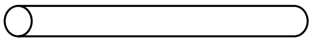
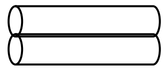
ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΗΛΕΚΤΡΟΤΕΧΝΙΑΣ 1

Κώστας Φιλιππίδης, Φυσικός PhD, Καθηγητής

1. Το σύρμα του σχήματος έχει αντίσταση 20 Ω. Όταν το «διπλώσω» στη μέση, πόση θα γίνει η τιμή της ηλεκτρικής του αντίστασης?



R=20 Ω



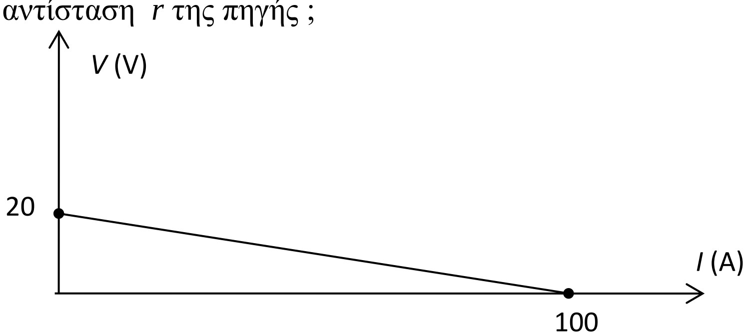
R'=

Απάντηση

Από τον τύπο $R=\rho\dfrac{\ell}{S}$ βλέπουμε ότι επειδή το μήκος γίνεται μισό ενώ η διατομή διπλασιάζεται η αντίσταση υποτετραπλασιάζεται.

$$R'=\rho\frac{\ell'}{S'}=\rho\frac{\ell/2}{2S}=\frac{1}{4}\rho\frac{\ell}{S}=\frac{1}{4}R=\frac{20}{4}=5\ \Omega$$

2. Το παρακάτω είναι η γραφική παράσταση της διαφοράς δυναμικού στα άκρα μιας πραγματικής πηγής συναρτήσει του ρεύματος που τη διαρρέει. Πόση είναι η ηλεκτρεγερτική δύναμη E και η εσωτερική αντίσταση r της πηγής ;



Απάντηση

Η σχέση που συνδέει την πολική τάση της πηγής V με το ρεύμα I που τη διαρρέει είναι γραμμική όπως και η γραφική παράσταση : $V=E-Ir$. Αυτή η σχέση είναι ευθεία με κατηγμένη (τομή με τον κάθετο άξονα) ίση με E και κλίση προς τα κάτω ίση με $-r$.

Οπότε από τη γραφική παράσταση «διαβάζουμε» E=20 V (V για I=0). Η κλίση της ευθείας είναι (από το τριγωνάκι) :

$$\kappa\lambda\iota\sigma\eta=\frac{\Delta V}{\Delta I}=\frac{0-20}{100-0}=-0,2\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}$$. Οπότε r= 0,2 Ω

3. Όταν στα άκρα μιας αντίστασης R εφαρμοστεί διαφορά δυναμικού V καταναλώνει ισχύ P=2,5 W. Αν διπλασιαστεί η διαφορά δυναμικού τότε πόση ισχύ καταναλώνει ;

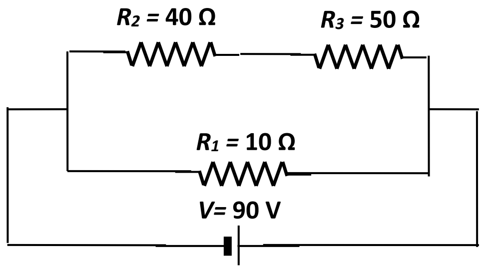
Απάντηση

Επειδή σε ωμικό αντιστάτη η ισχύς εξαρτάται από το τετράγωνο της διαφοράς δυναμικού, όταν το δυναμικό διπλασιαστεί η ισχύς τετραπλασιάζεται

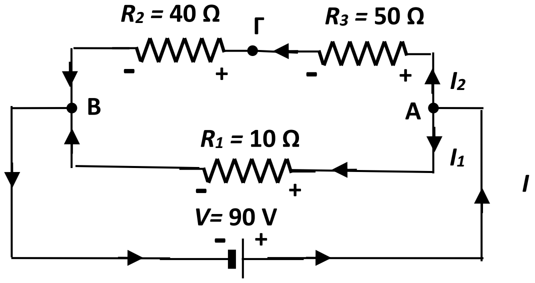
$$P'=\frac{V'^2}{R}=\frac{(2V)^2}{R}=4\frac{V^2}{R}=4P=4\cdot 2,5=10\ \mathrm{W}$$

Να επιλυθούν τα παρακάτω κυκλώματα. Δηλαδή να βρεθούν τα ρεύματα που διαρρέουν κάθε κλάδο και οι διαφορές δυναμικού στα άκρα κάθε στοιχείου.

K1.



Σχεδιάζουμε τα ρεύματα στους κλάδους και σημειώνουμε τα σημεία που έχουν διαφορετικό δυναμικό. Επίσης σημειώνουμε την πολικότητα των στοιχείων. Άκρο υψηλότερου δυναμικού με + συν και άκρο χαμηλότερου δυναμικού με – μείον. Το ηλεκτρικό ρεύμα ρέει από υψηλότερο σε χαμηλότερο δυναμικό.



Η συνολική ωμική αντίσταση μπορεί να υπολογιστεί με τους τύπους της παράλληλης και σε σειρά συνδεσμολογίας. Οπότε το κύκλωμα λύνεται με απλή εφαρμογή του νόμου του Ohm ή και των τύπων του διαιρέτη τάσης και διαιρέτη ρεύματος.

$R_{23} = R_2 + R_3 = 40 + 50 = 90\ \Omega$ (σε σειρά)

$R_{ολ} = R_{23} \parallel R_1 = \dfrac{R_1 R_{23}}{R_1 + R_{23}} = \dfrac{10 \cdot 90}{10 + 90} = 9\ \Omega$ (παράλληλα)

Νόμος Ohm: $I = \dfrac{V}{R_{ολ}} = \dfrac{90}{9} = 10\ \text{A}$

Διαιρέτης ρεύματος (τα ρεύμα μοιράζεται αντιστρόφως ανάλογα με τις αντιστάσεις)

$I_1 = \dfrac{R_{23}}{R_1 + R_{23}} I = \dfrac{90}{10 + 90} 10 = 9\ \text{A}$, $I_2 = \dfrac{R_1}{R_1 + R_{23}} I = \dfrac{10}{10 + 90} 10 = 1\ \text{A}$

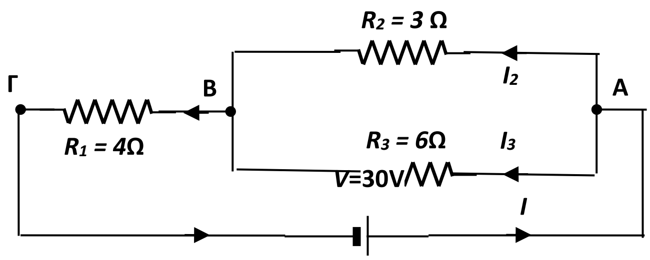
Επιβεβαιώνουμε τον 1ο κανόνα του Kirchhoff : $I = I_1 + I_2 \Rightarrow 10\ \text{A} = 9\ \text{A} + 1\ \text{A}$

Διαιρέτης τάσης (η τάση μοιράζεται ανάλογα με τις αντιστάσεις)

$V_3 = V_{ΑΓ} = \dfrac{R_3}{R_2 + R_3} V_{ΑΒ} = \dfrac{50}{40 + 50} 90 = 50\ \text{V}$, $V_2 = V_{ΓΒ} = \dfrac{R_2}{R_2 + R_3} V_{ΑΒ} = \dfrac{40}{40 + 50} 90 = 40\ \text{V}$

Επιβεβαιώνουμε τον 2ο κανόνα του Kirchhoff : $V_{ΑΒ} = V_{ΑΓ} + V_{ΓΒ} \Rightarrow V = V_3 + V_2 \Rightarrow 90\ \text{V} = 50\ \text{V} + 40\ \text{V}$

Κ2



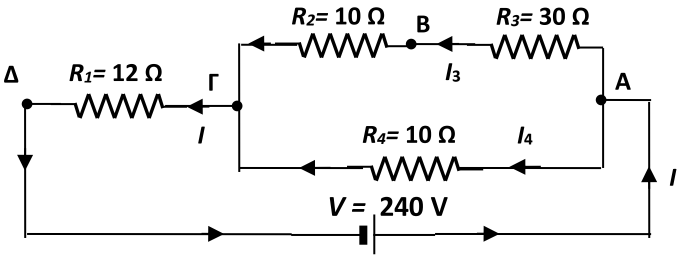
Πάλι η συνολική ωμική αντίσταση μπορεί να υπολογιστεί με τους τύπους της παράλληλης και σε σειρά συνδεσμολογίας. Οπότε το κύκλωμα λύνεται με απλή εφαρμογή του νόμου του Ohm.

$R_{ολ} = R_1 + R_2 \parallel R_3 = R_1 + \dfrac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 4 + \dfrac{3 \cdot 6}{3 + 6} = 4 + 2 = 6\ \Omega$ $\qquad I = \dfrac{V}{R_{ολ}} = \dfrac{30}{6} = 5\ \text{A}$

$V_{ΒΓ} = IR_1 = 5 \cdot 4 = 20\ \text{V}$, $V_{ΑΒ} = V - V_{ΒΓ} = 30 - 20 = 10\ \text{V}$

$I_2 = \dfrac{V_{ΑΒ}}{R_2} = \dfrac{10}{3} = 3{,}33\ \text{A}$ $\qquad I_3 = \dfrac{V_{ΑΒ}}{R_3} = \dfrac{10}{6} = 1{,}67\ \text{A}$

K3



$$R_{ολ} = R_1 + R_4 \,||\, (R_2 + R_3) = R_1 + \frac{R_4(R_2+R_3)}{R_2+R_3+R_4} = 12 + \frac{10(10+30)}{10+30+10} = 12 + 8 = 20\ \Omega$$

$$I = \frac{V}{R_{ολ}} = \frac{240}{20} = 12\ \text{A}$$

$$V_{\Gamma\Delta} = IR_1 = 12\cdot 12 = 144\ \text{V} \quad , \ V_{\mathrm{A}\Gamma} = V - V_{\Gamma\Delta} = 240 - 144 = 96\ \text{V}$$

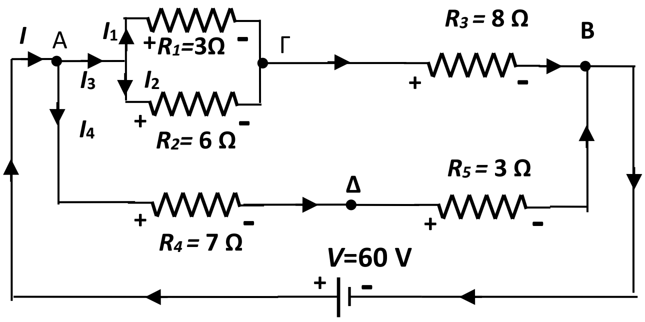
$$I_4 = \frac{V_{\mathrm{A}\Gamma}}{R_4} = \frac{96}{10} = 9{,}6\ \text{A} \qquad I_3 = I - I_4 = 12 - 9{,}6 = 2{,}4\ \text{A}$$

$$V_{\mathrm{AB}} = I_3 R_3 = 2{,}4\cdot 30 = 72\ \text{V} \qquad V_{\mathrm{B}\Gamma} = I_3 R_2 = 2{,}4\cdot 10 = 24\ \text{V}$$

Επιβεβαιώνουμε

$$V = V_{\mathrm{AB}} + V_{\mathrm{B}\Gamma} + V_{\Gamma\Delta} \Rightarrow 240 = 72 + 24 + 144$$

K4



$$R_{ολ} = (R_4 + R_5) \,||\, (R_3 + R_1 \,||\, R_2) = (7+3) \,||\, (8 + \frac{3\cdot 6}{3+6}) = 10 \,||\, (8+2) = 5\ \Omega$$

$$I = \frac{V}{R_{ολ}} = \frac{60}{5} = 12\ \text{A} \qquad I_4 = \frac{V_{\mathrm{AB}}}{R_4 + R_5} = \frac{60}{10} = 6\ \text{A} \qquad I_3 = I - I_4 = 12 - 6 = 6\ \text{A}$$

$$V_{\mathrm{A}\Delta} = I_4 R_4 = 6\cdot 7 = 42\ \text{V} \quad , \ V_{\Delta\mathrm{B}} = V - V_{\mathrm{A}\Delta} = 60 - 42 = 18\ \text{V}$$

$$V_{\Gamma\mathrm{B}} = I_3 R_3 = 6\cdot 8 = 48\ \text{V} \qquad V_{\mathrm{A}\Gamma} = V - V_{\Gamma\mathrm{B}} = 60 - 48 = 12\ \text{V}$$

$$I_1 = \frac{V_{\mathrm{AB}}}{R_1} = \frac{12}{3} = 4\ \text{A} \quad I_2 = \frac{V_{\mathrm{AB}}}{R_2} = \frac{12}{6} = 2\ \text{A}$$

Για να βρούμε τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων Γ και Δ, $V_{\Gamma\Delta} = V_\Gamma - V_\Delta$ ξεκινάμε από το δυναμικό V_Γ, του σημείου Γ, και ακολουθούμε μια διαδρομή ως το σημείο Δ που έχει δυναμικό V_Δ καταγράφοντας στην πορεία τις πτώσεις ή ανυψώσεις δυναμικού που συναντάμε

Διαδρομή ΓΑΔ:

$$V_\Gamma + I_1 R_1 - I_4 R_4 = V_\Delta \Rightarrow V_{\Gamma\Delta} = -I_1 R_1 + I_4 R_4 = -4\cdot 3 + 6\cdot 7 = -12 + 42 = 30\ \text{V}$$

Διαδρομή ΓΒΔ:

$$V_\Gamma - I_3 R_3 + I_4 R_5 = V_\Delta \Rightarrow V_{\Gamma\Delta} = I_3 R_3 - I_4 R_5 = 6\cdot 8 - 6\cdot 3 = 48 - 18 = 30\ \text{V}$$

Εναλλακτικά μπορούμε να αφαιρέσουμε ήδη γνωστές διαφορές δυναμικού τους από ένα κοινό σημείο αναφοράς.

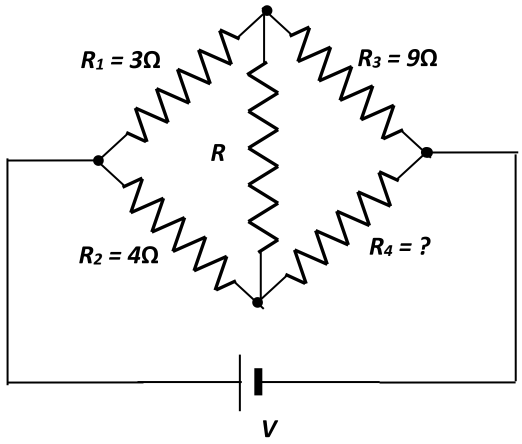
Σημείο αναφοράς Α:

$$V_{ΑΔ} - V_{ΑΓ} = V_Α - V_Δ - (V_Α - V_Γ) = V_Γ - V_Δ = V_{ΓΔ} \Rightarrow V_{ΓΔ} = V_{ΑΔ} - V_{ΑΓ} = 42 - 12 = 30 \text{ V}$$

Σημείο αναφοράς Β:

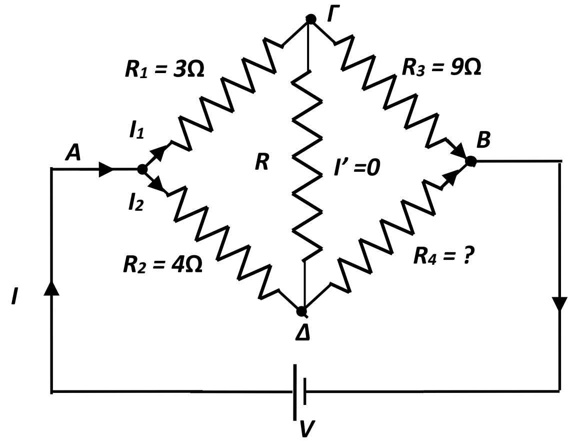
$$V_{ΓΒ} - V_{ΔΒ} = V_Γ - V_Β - (V_Δ - V_Β) = V_Γ - V_Δ = V_{ΓΔ} \Rightarrow V_{ΓΔ} = V_{ΓΒ} - V_{ΔΒ} = 48 - 18 = 30 \text{ V}$$

K5



Πόσο πρέπει να είναι ο αντιστάτης R_4 , ώστε ο αντιστάτης R να μην διαρρέεται από ρεύμα ;

Λύση



Για να μην διαρρέεται ο αντιστάτης R από ρεύμα πρέπει τα σημεία Γ και Δ να έχουν ίσο δυναμικό. Άρα η συνολική τάση $V = V_{AB} = V_{ΑΓ} + V_{ΓΒ} = V_{ΑΔ} + V_{ΔΒ}$ έχει διαιρεθεί με τον ίδιο τρόπο και στον πάνω κλάδο ΑΓΒ και στον κάτω κλάδο ΑΔΒ, δηλαδή

$$\frac{V_{ΑΓ}}{V_{ΓΒ}} = \frac{V_{ΑΔ}}{V_{ΔΒ}} \quad (1) \qquad ή \qquad V_{ΑΓ} = V_{ΑΔ} \quad (2), \qquad V_{ΓΒ} = V_{ΔΒ} \quad (3)$$

Από αυτές τις εξισώσεις και το νόμο του Ohm παίρνουμε ότι ο λόγος των αντιστάσεων είναι ο ίδιος σε κάθε κλάδο

π.χ. από (2) και (3) $\quad V_{ΓΒ} = V_{ΔΒ} \Rightarrow I_1 R_3 = I_2 R_4 \Rightarrow \frac{V_{ΑΓ}}{R_1} R_3 = \frac{V_{ΑΔ}}{R_2} R_4 \Rightarrow \quad \boxed{\frac{R_3}{R_1} = \frac{R_4}{R_2}}$

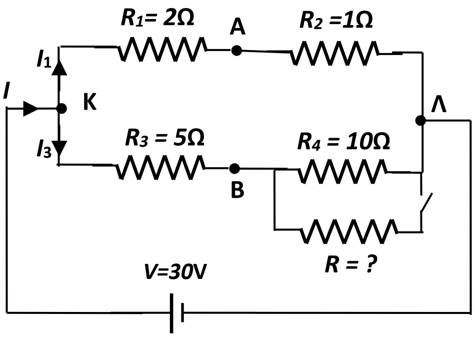
ή από την (1) $\quad \frac{V_{ΑΓ}}{V_{ΓΒ}} = \frac{V_{ΑΔ}}{V_{ΔΒ}} \Rightarrow \frac{I_1 R_1}{I_1 R_3} = \frac{I_2 R_2}{I_2 R_4} \Rightarrow \frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4}$

Από όπου παίρνουμε $\frac{R_3}{R_1} = \frac{R_4}{R_2} \Rightarrow R_4 = R_2 \frac{R_3}{R_1} = 4\frac{9}{3} \Rightarrow R_4 = 12\ \Omega$

K6

Να υπολογιστεί η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων Α και Β: $V_{AB} = V_Α - V_B$

Τι αντίσταση R πρέπει να συνδέσουμε παράλληλα με την R_4 ώστε τα σημεία Α και Β να έχουν ίδιο δυναμικό $V_{AB} = V_Α - V_B = 0$



$$R_{o\lambda} = (R_1+R_2)\,||\,(R_3+R_4) = (2+1)\,||\,(5+10) = 3\,||\,15 = \frac{3\cdot 15}{3+15} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} = 2{,}5\ \Omega$$

$$I = \frac{V}{R_{o\lambda}} = \frac{30}{2{,}5} = 12\ \text{A} \qquad I_1 = \frac{V}{R_1+R_2} = \frac{30}{3} = 10\ \text{A} \qquad I_3 = I - I_1 = 12-10 = 2\ \text{A}$$

$$V_{\text{KA}} = I_1R_1 = 10\cdot 2 = 20\ \text{V} \quad , \quad V_{\text{A}\Lambda} = V - V_{\text{KA}} = 30-20 = 10\ \text{V}$$

$$V_{\text{KB}} = I_3R_3 = 2\cdot 5 = 10\ \text{V} \qquad V_{\text{B}\Lambda} = V - V_{\text{KB}} = 30-10 = 20\ \text{V}$$

Βλέπουμε ότι η τάση στον πάνω κλάδο έχει μοιραστεί σε 20 και 10 ενώ στον κάτω κλάδο σε 10 και 20. Γι αυτό τα σημεία Α και Β θα έχουν διαφορετικό δυναμικό καθώς οι πτώσεις τάσης από το σημείο Κ προς αυτά είναι διαφορετικές.

$$V_{\text{AB}} = V_{\text{A}\Lambda} - V_{\text{B}\Lambda} = 10-20 = -10\ \text{V}$$

Για να έχουν τα δύο σημεία το ίδιο δυναμικό θα πρέπει η τάση να διαιρεθεί με τον ίδιο τρόπο. Για να γίνει αυτό πρέπει ο λόγοι των αντιστάσεων των δυο κλάδων να είναι ίσοι

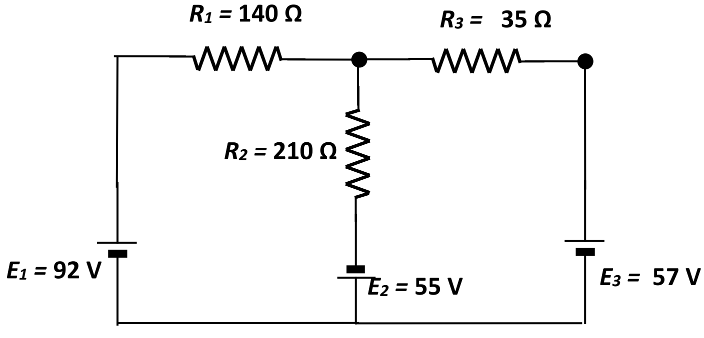
$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_4\,||\,R}{R_3} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\frac{10R}{10+R}}{5} \Rightarrow \frac{10R}{10+R} = \frac{5}{2} \Rightarrow 20R = 50+5R \Rightarrow 15R = 50 \Rightarrow 3R = 10 \Rightarrow R = \frac{10}{3}\ \Omega$$

Πράγματι, αν συνδέσουμε μια τέτοια αντίσταση *R*, παράλληλα με την R_4 η ισοδύναμη αντίστασή τους γίνεται

$$\frac{RR_4}{R+R_4} = \frac{10\cdot 10/3}{10+10/3} = \frac{100/3}{40/3} = \frac{10}{4} = 2{,}5\ \Omega$$

που είναι η μισή της R_3 όπως και η R_2 είναι η μισή της R_1.

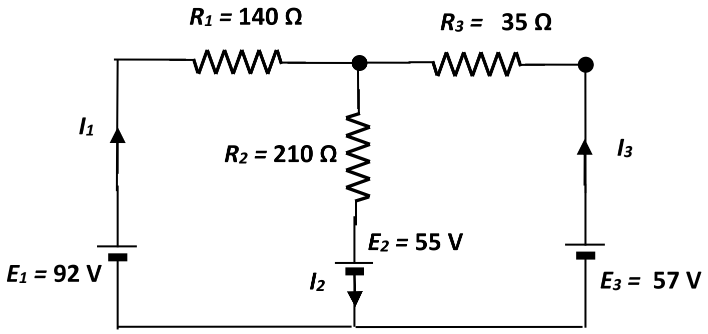
Κ7



Δεν μπορεί να λυθεί με τους τύπους του συνδυασμού αντιστάσεων και πηγών και κατόπιν με εφαρμογή του νόμου του Ohm. Καμιά αντίσταση δεν είναι σε σειρά ή παράλληλα με καμία άλλη. Έχουμε παραπάνω από μια πηγές. Ούτε οι πηγές μπορούν να συνδυαστούν σε σειρά ή παράλληλα.

Λύση 1

Με τη μέθοδο της υπέρθεσης

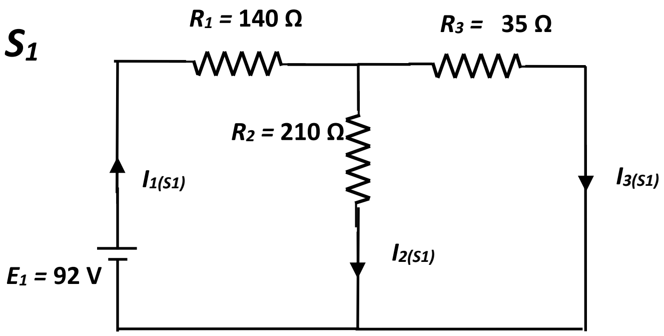


Το ρεύμα που θα διαρρέει κάθε κλάδο είναι το άθροισμα των ρευμάτων που θα δημιουργούσε ή κάθε πηγή μόνη της χωρίς να υπήρχαν οι άλλες δύο.

Π.χ. $I_1 = I_{1(S1)} + I_{1(S2)} + I_{1(S3)}$ (αν σχεδιάσουμε τα επιμέρους ρεύματα με την ίδια φορά με το I_1)

Τα ρεύματα που προκαλεί η κάθε πηγή (source) από μόνη της, χωρίς τις άλλες δύο, μπορούν να υπολογιστούν όπως πριν από τους τύπους συνδυασμού αντιστάσεων και το νόμο του Ohm.

Ρεύματα της πηγής 1 (S1)



$$R_{o\lambda(S1)} = R_1 + R_2 \,||\, R_3 = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 140 + \frac{210 \cdot 35}{210 + 35} = 170\ \Omega$$

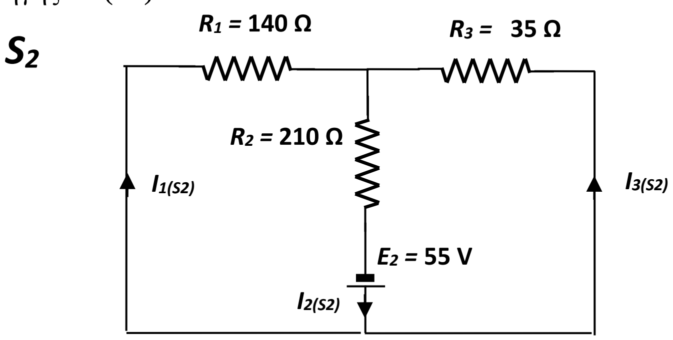
$$I_{1(S1)} = \frac{E_1}{R_{o\lambda(S1)}} = \frac{92}{170} \Rightarrow I_{1(S1)} = 0,541\ \text{A}$$

Από τύπο διαιρέτη ρεύματος

$$I_{2(S1)} = \frac{R_3}{R_2 + R_3} I_{1(S1)} = \frac{35}{210 + 35} 0,541 \Rightarrow I_{2(S1)} = 0,077\ \text{A}$$

$$I_{3(S1)} = \frac{R_2}{R_2 + R_3} I_{1(S1)} = \frac{210}{210 + 35} 0,541 \Rightarrow I_{3(S1)} = 0,464\ \text{A}$$

Ρεύματα της πηγής 2 (S2)



$$R_{o\lambda(S2)} = R_2 + R_1 \,||\, R_3 = R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = 210 + \frac{140 \cdot 35}{140 + 35} = 238\ \Omega$$

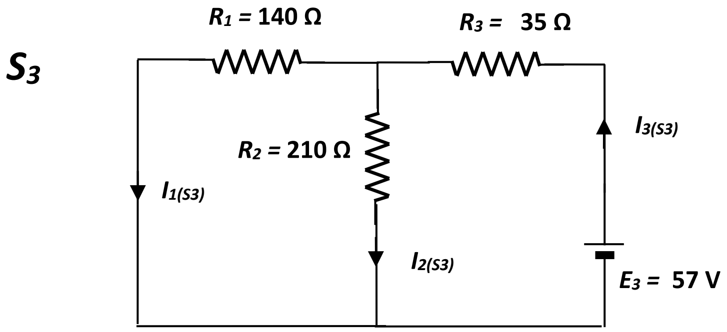
$$I_{2(S2)} = \frac{E_2}{R_{o\lambda(S2)}} = \frac{55}{238} \Rightarrow I_{2(S2)} = 0,231 \text{ A}$$

Από τύπο διαιρέτη ρεύματος

$$I_{1(S2)} = \frac{R_3}{R_1+R_3} I_{2(S2)} = \frac{35}{140+35} 0,231 \Rightarrow I_{2(S1)} = 0,046 \text{ A}$$

$$I_{3(S2)} = \frac{R_1}{R_1+R_3} I_{1(S1)} = \frac{140}{140+35} 0,231 \Rightarrow I_{3(S2)} = 0,185 \text{ A}$$

Ρεύματα της πηγής 3 (S3)



Εντελώς παρόμοια βρίσκουμε

$I_{3(S3)} = 0,479$ A $\quad I_{1(S3)} = 0,287$ A $\quad I_{2(S3)} = 0,192$ A

Οπότε τα ρεύματα που διαρρέουν τους κλάδους του κυκλώματος είναι (λαμβάνοντας υπόψη και τις φορές των βελών που έχουμε σχεδιάσει τα επιμέρους ρεύματα σε σχέση με τα I_1 , I_2, I_3)

$$I_1 = I_{1(S1)} + I_{1(S2)} - I_{1(S3)} = 0,541 + 0,046 - 0,287 \Rightarrow \boxed{I_1 = 0,3 \text{ A}}$$

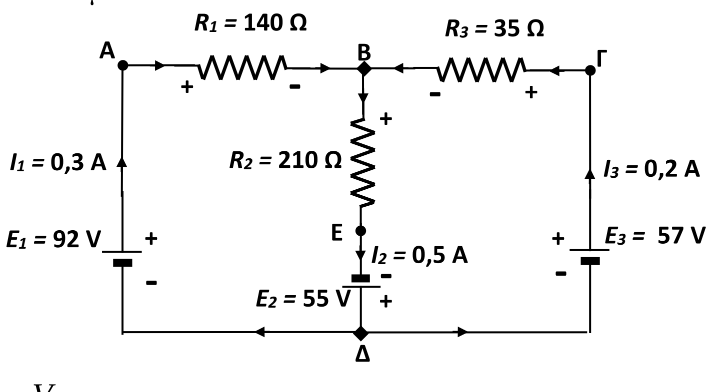
$$I_2 = I_{2(S1)} + I_{2(S2)} + I_{3(S3)} = 0,077 + 0,231 + 0,192 \Rightarrow \boxed{I_2 = 0,5 \text{ A}}$$

$$I_3 = -I_{3(S1)} + I_{3(S2)} + I_{3(S3)} = -0,464 + 0,185 + 0,479 \Rightarrow \boxed{I_3 = 0,2 \text{ A}}$$

Επιβεβαιώνουμε, για έλεγχο, ότι τα ρεύματα ικανοποιούν τον κανόνα των κόμβων. Π.χ. στον κόμβο Β

$$I_1 + I_3 = I_2 \Rightarrow 0,3 + 0,2 = 0,5$$

Εφόσον έχουμε βρει τα ρεύματα και τις φορές τους μπορούμε να υπολογίσουμε οποιαδήποτε διαφορά δυναμικού στο κύκλωμα



Π.χ. $V_{AE} = V_A - V_E$

Από τη διαδρομή ΑΒΕ :

$$V_A - I_1R_1 - I_2R_2 = V_E \Rightarrow V_A - V_E = I_1R_1 + I_2R_2 \Rightarrow V_{AE} = 0,3 \cdot 140 + 0,5 \cdot 210 \Rightarrow V_{AE} = 147 \text{ V}$$

Από τη διαδρομή ΑΔΕ :

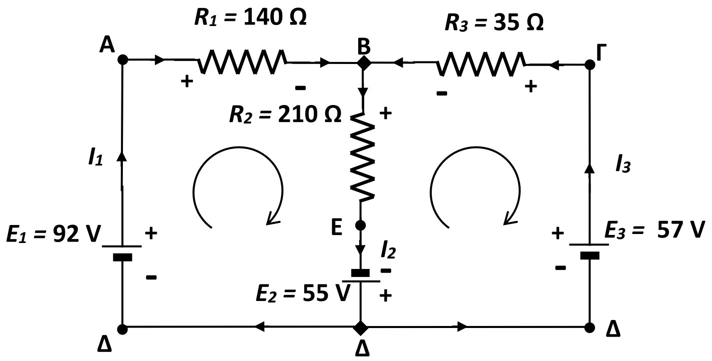
$$V_A - E_1 - E_2 = V_E \Rightarrow V_A - V_E = E_1 + E_2 \Rightarrow V_{AE} = 92 + 55 \Rightarrow V_{AE} = 147 \text{ V}$$

Από τη διαδρομή ΑΒΓΔΕ :

$$V_A - I_1R_1 + I_3R_3 - E_3 - E_2 = V_E \Rightarrow V_A - V_E = E_3 + E_2 + I_1R_1 - I_2R_2 \Rightarrow$$
$$V_{AE} = 57 + 55 + 0,3 \cdot 140 - 0,2 \cdot 35 \Rightarrow V_{AE} = 147 \text{ V}$$

Λύση 2

Με τη μέθοδο των ρευμάτων κλάδων (κανόνες Kirchhoff)



Το κύκλωμα έχει 2 κόμβους, τους Β και Δ, από όπου παίρνουμε 1 εξίσωση για τα ρεύματα, από τον κανόνα των ρευμάτων $\sum_i I_i = 0$ στους κόμβους

$\boxed{I_1 - I_2 + I_3 = 0}$ (1)

Το κύκλωμα έχει 3 βρόχους, τους ΑΒΕΔΑ, ΒΓΔΕΒ και ΑΒΓΔΑ, από όπου παίρνουμε άλλες 2 εξισώσεις για τα ρεύματα, από τον κανόνα των διαφορών δυναμικού στους βρόχους $\sum_i \Delta V_i = 0$

ΑΒΕΔΑ: $-I_1R_1 - I_2R_2 + E_1 + E_2 = 0 \Rightarrow 140\cdot I_1 + 210\cdot I_2 = 147 \Rightarrow \boxed{20\cdot I_1 + 30\cdot I_2 + 0\cdot I_3 = 21}$ (2)

ΒΓΔΕΒ: $I_3R_3 - E_3 - E_2 + I_2R_2 = 0 \Rightarrow 210\cdot I_2 + 35\cdot I_3 = 112 \Rightarrow \boxed{0\cdot I_1 + 30\cdot I_2 + 5\cdot I_3 = 16}$ (3)

Συγκεντρώνουμε τις 3 εξισώσεις μαζί

$$\begin{aligned} I_1 \quad - I_2 \quad + I_3 &= 0 \\ 20\cdot I_1 + 30\cdot I_2 + 0\cdot I_3 &= 21 \\ 0\cdot I_1 + 30\cdot I_2 + 5\cdot I_3 &= 16 \end{aligned}$$

Είναι ένα σύστημα 3 γραμμικών εξισώσεων με 3 αγνώστους.
Γράφουμε το σύστημα σε μορφή πίνακα και το λύνουμε με τη μέθοδο των οριζουσών

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 20 & 30 & 0 \\ 0 & 30 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{21} \\ \mathbf{16} \end{pmatrix}$$

Η ορίζουσα του πίνακα του συστήματος είναι

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 20 & 30 & 0 \\ 0 & 30 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 30\cdot 5 + 0 + 1\cdot 20\cdot 30 - 0 - 0 - 5\cdot(-1)\cdot 20 = 850$$

Οι ορίζουσες των αγνώστων είναι (αντικαθιστούμε την αντίστοιχη στήλη με τις σταθερές)

$$D_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & -1 & 1 \\ \mathbf{21} & 30 & 0 \\ \mathbf{16} & 30 & 5 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 1\cdot 21\cdot 30 - 1\cdot 30\cdot 16 - 0 - 5\cdot(-1)\cdot 21 = 255$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{0} & 1 \\ 20 & \mathbf{21} & 0 \\ 0 & \mathbf{16} & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot 21 + 0 + 1\cdot 20\cdot 16 - 0 - 0 - 0 = 425$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \mathbf{0} \\ 20 & 30 & \mathbf{21} \\ 0 & 30 & \mathbf{16} \end{vmatrix} = 1\cdot 30\cdot 16 + 0 + 0 - 0 - 21\cdot 30\cdot 1 - 16\cdot(-1)\cdot 20 = 170$$

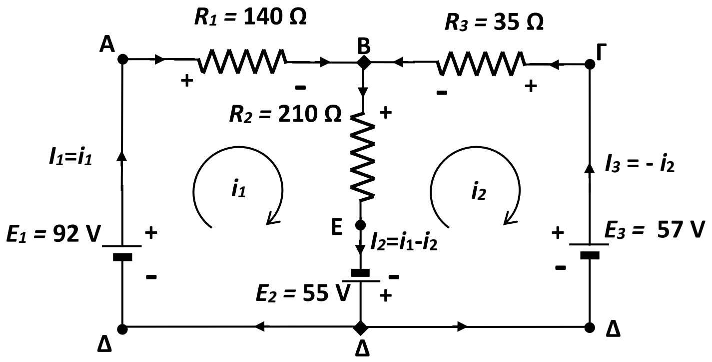
Τα ρεύματα των κλάδων είναι

$I_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{255}{850} = 0,3$ A , $\quad I_2 = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{425}{850} = 0,5$ A , $\quad I_3 = \dfrac{D_3}{D} = \dfrac{170}{850} = 0,2$ A

Ίδια απάντηση όπως και πριν όπως αναμενόταν.

Λύση 3

Μέθοδος ρευμάτων ελαχίστων βρόχων (οφθαλμών)



Ορίζουμε τα ρεύματα i_1 και i_2 που θεωρητικά διαρρέουν τους ελάχιστους βρόχους ΑΒΕΔΑ (1) και ΒΓΔΕΒ (2) του κυκλώματος κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού (CW: clockwise) . Το φυσικό ρεύμα I_2 που θα διαρρέει τον κοινό τους κλάδο ΒΕΔ προκύπτει από υπέρθεση όταν ενώσουμε τους βρόχους $I_2 = i_1 - i_2$. Με τον τρόπο αυτό έχουμε ήδη ικανοποιήσει τον 1^{ο} κανόνα του Kirchhoff στους κόμβους Β, Δ, Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον 2^{ο} κανόνα του Kirchhoff στους δύο ελάχιστους βρόχους και καταλήγουμε σε ένα σύστημα 2x2 (δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους). Δηλαδή έχουμε μειώσει τον αριθμό των εξισώσεων και έχουμε ένα σύστημα που λύνεται ευκολότερα.

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

Η όλη διαδικασία κωδικοποιείτε στην ακόλουθη συνταγή για την απευθείας εύρεση των στοιχείων R_{ij} του πίνακα των συντελεστών και του διανύσματος των σταθερών ε_i .

1) Τα διαγώνια στοιχεία είναι οι ολικές αντιστάσεις των αντίστοιχων βρόχων

$$R_{11} = \sum_{\substack{i:\ \alpha\nu\tau\iota\sigma\tau\alpha\sigma\varepsilon\iota\varsigma \\ \beta\rho\acute{o}\chi o\upsilon 1}} R_{i(1)} = R_1 + R_2 = 140 + 210 = 350$$

$$R_{22} = \sum_{\substack{i:\ \alpha\nu\tau\iota\sigma\tau\alpha\sigma\varepsilon\iota\varsigma \\ \beta\rho\acute{o}\chi o\upsilon 2}} R_{i(2)} = R_2 + R_3 = 210 + 35 = 245$$

2) Ο πίνακας είναι συμμετρικός $R_{21} = R_{12}$

3) Τα μη διαγώνια στοιχεία του πίνακα είναι η ολική αντίσταση του κλάδου που έχουν κοινό μεταξύ τους οι αντίστοιχοι δύο βρόχοι με το κατάλληλο πρόσημο. Βάζουμε + αν τα δυο ρεύματα διατρέχουν των κλάδο ομόρροπα και – αν τον διατρέχουν αντίρροπο.

Εδώ κοινός κλάδος είναι ο ΒΕΔ με ολική αντίσταση μόνο την R_2 και τα ρεύματα διατρέχουν τον κλάδο αντίρροπα, οπότε

$$R_{21} = R_{12} = -R_2 = -210$$

4) Τα στοιχεία του διανύσματος των σταθερών είναι η ολικές ΗΕΔ του κάθε βρόχου

$$\varepsilon_1 = E_2 + E_1 = 55 + 92 = 147$$

$$\varepsilon_2 = -E_2 - E_1 = -57 - 55 = -112$$

'Όταν διατρέχοντας το βρόχο CW συναντάμε την πηγή από τον αρνητικό πόλο και τη διαπερνάμε προς τον θετικό τότε έχουμε ανύψωση δυναμικού και βάζουμε την αντίστοιχη ΗΕΔ με θετικό πρόσημο. Όταν τη συναντάμε από το θετικό προς τον αρνητικό έχουμε πτώση δυναμικού και τη βάζουμε με αρνητικό πρόσημο. Οπότε το σύστημα που έχουμε να λύσουμε είναι

$$\begin{pmatrix} 350 & -210 \\ -210 & 245 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 147 \\ -112 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Απλοποιούμε όσο μπορούμε το σύστημα (διαιρώντας με τυχόν κοινούς παράγοντες) για να μην έχουμε μεγάλα νούμερα στον υπολογισμό των οριζουσών.

$$7\cdot\begin{pmatrix}50 & -30\\ -30 & 35\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i_1\\ i_2\end{pmatrix}=7\cdot\begin{pmatrix}21\\ -16\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}50 & -30\\ -30 & 35\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i_1\\ i_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21\\ -16\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$5\cdot\begin{pmatrix}10 & -6\\ -6 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i_1\\ i_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21\\ -16\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}10 & -6\\ -6 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i_1\\ i_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21/5\\ -16/5\end{pmatrix}$$

Τελικά έχουμε

$$\begin{pmatrix}10 & -6\\ -6 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i_1\\ i_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4,2\\ -3,2\end{pmatrix}$$

Από όπου παίρνουμε

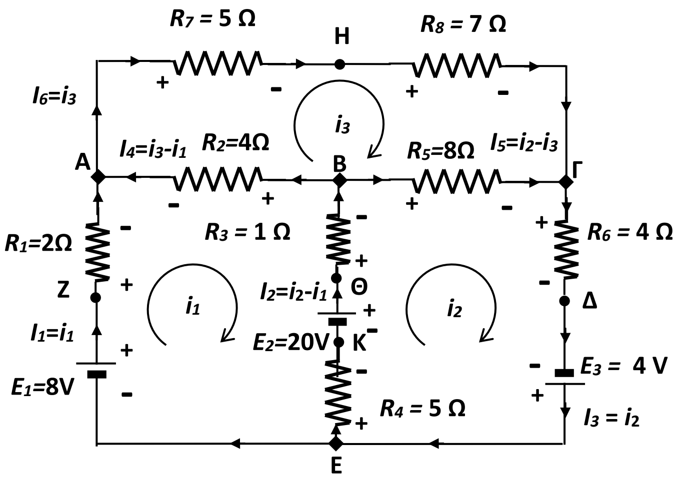
$$i_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix}4,2 & -6\\ -3,2 & 7\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}10 & -6\\ -6 & 7\end{vmatrix}}=\frac{7\cdot 4,2-(-6)\cdot(-3,2)}{10\cdot 7-(-6)\cdot(-6)}=\frac{10,2}{34}=0,3\text{ A}$$

$$i_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix}10 & 4,2\\ -6 & -3,2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}10 & -6\\ -6 & 7\end{vmatrix}}=\frac{10\cdot(-3,2)-4,2\cdot(-6)}{34}=\frac{-6,8}{34}=-0,2\text{ A}$$

Και άρα τα πραγματικά ρεύματα που διαρρέουν τους κλάδους είναι όπως και πριν

$$I_1=i_1=0,3\text{ A}\quad I_2=i_1-i_2=0,3-(-0,2)=0,5\text{ A}\quad I_3=-i_2=0,2\text{ A}$$

K8



Το κύκλωμα έχει 6 κλάδους που διαρρέονται από τα αντίστοιχα ρεύματα : ΕΖΑ (I_1), ΕΚΘΒ (I_2), ΓΔΕ (I_3) ΒΑ (I_4), ΒΓ (I_5) και ΑΗΓ (I_5).

Αν χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των ρευμάτων κλάδων (κανόνες Kirchhoff) θα καταλήξουμε σε ένα γραμμικό σύστημα 6x6.

Αν χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της υπέρθεσης οι συνδυασμοί αντιστάσεων δεν είναι απλοί και θα χρειαζόμασταν μετατροπές από αστέρα σε τρίγωνο.

Ο πιο απλός τρόπος φαίνεται να είναι η μέθοδος των ρευμάτων ελαχίστων βρόχων καθώς υπάρχουν τρεις τέτοιοι 1) ΑΒΘΚΕΖΑ (i_1), 2) ΒΓΔΕΚΘΒ (i_2) και 3) ΑΗΓΒΑ (i_3) και άρα θα καταλήξουμε σε ένα σύστημα 3x3 που λύνεται πιο εύκολα από το 6x6.

Κατασκευάζουμε το σύστημα σε μορφή πινάκων

$$\begin{bmatrix}R_{11} & R_{12} & R_{13}\\ R_{21} & R_{22} & R_{23}\\ R_{31} & R_{32} & R_{33}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}i_1\\ i_2\\ i_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\end{pmatrix}$$

Διαγώνια στοιχεία του πίνακα

Ολική αντίσταση βρόχου 1

$R_{11} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 2 + 4 + 1 + 5 = 12$

Ολική αντίσταση βρόχου 2

$R_{22} = R_3 + R_4 + R_5 + R_6 = 1 + 5 + 8 + 4 = 18$

Ολική αντίσταση βρόχου 3

$R_{33} = R_2 + R_5 + R_7 + R_8 = 4 + 8 + 5 + 7 = 24$

Μη διαγώνια στοιχεία του πίνακα

Αντίσταση κοινού κλάδου 1-2 (ΒΘΚΕ, τα ρεύματα αντίρροπα)

$R_{12} = R_{21} = -R_3 - R_4 = -1 - 5 = -6$

Αντίσταση κοινού κλάδου 1-3 (ΑΒ, τα ρεύματα αντίρροπα)

$R_{13} = R_{31} = -R_2 = -4$

Αντίσταση κοινού κλάδου 2-3 (ΒΓ, τα ρεύματα αντίρροπα)

$R_{23} = R_{32} = -R_5 = -8$

Διάνυσμα σταθερών

ΗΕΔ βρόχου 1

$\varepsilon_1 = E_1 - E_2 = 8 - 20 = -12$

ΗΕΔ βρόχου 2

$\varepsilon_2 = E_2 + E_3 = 20 + 4 = 24$

ΗΕΔ βρόχου 3

$\varepsilon_3 = 0$

Το σύστημα είναι

$$\begin{bmatrix} 12 & -6 & -4 \\ -6 & 18 & -8 \\ -4 & -8 & 24 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 24 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Απλοποιούμε διαιρώντας με τον κοινό παράγοντα 2

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -3 & 9 & -4 \\ -2 & -4 & 12 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Οι ορίζουσες είναι

$$D = \begin{vmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -3 & 9 & -4 \\ -2 & -4 & 12 \end{vmatrix} = 6 \cdot 9 \cdot 12 + (-3)(-4)(-2) + (-2)(-3)(-4) - (-2)9(-2) - (-4)(-4)6 - 12(-3)(-3) = 360$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -6 & -3 & -2 \\ 12 & 9 & -4 \\ 0 & -4 & 12 \end{vmatrix} = (-6) \cdot 9 \cdot 12 + (-3)(-4)0 + (-2)12(-4) - (-2) \cdot 9 \cdot 0 - (-4)(-4)(-6) - 12(-3)12 = -24$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 6 & -6 & -2 \\ -3 & 12 & -4 \\ -2 & 0 & 12 \end{vmatrix} = \ldots = 550$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 6 & -3 & -6 \\ -3 & 9 & 12 \\ -2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \ldots = 180$$

Οπότε τα ρεύματα των ελάχιστων βρόχων είναι :

$i_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-24}{360} = -0,067\ \text{A} \qquad i_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{550}{360} = 1,533\ \text{A} \qquad i_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{180}{360} = 0,500\ \text{A}$

Από αυτά βρίσκουμε τα ρεύματα των κλάδων και από τα ρεύματα των κλάδων όποια διαφορά δυναμικού θέλουμε.

$I_1 = i_1 = -0,067\ \text{A}$

$I_2 = i_2 - i_1 = 1,533 - (-0,067) = 1,6\ \text{A}$

$I_3 = i_2 = 1,533\ \text{A}$

$I_4 = i_3 - i_1 = 0,500 - (-0,067) = 0,567\ \text{A}$

$I_5 = i_2 - i_3 = 1,533 - 0,500 = 1,033\ \text{A}$

$I_6 = i_3 = 0,500\ \text{A}$

Η πραγματική φορά του ρεύματος I_1 είναι αντίθετη από το σχήμα. Άρα η πηγή E_1 καταναλώνει και δεν προσφέρει ενέργεια στο κύκλωμα.