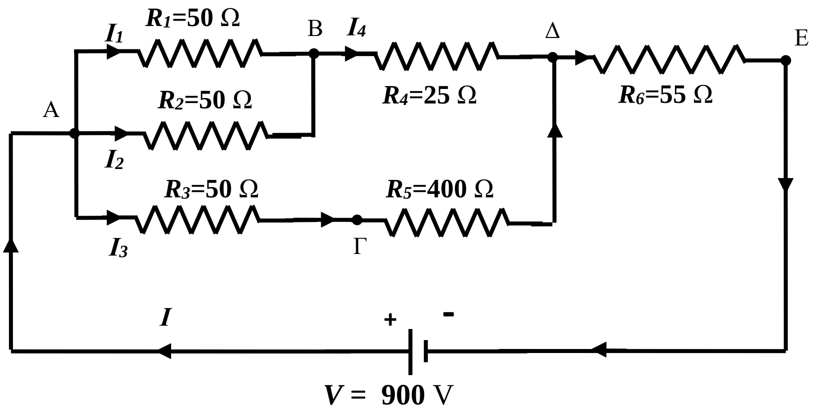
**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ**
**ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ, ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**
***ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ Τ.Ε.***
**ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2019-20**
**ΜΑΘΗΜΑ: ΗΛΕΚΤΡΟΤΕΧΝΙΑ (Εξαμ. 3)**

Δευτέρα, 3 Φεβρουαρίου 2020
Εισηγητής: Κώστας Φιλιππίδης - kphilippides@teiwm.gr
Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες

**Θέμα 1ο**




Να υπολογίσετε : την ολική αντίσταση του κυκλώματος
τα ρεύματα όλων των κλάδων.
της πτώσεις τάσης $V_{ΑΓ}$ και $V_{ΒΓ}$.
την ισχύ που καταναλώνεται στην αντίσταση $R_4$=25 Ω.

**Λύση**

$$R_{ολ} = R_6 + (R_3 + R_5) \,||\, (R_4 + R_1 \,||\, R_2) = 55 + 450 \,||\, (25 + \frac{50 \cdot 50}{50 + 50})$$

$$= 55 + 450 \,||\, (25 + 25) == 55 + \frac{450 \cdot 50}{450 + 50} = 55 + 45 \Rightarrow$$

$$\boxed{R_{ολ} = 100\ \Omega}$$

$$I = \frac{V}{R_{ολ}} = \frac{900}{100} \Rightarrow \boxed{I = 9\ \text{A}}$$

$$V_{ΔΕ} = IR_6 = 9 \cdot 55 \Rightarrow \boxed{V_{ΔΕ} = 495\ \text{V}}$$

$$V = V_{ΑΔ} + V_{ΔΕ} \Rightarrow V_{ΑΔ} = V - V_{ΔΕ} = 900 - 495 \Rightarrow \boxed{V_{ΑΔ} = 405\ \text{V}}$$

$$I_3 = \frac{V_{ΑΔ}}{R_3 + R_5} = \frac{405}{450} \Rightarrow \boxed{I_3 = 0{,}9\ \text{A}}$$

$$I = I_3 + I_4 \Rightarrow I_4 = I - I_3 = 9 - 0{,}9 \Rightarrow \boxed{I_4 = 8{,}1\ \text{A}}$$

$$V_{ΒΔ} = I_4 R_4 = 8{,}1 \cdot 25 \Rightarrow \boxed{V_{ΒΔ} = 202{,}5\ \text{V}}$$

$$V_{ΑΔ} = V_{ΑΒ} + V_{ΒΔ} \Rightarrow V_{ΑΒ} = V_{ΑΔ} - V_{ΒΔ} = 405 - 202{,}5 \Rightarrow \boxed{V_{ΑΒ} = 202{,}5\ \text{V}}$$

$$I_1 = \frac{V_{AB}}{R_1} = \frac{202{,}5}{50} \Rightarrow \boxed{I_1 = 4{,}05\ \text{A}}$$

$$I_2 = \frac{V_{AB}}{R_2} = \frac{202{,}5}{50} \Rightarrow \boxed{I_2 = 4{,}05\ \text{A}}$$

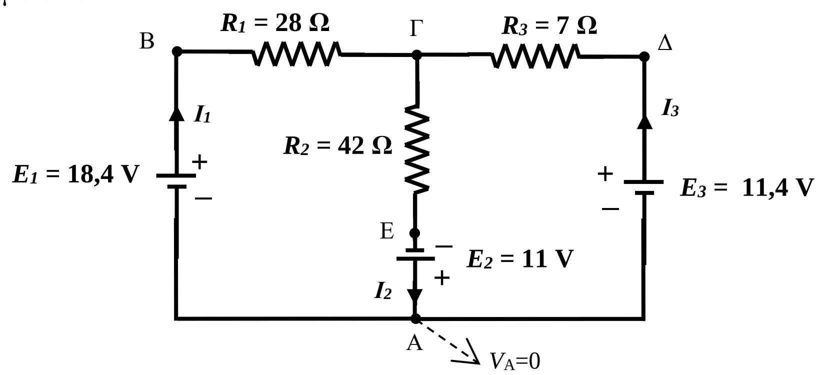
$$V_{ΑΓ} = I_3 R_3 = 0{,}9 \cdot 50 \Rightarrow \boxed{V_{ΑΓ} = 45\ \text{V}}$$

$$V_{ΒΓ} = V_{ΒΑ} + V_{ΑΓ} = -202{,}5 + 0{,}9 \cdot 50 \Rightarrow \boxed{V_{ΒΓ} = 157{,}5\ \text{V}}$$

$P_4 = I_4^2 R_4 = 8{,}1^2 \cdot 25 \Rightarrow \boxed{P_4 = 1640{,}25\ \text{W}}$

**Θέμα 2ο**

Να λύσετε το παρακάτω κύκλωμα με όποια μέθοδο θέλετε. Δηλαδή να βρείτε όλα τα ρεύματα και τις πτώσεις τάσης από το σημείο Γ.




**Λύση**

**Με μέθοδο κομβικών τάσεων, επειδή οδηγεί σε μια μόνο εξίσωση και όχι σε σύστημα εξισώσεων.**

Επιλέγουμε ως κόμβο αναφοράς τον Α ($V_{\text{A}} = 0$). Τότε τα δυναμικά των κόμβων Β και Δ και του σημείου Ε είναι :

$V_{\text{B}} = 16{,}4\ \text{V},\ V_{\Delta} = 11{,}4\ \text{V},\ \ V_{\text{E}} = -11\ \text{V}$

Μόνο ένα δυναμικό, το $V_{\Gamma}$ είναι απροσδιόριστο και άρα χρειαζόμαστε μια εξίσωση για να το βρούμε. Αυτή είναι ο κανόνας ρευμάτων του Kirchhoff σε έναν από τους κόμβους Α ή Γ: $I_2 = I_1 + I_3$ (1)

Τα ρεύματα εκφράζονται από το νόμο του Ohm

$$I_1 = \frac{V_{\text{B}\Gamma}}{R_1} = \frac{V_{\text{B}} - V_{\Gamma}}{R_1} = \frac{18{,}4 - V_{\Gamma}}{28}$$

$$I_2 = \frac{V_{\Gamma\text{E}}}{R_2} = \frac{V_{\Gamma} - V_{\text{E}}}{R_2} = \frac{V_{\Gamma} - (-11)}{42} = \frac{V_{\Gamma} + 11}{42}$$

$$I_3 = \frac{V_{\Delta\Gamma}}{R_3} = \frac{V_{\Delta} - V_{\Gamma}}{R_3} = \frac{11{,}4 - V_{\Gamma}}{7}$$

Οπότε η εξίσωση (1) γίνεται : $\dfrac{V_{\Gamma} + 11}{42} = \dfrac{18{,}4 - V_{\Gamma}}{28} + \dfrac{57 - V_{\Gamma}}{7}$

από τη λύση της οποίας παίρνουμε το άγνωστο δυναμικό $V_{\Gamma}$

Όλα επί 42

$$V_{\Gamma} + 11 = \frac{42}{28}\left(18{,}4 - V_{\Gamma}\right) + \frac{42}{7}\left(11{,}4 - V_{\Gamma}\right) \Rightarrow V_{\Gamma} + 11 = 1{,}5\left(18{,}4 - V_{\Gamma}\right) + 6\left(11{,}4 - V_{\Gamma}\right) \Rightarrow$$

$$V_{\Gamma} + 1{,}5V_{\Gamma} + 6V_{\Gamma} = 1{,}5 \cdot 18{,}4 + 6 \cdot 11{,}4 - 11 \Rightarrow 8{,}5V_{\Gamma} = 85 \Rightarrow V_{\Gamma} = \frac{85}{8{,}5} \Rightarrow$$

$$\boxed{V_{\Gamma} = 10\ \text{V}}$$

Άρα τα ρεύματα είναι : $\boxed{I_1 = \dfrac{18{,}4 - 10}{28} = 0{,}3\ \text{A}}$, $\boxed{I_2 = \dfrac{10 + 11}{42} = 0{,}5\ \text{A}}$, $\boxed{I_3 = \dfrac{11{,}4 - 10}{7} = 0{,}2\ \text{A}}$

Και οι πτώσεις τάσης είναι

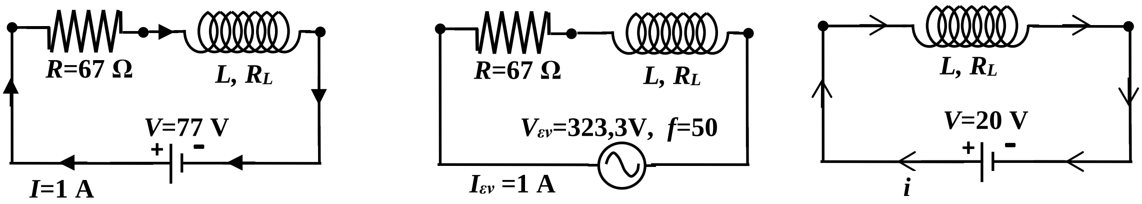
$V_{\Gamma\text{B}} = V_{\Gamma} - V_{\text{B}} = 10 - 18{,}4 \Rightarrow \boxed{V_{\Gamma\text{B}} = -8{,}4\ \text{V}}$

$V_{\Gamma\Delta} = V_{\Gamma} - V_{\Delta} = 10 - 11{,}4 \Rightarrow \boxed{V_{\Gamma\Delta} = -1{,}4\ \text{V}}$

$V_{\Gamma\text{E}} = V_{\Gamma} - V_{\text{E}} = 10 - (-11) \Rightarrow \boxed{V_{\Gamma\text{E}} = 21\ \text{V}}$

$V_{\Gamma A} = V_{\Gamma} - V_{A} = 10 - 0 \Rightarrow \boxed{V_{\Gamma A} = 10\ \text{V}}$

Θέμα 3ο




Πηνίο με αυτεπαγωγή $L$ και ωμική αντίσταση $R_L$ συνδέεται σε σειρά με ωμική αντίσταση $R$=67 Ω και πηγή συνεχούς τάσης $V$=77 V. Όταν αποκατασταθεί μόνιμο ρεύμα στο κύκλωμα η τιμή του είναι $I$ =1 A.
Α) Πόση είναι η ωμική αντίσταση του πηνίου $R_L$ ?

Στη συνέχεια συνδέουμε την ίδια διάταξη σε πηγή εναλλασσόμενης τάσης συχνότητας $f$ = 50 Hz και ενεργού τιμής $V_{εν}$ = 323,3 V. Το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα έχει πάλι ενεργό τιμή $I_{εν}$ = 1 A.
Β) Πόση είναι η αυτεπαγωγή του πηνίου $L$ ?
Γ) Πόση είναι η διαφορά φάσης ρεύματος-τάσης στο κύκλωμα? Να κάνετε το φάσικο διάγραμμα τάσεων.

Στη συνέχεια, τη χρονική στιγμή $t$=0, συνδέουμε μόνο του το πηνίο σε πηγή συνεχούς τάσης με $V$ = 20 V.
Δ) Ποια είναι η σταθερά χρόνου του κυκλώματος ?
Ε) Ποια είναι η τιμή του ρεύματος τη χρονική στιγμή $t$ = 0,1 s. Δίνεται $e^{-1}$ = 0,368
ΣΤ) Δείξτε ότι η επαγωγική τάση του πηνίου είναι ίση με $\upsilon_L(t) = Ve^{-t/\tau}$ και υπολογίστε την για $t$ = 0,1 s

Ζ) Την ίδια χρονική στιγμή $t$ = 0,1 s, πόση ισχύ $P_{πηγ}$ παρέχει η πηγή, πόση ισχύς $P_R$ καταναλώνεται στην ωμική αντίσταση του πηνίου και πόση ισχύς $P_L$ αποθηκεύεται στο μαγνητικό του πεδίο? Να επιβεβαιώσετε τη διατήρηση της ενέργειας $P_{πηγ} = P_R + P_L$

**Λύση**

**Α)** $R_{ολ} = \dfrac{V}{I} = \dfrac{77}{1} = 77\ \Omega$

$R_{ολ} = R + R_L \Rightarrow R_L = R_{ολ} - R = 77 - 67 \Rightarrow \boxed{R_L = 10\ \Omega}$

**Β)** $\omega = 2\pi f = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 = 314\ \text{rad/s}$

$$Z = \frac{V_{εν}}{I_{εν}} = \frac{323{,}3}{1} = 323{,}3\ \Omega$$

$$X_L = L\omega$$

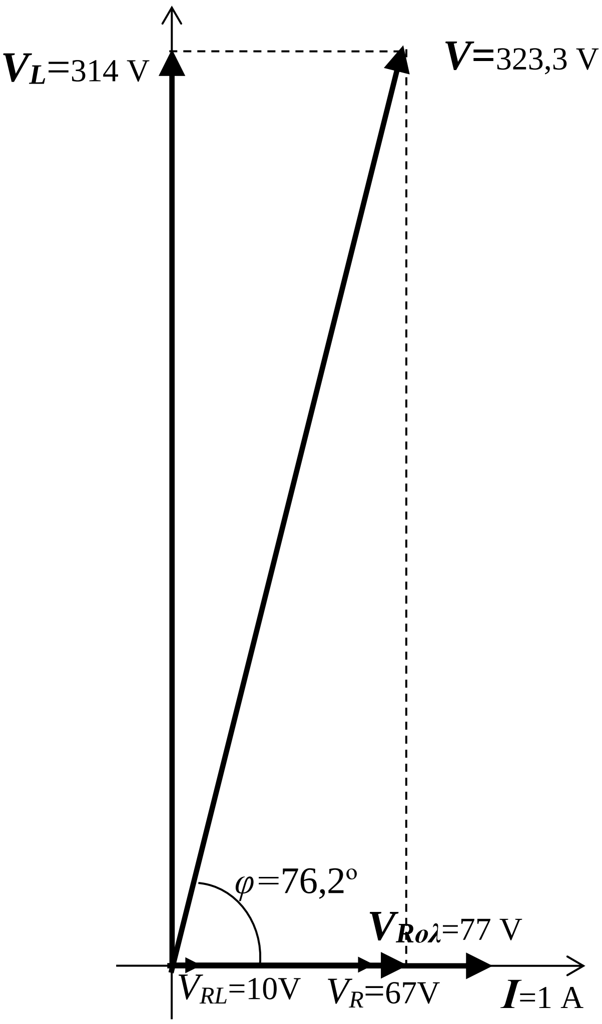
$$Z = \sqrt{R_{ολ}^2 + X_L^2} \Rightarrow X_L^2 = Z^2 - R_{ολ}^2 = 323{,}3^2 - 77^2 = 98593{,}89 \Rightarrow X_L = \sqrt{98593{,}89} = 313{,}996640 \Rightarrow X_L = 314\ \Omega$$

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{314}{314} \Rightarrow \boxed{L = 1\ \text{H}}$$

**Γ)** $\tan\varphi = \dfrac{X_L - X_C}{R_{ολ}} = \dfrac{314 - 0}{77} = 4{,}0779 \Rightarrow \boxed{\varphi = \tan^{-1}(4{,}0779) = 76{,}2^{\circ}}$

Οι ενεργές τιμές των τάσεων είναι :

$$V_{R_L} = I_{εν} R_L = 1 \cdot 10 = 10\ \text{V}$$
$$V_R = I_{εν} R = 1 \cdot 67 = 67\ \text{V}$$
$$V_{R_{ολ}} = V_{R_L} + V_{R_L} = 77\ \text{V}$$
$$V_L = I_{εν} X_L = 1 \cdot 314 = 314\ \text{V}$$




Δ) $\tau = \dfrac{L}{R_L} = \dfrac{1}{10} \Rightarrow \boxed{\tau = 0{,}1\ \text{s}}$

**Δ)** Το τελικό μόνιμο ρεύμα θα είναι

$$I = \frac{V}{R_L} = \frac{20}{10} = 2\ \text{A}$$

Κάθε χρονική στιγμή $t$ το ρεύμα $i$ του κυκλώματος δίνεται από τον τύπο $i(t) = I(1 - e^{-t/\tau})$, άρα για $t$=0,1s=$\tau$ έχουμε:

$$i(0{,}1) = 2 \cdot (1 - e^{-0{,}1/0{,}1}) = 2 \cdot (1 - e^{-1}) = 2 \cdot (1 - 0{,}368) = 2 \cdot 0{,}632 = 1{,}264\ \text{A}$$

**Ε)** Η επαγωγική τάση στο πηνίο δίνεται από τον τύπο (νόμος Faraday) : $\upsilon_L(t) = L\dfrac{di}{dt}$

Άρα πρέπει να υπολογίσουμε την παράγωγο του ρεύματος

$$\frac{di}{dt} = I\frac{d}{dt}(1 - e^{-t/\tau}) = I\left(-\frac{e^{-t/\tau}}{-\tau}\right) = \frac{I}{\tau}e^{-t/\tau} = \frac{V/R_L}{L/R_L}e^{-t/\tau} = \frac{V}{L}e^{-t/\tau}$$

Οπότε :

$$\upsilon_L(t) = L\frac{di}{dt} = L\frac{V}{L}e^{-t/\tau} \Rightarrow \boxed{\upsilon_L(t) = Ve^{-t/\tau}}$$

$$\upsilon_L(0{,}1) = 2 \cdot e^{-0{,}1/0{,}1} = 2 \cdot e^{-1} = 20 \cdot 0{,}368 = 7{,}36\ \text{V}$$

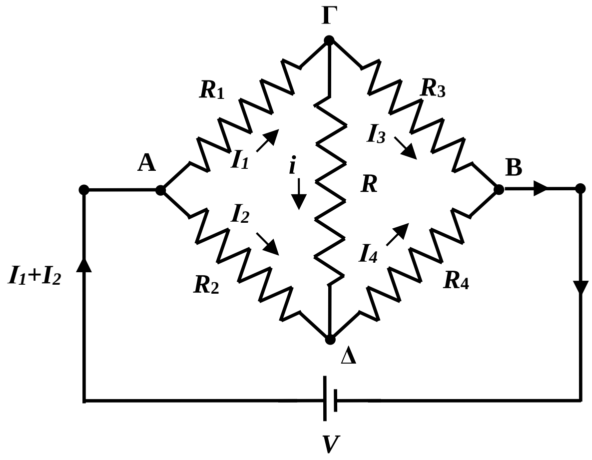
ΣΤ) $P_{\pi\eta\gamma}(t) = E \cdot i(t) = 20 \cdot 1{,}264 = 25{,}28$ W

$$P_R(t) = i^2(t) \cdot R_L = 1{,}264^2 \cdot 10 = 1{,}597696 \cdot 10 = 15{,}98\ \text{W}$$

$$P_L(t) = \upsilon_L(t) \cdot i(t) = 0{,}536 \cdot 1{,}264 = 9{,}30\ \text{W}$$

Πράγματι ισχύει $P_{πηγ} = P_R + P_L \Rightarrow 25,28 = 15,98 + 9,30$

**Θέμα 4ο**




Η παραπάνω συνδεσμολογία αντιστατών ονομάζεται γέφυρα Wheatstone. Η ισοδύναμη αντίστασή της μπορεί να βρεθεί με διάφορες μεθόδους και δίνεται από τον τύπο :

$$R_W = (R_1 + R_3) \| (R_2 + R_4) \cdot \frac{1 + \dfrac{R_1 \| R_3 + R_2 \| R_4}{R}}{1 + \dfrac{(R_1 + R_2) \| (R_3 + R_4)}{R}}$$

Α) Να υπολογίσετε την ισοδύναμη αντίσταση της γέφυρας από τον παραπάνω τύπο και το συνολικό ρεύμα $I$ που παρέχει η πηγή στο κύκλωμα για: $R_1 = 2\ \Omega,\ R_2 = 4\ \Omega,\ R_3 = 8\ \Omega,\ R_4 = 6\ \Omega,\ R = 1\ \Omega,\ V = 250$ V.

Β) Να υπολογίσετε τα ηλεκτρικά ρεύματα στους κλάδους του κυκλώματος και την πτώση τάσης $V_{ΓΔ}$ , με όποια μέθοδο θέλετε.

**Λύση**

**Α)** $(R_1 + R_3) \| (R_2 + R_4) = (2+8) \| (4+6) = \dfrac{10 \cdot 10}{10+10} = \dfrac{100}{20} = 5\ \Omega$

$$R_1 \| R_3 + R_2 \| R_4 = \frac{2 \cdot 8}{2+8} + \frac{4 \cdot 6}{4+6} = \frac{16}{10} + \frac{24}{10} = 4\ \Omega$$

$$(R_1 + R_2) \| (R_3 + R_4) = \frac{(2+4)\cdot(8+6)}{(2+4)+(8+6)} = \frac{84}{20} = 4,2\ \Omega$$

$$R_W = 5 \cdot \frac{1+4}{1+4,2} = 5\frac{5}{5,2} = 5\frac{50}{52} = \frac{250}{52}\ \Omega \Rightarrow\ R_W = 4,8077\ \Omega$$

$$I = \frac{V}{R_W} = \frac{250}{250/52} \Rightarrow \boxed{I = 52\ \text{A}}$$

Β) Με τη μέθοδο κομβικών τάσεων. Επιλέγουμε ως κόμβο αναφοράς τον Β ($V_{\text{Β}} = 0$). Τότε το δυναμικό στον κόμβο Α θα είναι $V_{\text{Α}} = 250$ V, ενώ τα δυναμικά των δύο άλλων κόμβων $V_Γ,\ \ V_Δ$ θα είναι οι άγνωστοι του προβλήματος . Με δεδομένα τα δυναμικά των κόμβων, τα ρεύματα των κλάδων από τον νόμο του Ohm, θα είναι :

$$I_1 = \frac{V_{ΑΓ}}{R_1} = \frac{V_Α - V_Γ}{R_1},\ \ I_2 = \frac{V_{ΑΔ}}{R_2} = \frac{V_Α - V_Δ}{R_2},\ \ I_3 = \frac{V_{ΓΒ}}{R_3} = \frac{V_Γ - V_Β}{R_3},\ \ I_4 = \frac{V_{ΔΒ}}{R_4} = \frac{V_Δ - V_Β}{R_4},\ \ i = \frac{V_Γ - V_Δ}{R}$$

Η εφαρμογή του κανόνα ρευμάτων του Kirchhoff στους κόμβους Γ και Δ θα μας δώσει δύο εξισώσεις από όπου θα βρούμε τους δύο αγνώστους:

Κόμβος Γ :

$$I_1 = i + I_3 \Rightarrow \frac{V_Α - V_Γ}{R_1} = \frac{V_Γ - V_Δ}{R} + \frac{V_Γ - V_Β}{R_3} \Rightarrow \frac{250 - V_Γ}{2} = \frac{V_Γ - V_Δ}{1} + \frac{V_Γ - 0}{8} \Rightarrow 1000 - 4V_Γ = 8V_Γ - 8V_Δ + V_Γ \Rightarrow$$

$$\boxed{13V_{\Gamma}-8V_{\Delta}=1000} \qquad (1)$$

Κόμβος Δ :

$$I_2+i=I_4 \Rightarrow \frac{V_{A}-V_{\Delta}}{R_2}+\frac{V_{\Gamma}-V_{\Delta}}{R}=\frac{V_{\Delta}-V_{B}}{R_4} \Rightarrow \frac{250-V_{\Delta}}{4}+\frac{V_{\Gamma}-V_{\Delta}}{1}=\frac{V_{\Delta}-0}{6} \Rightarrow 1500-6V_{\Delta}+24V_{\Gamma}-24V_{\Delta}=4V_{\Delta} \Rightarrow$$

$$\boxed{-24V_{\Gamma}+34V_{\Delta}=1500} \qquad (2)$$

Το σύστημα είναι 2x2 και λύνεται εύκολα. Λύνουμε την (1) ως προς $V_{\Delta}$ και αντικαθιστούμε στην (2)

$$(1): \ V_{\Delta}=\frac{13}{8}V_{\Gamma}-125$$

$$(1)\rightarrow(2): \ -24V_{\Gamma}+34\left(\frac{13}{8}V_{\Gamma}-125\right)=1500 \Rightarrow -24V_{\Gamma}+55,25V_{\Gamma}-4250=1500 \Rightarrow V_{\Gamma}=\frac{5750}{31,25}=184 \text{ V}$$

$$V_{\Delta}=\frac{13}{8}184-125=174 \text{ V}$$

Οπότε τα ρεύματα των κλάδων είναι

$$I_1=\frac{V_A-V_{\Gamma}}{R_1}=\frac{250-184}{2}=33 \text{ A}$$

$$I_2=\frac{250-174}{4}=19 \text{ A}$$

$$I_3=\frac{V_{\Gamma}-V_{B}}{R_3}=\frac{184-0}{8}=23 \text{ A}$$

$$I_4=\frac{V_{\Delta}-V_{B}}{R_4}=\frac{174-0}{6}=29 \text{ A}$$

$$i=\frac{V_{\Gamma}-V_{\Delta}}{R}=\frac{184-174}{1}=10 \text{ A}$$

Ελέγχουμε ότι πράγματι ισχύουν : $I_1=i+I_3=23+10=33$

$$I_4=I_2+i=19+10=29$$

Το συνολικό ρεύμα του κυκλώματος είναι :

$$I=I_1+I_2=33+19=52 \text{ A}$$

Η πτώση τάσης $V_{\Gamma\Delta}$ είναι :

$$V_{\Gamma\Delta}=V_{\Gamma}-V_{\Delta}=184-174=10 \text{ V}$$