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50\ \Omega$$

$$I_{\mathrm{rms}} = \frac{V_{\mathrm{rms}}}{Z} = \frac{240}{50} = 4,80\ \mathrm{A}$$

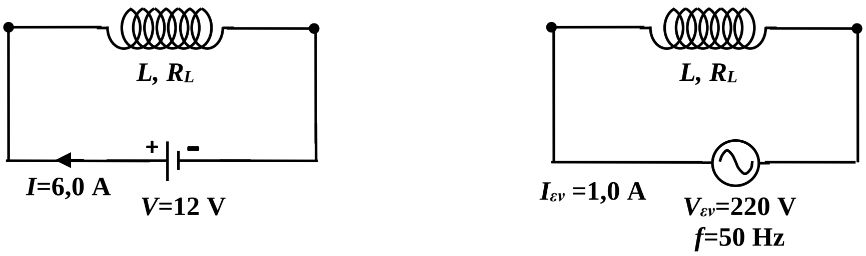
$$I_{\max} = I_{\mathrm{rms}}\cdot \sqrt{2} = 4,80\cdot 1,414 = 6,80\ \mathrm{A}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{X_L - X_C}{R_{o\lambda}}\right) = \arctan\left(\frac{184-144}{30}\right) = \arctan\left(\frac{40}{30}\right) = 53,13^{\mathrm{o}} = 0,9273\ \mathrm{rad}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\cdot 3,1415\cdot 50 = 314\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

$$i(t) = I_{\max}\sin(\omega t - \theta) \Rightarrow \boxed{i(t) = 3,40\sin(314\cdot t - 0,927)\quad (\mathrm{SI})}$$

Παράδειγμα 13



Πόση είναι η ωμική αντίσταση και η αυτεπαγωγή του πηνίου;

Απάντηση

Στο συνεχές :

$$R_L = \frac{V}{I} = \frac{12}{6} = 2\ \Omega$$

Στο εναλλασσόμενο :

$$Z = \frac{V_{\mathrm{rms}}}{I_{\mathrm{rms}}} = \frac{220}{1} = 220\ \Omega$$

$$Z^2 = R_L^2 + X_L^2 \Rightarrow X_L = \sqrt{Z^2 - R_L^2} = \sqrt{220^2 - 4^2} = \sqrt{48.400 - 16} = \sqrt{48.384} = 219,963633 \approx 220\ \Omega$$

Βλέπουμε ότι η ωμική αντίσταση R_L είναι αμελητέα μπροστά στην επαγωγική αντίδραση $X_L >> R_L$ και γι' αυτό η σύνθετη αντίσταση είναι ουσιαστικά μόνο η επαγωγική αντίδραση $Z \simeq X_L$

$$\omega = 2\pi f = 2 \cdot 3,1415 \cdot 50 = 314\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{220}{314} = 0,70\ \mathrm{H}$$