

ΤΕΙ ΔΥΤ. ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ Τ.Ε.
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΧΕΙΜΕΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2018-19

ΜΑΘΗΜΑ: ΗΛΕΚΤΡΟΤΕΧΝΙΑ (Εξ. 3)

Δευτέρα, 21 Ιανουαρίου 2019

(Εισηγητής: Κώστας Φιλίππιδης - kphilippides@teiwm.gr)

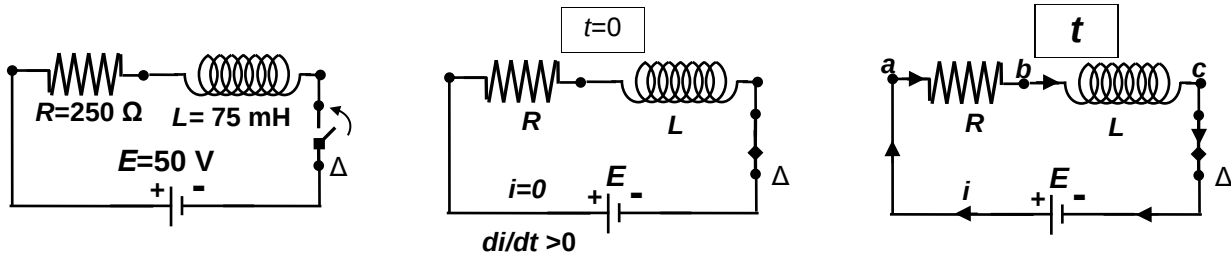
ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ Β

Διάρκεια εξέτασης: 2,5 ώρες

(Μονάδες 1,5)

Πρόβλημα 1

Ιδανικό πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής $L = 75 \text{ mH}$ συνδέεται με πηγή με $E = 50 \text{ V}$ μέσω αντίστασης $R = 250 \Omega$ σε σειρά. Την χρονική στιγμή $t=0$ κλείνουμε το διακόπτη Δ για να αναπτυχθεί ηλεκτρικό ρεύμα στο κύκλωμα.



1.1 Να γράψετε τη διαφορική εξίσωση (από τον 2^ο κανόνα Kirchhoff) που διέπει τη χρονική εξέλιξη του ηλεκτρικού ρεύματος $i(t)$ στο κύκλωμα.

1.2 Ποιο είναι το τελικό ηλεκτρικό ρεύμα I ?

1.3 Ποιος είναι ο αρχικός ($t=0$) ρυθμός αύξησης του ρεύματος di/dt ?

1.4 Υπολογίστε τη σταθερά χρόνου του κυκλώματος

1.5 Να γράψετε στο SI το ηλεκτρικό ρεύμα του κυκλώματος σαν συνάρτηση του χρόνου $i(t)$.

1.6 Τι κλάσμα ή ποσοστό του τελικού ηλεκτρικού ρεύματος I έχει επιτευχθεί μετά από χρόνο $t = 0,6 \text{ ms}$

1.7 Ποια είναι η τιμή του ρεύματος μετά από χρόνο $t = 1,5 \text{ ms}$

[Δίνονται $e^{-1} = 0,368$ $e^{-2} = 0,135$ $e^{-5} = 0,007$]

Λύση

1.1 2^{ος} κανόνας Kirchhoff, νόμος Ohm για αντιστάτες R , νόμος Faraday για πηνίο αυτεπαγωγής L ,

$$\text{Για τυχαίο } t: E = V_{ab} + V_{bc} \Rightarrow E = iR + L \frac{di}{dt} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{E}{L} - \frac{iR}{L} \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} \left(i - \frac{E}{R} \right) \Rightarrow \frac{di}{i - E/R} = -\frac{R}{L} dt \quad (2)$$

1.2 Όταν θα επιτευχθεί το τελικό ρεύμα I , τότε θα παραμένει σταθερό και δεν θα αλλάζει. Το ιδανικό πηνίο στο συνεχές ρεύμα δρα σαν βραχυκύκλωμα (ή αν δεν είναι ιδανικό σαν ωμικός αντιστάτης) Από την (1) παίρνουμε :

$$\text{Για } t \rightarrow \infty, \frac{di}{dt} = 0 : E = IR + L \cdot 0 \Rightarrow I = \frac{E}{R} \Rightarrow I = \frac{50 \text{ V}}{250 \Omega} \Rightarrow I = 0,2 \text{ A}$$

1.3 Αρχικά το ρεύμα στο κύκλωμα είναι μηδέν. Από την (1) παίρνουμε :

$$\text{Για } t=0, i=0 : E = 0 \cdot R + L \frac{di}{dt} \Big|_{t=0} \Rightarrow \frac{di}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{E}{L} \Rightarrow \frac{di}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{50 \text{ V}}{75 \cdot 10^{-3} \text{ H}} = \frac{2}{3} \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{H}} \Rightarrow$$

$$\frac{di}{dt} \Big|_{t=0} = 667 \frac{\text{A}}{\text{s}}$$

$$1.4 \tau = \frac{L}{R} = \frac{75 \cdot 10^{-3} \text{ H}}{250 \Omega} \Rightarrow \tau = 0,3 \text{ ms} \quad \frac{\text{H}}{\Omega} = \frac{\text{V} \cdot \text{s} / \text{A}}{\text{V} / \text{A}} = \frac{\text{V} \cdot \text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{A}} = \text{s}$$

Η σχέση του H με τις πιο οικείες μονάδες V , A , s , προκύπτει εύκολα από τον τύπο της επαγωγικής τάσης του

$$\text{πηνίου : } [V] = [L] \left[\frac{di}{dt} \right] \Rightarrow V = H \cdot A/s \Rightarrow H = \frac{V \cdot s}{A}$$

1.5 Ολοκληρώνουμε την (2) ή παίρνουμε τον τύπο από το βιβλίο

$$\int_0^i \frac{di'}{i' - E/R} = -\frac{R}{L} \int_0^t dt' \Rightarrow \ln(i - E/R) - \ln(-E/R) = -\frac{R}{L}t \Rightarrow \ln\left(\frac{i - E/R}{-E/R}\right) = -\frac{R}{L}t$$

$$\frac{i - E/R}{-E/R} = e^{-\frac{R}{L}t} \Rightarrow i - \frac{E}{R} = -\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t} \Rightarrow i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \Rightarrow i(t) = I\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \quad (3)$$

Αντικαθιστούμε τις αριθμητικές τιμές των I και L/R σε αμπέρ (A) και δευτερόλεπτα (s), που είναι οι μονάδες

των αντίστοιχων μεγεθών στο SI και παίρνουμε :

$$i(t) = 0,2 \left(1 - e^{-\frac{t}{0,0003}}\right) \quad (\text{SI}) \quad (4)$$

1.6 Για $t = 0,6 \text{ ms} = 2\tau$ παίρνουμε

$$i(0,6 \text{ ms}) = I \left(1 - e^{-\frac{0,0006}{0,0003}}\right) \Rightarrow \frac{i(0,6 \text{ ms})}{I} = 1 - e^{-2} = 1 - 0,135 \Rightarrow \frac{i(0,6 \text{ ms})}{I} = 0,865 = 86,5\%$$

$$i(0,6 \text{ ms}) = 0,865 \cdot I = 0,865 \cdot 0,2 = 0,173 \text{ A}$$

$$1.7 \quad i(1,5 \text{ ms}) = 0,2 \left(1 - e^{-\frac{0,0015}{0,0003}}\right) = 0,2(1 - e^{-5}) = 0,2(1 - 0,007) = 0,2 \cdot 0,993 \Rightarrow$$

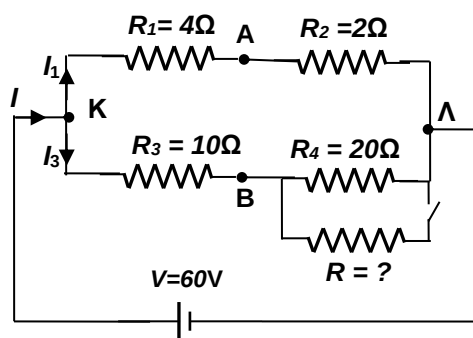
$$i(1,5 \text{ ms}) = 0,1986 \text{ A}$$

Πρόβλημα 2

(Μονάδες 3)

Να υπολογιστεί η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων A και B: $V_{AB} = V_A - V_B$

Τι αντίσταση R πρέπει να συνδέσουμε παράλληλα με την R_4 ώστε τα σημεία A και B να έχουν ίδιο δυναμικό $V_{AB} = V_A - V_B = 0$



Συνδυασμός αντιστάσεων:

$$R_{ολ} = (R_1 + R_2) \parallel (R_3 + R_4) = (4 + 2) \parallel (10 + 20) = 6 \parallel 30 = \frac{6 \cdot 30}{6 + 30} = \frac{180}{36} = 5 \Omega$$

Νόμος Ohm για την ολική αντίσταση του κυκλώματος $I = \frac{V}{R_{ολ}} = \frac{60}{5} = 12 \text{ A}$

Νόμος Ohm για την ολική αντίσταση του κλάδου ΚΑΛ: $I_1 = \frac{V}{R_1 + R_2} = \frac{60}{6} = 10 \text{ A}$

Διατήρηση ρεύματος στον κόμβο Κ (1ος κανόνας Kirchhoff): $I_3 = I - I_1 = 12 - 10 = 2 \text{ A}$

(Τα ίδια αποτελέσματα θα παίρναμε και από τους τύπους διαιρέτη ρεύματος)

Νόμος Ohm για την αντίσταση R_1 $V_{KA} = I_1 R_1 = 10 \cdot 4 = 40 \text{ V}$

2ος κανόνας Kirchhoff στον βρόχο ΚΑΛVK: $V = V_{KA} + V_{AL} \Rightarrow V_{AL} = V - V_{KA} = 60 - 40 = 20 \text{ V}$

(Τα ίδια αποτελέσματα θα παίρναμε και από τους τύπους διαιρέτη τάσης)

Όμοια για το βρόχο ΚΒΛVK $V_{KB} = I_3 R_3 = 2 \cdot 10 = 20 \text{ V}$ $V_{BL} = V - V_{KB} = 60 - 20 = 40 \text{ V}$

Βλέπουμε ότι η τάση στον πάνω κλάδο έχει μοιραστεί σε 40 και 20 ενώ στον κάτω κλάδο σε 20 και 40. Γι αυτό τα σημεία A και B θα έχουν διαφορετικό δυναμικό καθώς οι πτώσεις τάσης από το σημείο Κ προς αυτά είναι διαφορετικές.

$$V_{AB} = V_A - V_B = V_A - V_{AL} - V_{BL} + V_{BL} = V_A - V_{AL} - (V_B - V_{BL}) = V_{AL} - V_{BL} = 20 - 40 = -20 \text{ V}$$

Για να έχουν τα δύο σημεία το ίδιο δυναμικό θα πρέπει η τάση να διαιρεθεί με τον ίδιο τρόπο και στον κάτω κλάδο ΚΒΛ ΚΒΛΝΚ $V = V'_{KB} + V'_{BL} = 40 + 20$

Για να γίνει αυτό πρέπει οι λόγοι των αντιστάσεων των δυο κλάδων να είναι ίσοι

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_{ισοδ}}{R_3} \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{R_4 \parallel R}{R_3} \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{\frac{20R}{20+R}}{10} \Rightarrow \frac{20R}{20+R} = 5 \Rightarrow$$

$$20R = 100 + 5R \Rightarrow 15R = 100 \Rightarrow 3R = 20 \Rightarrow R = \frac{20}{3} \Omega$$

Πράγματι, αν συνδέσουμε μια τέτοια αντίσταση R , παράλληλα με την R_4 η ισοδύναμη αντίστασή τους γίνεται

$$R_{ισοδ} = \frac{RR_4}{R+R_4} = \frac{20 \cdot \frac{20}{3}}{20 + \frac{20}{3}} = \frac{\frac{20}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{20}{3}}{\frac{4}{3}} = 5 \Omega$$

που είναι η μισή της R_3 όπως και η R_2 είναι η μισή της R_1 .

Επαλήθευση από τύπο διαιρέτη τάσης

$$V'_{BL} = \frac{R_{ισοδ}}{R_2 + R_{ισοδ}} V = \frac{5}{10 + 5} 60 = 20 \text{ V}$$

$$V_{AB} = V_{AL} - V'_{BL} = 20 - 20 = 0 \text{ V}$$

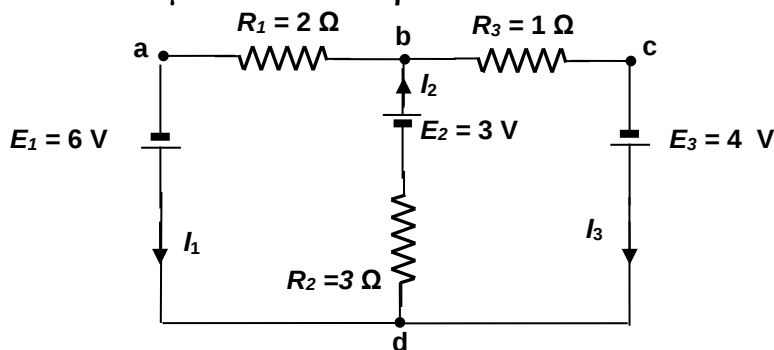
Πρόβλημα 3

(Μονάδες 1,5)

Να χρησιμοποιήσετε τους κανόνες του Kirchhoff για να βρείτε το σύστημα 3x3

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

που ικανοποιούν τα ρεύματα του παρακάτω κυκλώματος. **Να μην λύσετε το κύκλωμα και να μην βρείτε τα ρεύματα ούτε έτσι ούτε με κάποιον άλλο τρόπο!**

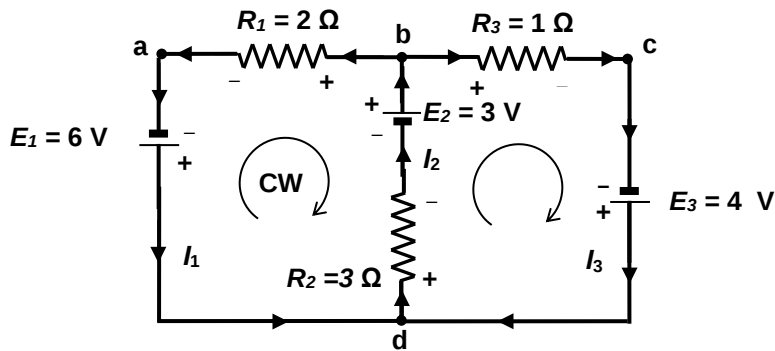


Λύση

1) Καθορίζουμε τη φορά των ρευμάτων των κλάδων (είναι καθορισμένη από την εκφώνηση). Τα βάζουμε να βγαίνουν από του θετικούς πόλους των πηγών. Η μεγαλύτερη ΗΕΔ υπερνικά τη μικρότερη. Δεν έχει σημασία και να τα βάλουμε τυχαία (απλά στη λύση μπορεί να βγουν πολλά με αρνητικό πρόσημο)

2) Αναγράφουμε όλες τις πολικότητες των στοιχείων του κυκλώματος. Δηλαδή σημειώνουμε μείον (−) στο άκρο που βρίσκεται στο χαμηλότερο δυναμικό και συν (+) στο άκρο που βρίσκεται στο υψηλότερο. Για τους αντιστάτες αυτό το βρίσκουμε από τη φορά του ρεύματος που έχουμε καθορίσει. Το ρεύμα ρέει από υψηλότερο σε χαμηλότερο δυναμικό (αν στη λύση του συστήματος βρούμε αρνητική τιμή για κάποιο ρεύμα αυτό σημαίνει ότι το ρεύμα ρέει στην πραγματικότητα αντίθετα από τη φορά που καθορίσαμε στο σχήμα). Έτσι ανάλογα με το πώς διατρέχουμε ένα στοιχείο θα γνωρίζουμε αν συναντάμε πτώση δυναμικού (από + σε −) ή αν συναντάμε ανύψωση δυναμικού (από − σε +).

3) Καθορίζουμε τη φορά που θα διατρέχουμε τους βρόχους για τον 2° κανόνα του Kirchhoff. Είτε κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού (clockwise: CW, δηλαδή όπως λυγίζουν τα δάκτυλα του αριστερού χεριού αν το τοποθετήσουμε πάνω στη σελίδα) είτε αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού (counter clockwise: CCW, δηλαδή όπως λυγίζουν τα δάκτυλα του δεξιού χεριού αν το τοποθετήσουμε πάνω στη σελίδα). Η φορά που θα επιλέξουμε δεν έχει σημασία αλλά πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την ίδια σε όλους τους βρόχους.



Το κύκλωμα έχει 2 κόμβους τους b και d και 3 βρόχους τους abda, bcd b και abcda

Παίρνουμε μια ανεξάρτητη εξίσωση από τους κόμβους και δύο από τους βρόχους για να λύσουμε για τα ρεύματα των κλάδων που είναι οι τρεις άγνωστοι I_1 , I_2 και I_3 .

Κόμβος d:

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0 \quad (1)$$

Βρόχος abda: με τη φορά που επιλέξαμε (CW) οι διαφορές δυναμικού και στις δύο αντιστάσεις είναι ανυψώσεις δυναμικού ενώ στις πηγές είναι πτώσεις.

$$I_1 R_1 - E_2 + I_2 R_2 - E_1 = 0 \Rightarrow 2I_1 - 3 + 3I_2 - 6 = 0 \Rightarrow 2 \cdot I_1 + 3 \cdot I_2 + 0 \cdot I_3 = 9 \quad (2)$$

Βρόχος bcd b:

$$-I_3 R_3 + E_3 - I_2 R_2 + E_2 = 0 \Rightarrow -I_3 + 4 - 3I_2 + 3 = 0 \Rightarrow 0 \cdot I_1 + 3 \cdot I_2 + 1 \cdot I_3 = 7 \quad (3)$$

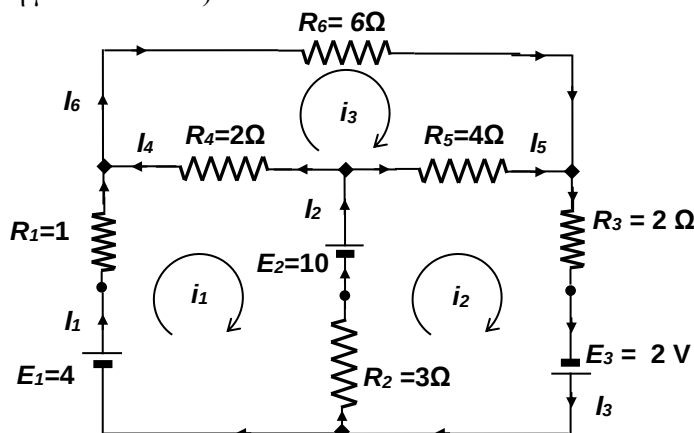
Γράφουμε τις εξισώσεις μαζί, τη μια κάτω από την άλλη και διαβάζουμε τους συντελεστές του πίνακα

$$\left. \begin{array}{l} 1 \cdot I_1 - 1 \cdot I_2 + 1 \cdot I_3 = 0 \\ 2 \cdot I_1 + 3 \cdot I_2 + 0 \cdot I_3 = 9 \\ 0 \cdot I_1 + 3 \cdot I_2 + 1 \cdot I_3 = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Πρόβλημα 4

(Μονάδες 4)

Να επιλύσετε το παρακάτω κύκλωμα με τη μέθοδο των ρευμάτων ελαχίστων βρόχων (οφθαλμών) για να βρείτε τα ρεύματα I_1 , I_2 , I_3 , I_4 , I_5 , I_6 , που διατρέχουν τους κλάδους του κυκλώματος. (Μπορείτε να το επιλύσετε και με όποια άλλη μέθοδο θέλετε).



Λύση

Ο 1^{ος} κανόνας του Kirchhoff (κόμβων) λαμβάνεται υπόψη συνδέοντας τα ρεύματα των κλάδων με τα ρεύματα των ελαχίστων βρόχων: $I_1 = i_1$ $I_2 = i_2 - i_1$ $I_3 = i_2$ $I_4 = i_3 - i_1$ $I_5 = i_2 - i_3$ $I_6 = i_3$

Αν εφαρμόσουμε το 2^ο κανόνα του Kirchhoff στους τρεις ελάχιστους βρόχους θα καταλήξουμε σε ένα σύστημα 3x3 για τα ρεύματα των ελαχίστων βρόχων.

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

Όμως μπορούμε κατευθείαν να κατασκευάσουμε το σύστημα με την παρακάτω συνταγή.

Διαγώνια στοιχεία του πίνακα

Ολική αντίσταση βρόχου 1

$$R_{11} = R_1 + R_2 + R_3 = 1 + 2 + 3 = 6$$

Ολική αντίσταση βρόχου 2

$$R_{22} = R_2 + R_3 + R_5 = 3 + 2 + 4 = 9$$

Ολική αντίσταση βρόχου 3

$$R_{33} = R_4 + R_5 + R_6 = 2 + 4 + 6 = 12$$

Μη διαγώνια στοιχεία του πίνακα

Ολική αντίσταση κοινού κλάδου 1-2 (τα ρεύματα ρέουν αντίρροπα άρα βάζουμε μείον)

$$R_{12} = R_{21} = -R_2 = -3$$

Ολική αντίσταση κοινού κλάδου 1-3 (τα ρεύματα ρέουν αντίρροπα άρα βάζουμε μείον)

$$R_{13} = R_{31} = -R_4 = -2$$

Ολική αντίσταση κοινού κλάδου 2-3 (τα ρεύματα ρέουν αντίρροπα άρα βάζουμε μείον)

$$R_{23} = R_{32} = -R_5 = -4$$

Διάνυσμα σταθερών

Ολική ΗΕΔ βρόχου 1

$$\varepsilon_1 = E_1 - E_2 = 4 - 10 = -6$$

Ολική ΗΕΔ βρόχου 2

$$\varepsilon_2 = E_2 + E_3 = 10 + 2 = 12$$

Ολική ΗΕΔ βρόχου 3

$$\varepsilon_3 = 0$$

Οπότε το σύστημα είναι :

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -3 & 9 & -4 \\ -2 & -4 & 12 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Και η λύση του είναι :

$$D = \begin{vmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -3 & 9 & -4 \\ -2 & -4 & 12 \end{vmatrix} = 6 \cdot 9 \cdot 12 + (-3)(-4)(-2) + (-2)(-3)(-4) - (-2)9(-2) - (-4)(-4)6 - 12(-3)(-3) = 360$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -6 & -3 & -2 \\ 12 & 9 & -4 \\ 0 & -4 & 12 \end{vmatrix} = (-6) \cdot 9 \cdot 12 + (-3)(-4)0 + (-2)12(-4) - (-2) \cdot 9 \cdot 0 - (-4)(-4)(-6) - 12(-3)12 = -24$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 6 & -6 & -2 \\ -3 & 12 & -4 \\ -2 & 0 & 12 \end{vmatrix} = \dots = 550$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 6 & -3 & -6 \\ -3 & 9 & 12 \\ -2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 6 \cdot 9 \cdot 0 + (-3)12(-2) + (-6)(-3)(-4) - (-6) \cdot 9(-2) - 12(-4)6 - 0(-3)(-3) = 180$$

Οπότε τα ρεύματα των ελαχίστων βρόχων είναι :

$$i_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-24}{360} = -0,067 \text{ A} \quad i_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{550}{360} = 1,533 \text{ A} \quad i_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{180}{360} = 0,500 \text{ A}$$

Από αυτά βρίσκουμε τα ρεύματα των κλάδων:

$$I_1 = i_1 = -0,067 \text{ A}$$

$$I_2 = i_2 - i_1 = 1,533 - (-0,067) = 1,6 \text{ A}$$

$$I_3 = i_2 = 1,533 \text{ A}$$

$$I_4 = i_3 - i_1 = 0,500 - (-0,067) = 0,567 \text{ A}$$

$$I_5 = i_2 - i_3 = 1,533 - 0,500 = 1,033 \text{ A}$$

$$I_6 = i_3 = 0,500 \text{ A}$$

Η πραγματική φορά του ρεύματος I_1 είναι αντίθετη από το σχήμα. Αυτό σημαίνει ότι η πηγή E_1 καταναλώνει και δεν προσφέρει ενέργεια στο κύκλωμα.