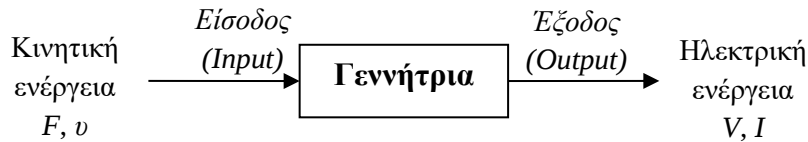


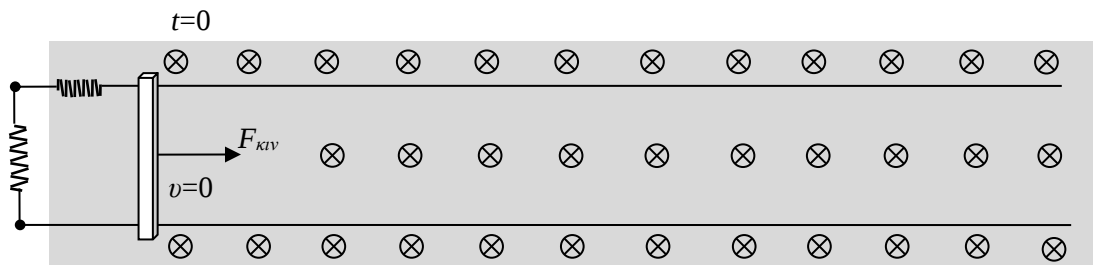
Η ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΓΕΝΝΗΤΡΙΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΡΕΥΜΑΤΟΣ



Αφαιρούμε την πηγή από την προηγούμενη διάταξη και προσθέτουμε ένα ωμικό φορτίο στους ακροδέκτες της.

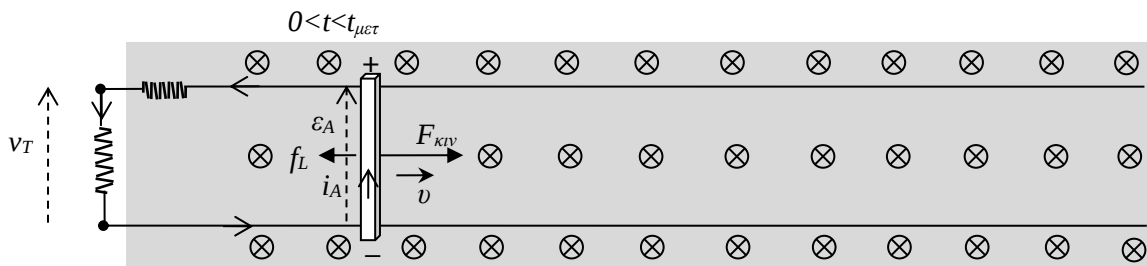


Τη χρονική στιγμή $t=0$ εφαρμόζουμε μια εξωτερική κινητήρια δύναμη $F_{κιν}$ στη ράβδο.



Η δύναμη επιταχύνει τη ράβδο, άρα της προκαλεί κίνηση δίνοντάς της ταχύτητα.

$$\sum F = ma \Rightarrow a = \frac{F_{κιν}}{m} \Rightarrow v \uparrow$$



Η κινούμενη αγώγιμη ράβδος θα εμφανίσει επαγωγική τάση στα άκρα της

$$\varepsilon_A = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{\ell} = Bv\ell \uparrow \quad (\text{φαινόμενο γεννήτριας})$$

και άρα θα αρχίσει να διαρρέεται από ρεύμα

$$i_A = \frac{\varepsilon_A}{R} \uparrow, \text{ όπου } R = R_A + R_L \text{ η ολική αντίσταση}$$

Η ρευματοφόρος πλέον ράβδος θα δεχτεί δύναμη Laplace από το μαγνητικό πεδίο, αντίθετη από την $F_{κιν}$, που θα ελαττώσει την αρχική της επιτάχυνση.

$$\vec{f}_L = i_A \vec{\ell} \times \vec{B}$$

Το διάνυσμα $\vec{\ell}$ είναι προς τη φορά του ρεύματος, άρα το $\vec{\ell} \times \vec{B}$ έχει φορά προς τα πίσω σε συμφωνία με τον κανόνα του Lenz (το επαγωγικό αποτέλεσμα αντιτίθεται στην αιτία που το προκάλεσε που είναι η δύναμη $F_{κιν}$)

Επειδή τα δύο διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους, το μέτρο της δύναμης Laplace είναι

$$f_L = Bi_A \ell = B \ell \frac{\varepsilon_A}{R} = \frac{B^2 \ell^2}{R} \cdot v \uparrow \quad (\text{φαινόμενο κινητήρα})$$

Όσο η κινητήρια εξωτερική δύναμη παραμένει μεγαλύτερη από την επαγόμενη δύναμη Laplace η ράβδος θα επιταχύνεται με διαρκώς μειούμενη επιτάχυνση, αφού η δύναμη Laplace αυξάνεται ανάλογα με την ταχύτητα.

$$\sum F = ma \Rightarrow a = \frac{F_{\kappa\iota\nu} - f_L}{m} \Rightarrow a = \frac{F_{\kappa\iota\nu}}{m} - \frac{B^2 \ell^2}{mR} \cdot v$$

Η επιτάχυνση θα μηδενιστεί και η ράβδος θα διατηρεί σταθερή ταχύτητα όταν οι δύο δυνάμεις αποκτήσουν ίσο μέτρο. Τότε η τελική επαγωγική τάση E_A και το τελικό ρεύμα I_A που θα διαρρέει τη ράβδο θα είναι:

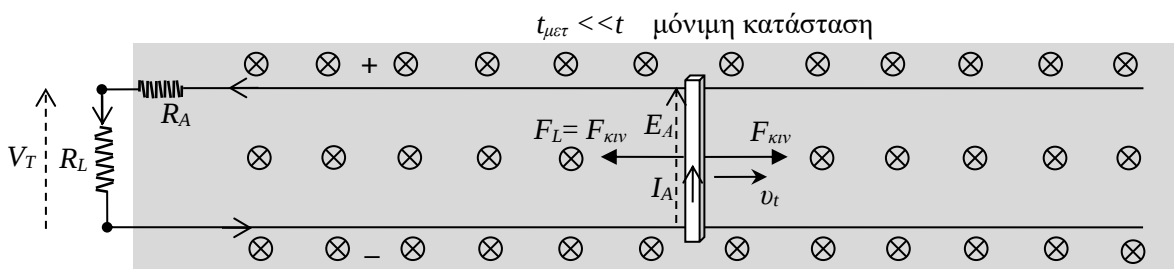
$$\sum F = 0 \Rightarrow F_{\kappa\iota\nu} = F_L \Rightarrow F_{\kappa\iota\nu} = Bi_A \ell \Rightarrow I_A = \frac{F_{\kappa\iota\nu}}{B \ell} = \frac{E_A}{R} \Rightarrow E_A = \frac{F_{\kappa\iota\nu} R}{B \ell}$$

ενώ η τερματική της ταχύτητα θα είναι

$$\sum F = 0 \Rightarrow F_{\kappa\iota\nu} = F_L \Rightarrow F_{\kappa\iota\nu} = \frac{B^2 \ell^2}{R} \cdot v_t \Rightarrow v_t = \frac{F_{\kappa\iota\nu} R}{B^2 \ell^2} = \frac{E_A}{B \ell}$$

Η τερματική τάση που θα δίνει η γεννήτρια στους ακροδέκτες της είναι:

$$V_T = E_A - I_A R_A = \frac{F_{\kappa\iota\nu} R}{B \ell} - \frac{F_{\kappa\iota\nu}}{B \ell} R_A = \frac{F_{\kappa\iota\nu} R_L}{B \ell} = I_A R_L = \frac{R_L}{R} E_A$$



Ολοκληρώνοντας την εξίσωση του Νεύτωνα όπως και πριν βρίσκουμε τη χρονική εξάρτηση των διαφόρων φυσικών μεγεθών

$$\sum F = ma \Rightarrow F_{\kappa\iota\nu} - f_L = ma \Rightarrow F_{\kappa\iota\nu} - \frac{B^2 \ell^2}{R} \cdot v = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{B^2 \ell^2}{mR} \left(\frac{F_{\kappa\iota\nu} R}{B^2 \ell^2} - v \right) \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{v_t - v} = \frac{dt}{\tau} \Rightarrow \int_0^v \frac{dv}{v_t - v} = \int_0^t \frac{dt}{\tau} \Rightarrow - \int_{v_t}^v \frac{dx}{x} = \frac{1}{\tau} \int_0^t dt \Rightarrow \dots \Rightarrow \boxed{v(t) = v_t (1 - e^{-t/\tau})}$$

$$\text{όπου } v_t = \frac{F_{\kappa\iota\nu} R}{B^2 \ell^2} \text{ και } \tau = \frac{mR}{B^2 \ell^2}$$

$$\varepsilon(t) = B v(t) \ell = B \ell v_t (1 - e^{-t/\tau}) \Rightarrow \boxed{\varepsilon_A(t) = E_A (1 - e^{-t/\tau})}$$

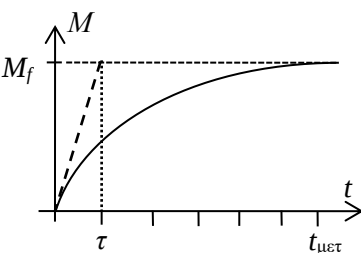
$$i_A(t) = \frac{E(t)}{R} = \frac{E_f}{R} (1 - e^{-t/\tau}) \Rightarrow \boxed{i_A(t) = I_A (1 - e^{-t/\tau})}$$

$$V_T(t) = i_A(t) R_L \Rightarrow \boxed{v_T(t) = E_A \frac{R_L}{R} (1 - e^{-t/\tau})}$$

$$f_L(t) = Bi_A(t)\ell = \boxed{f_L(t) = F_{\kappa\iota\nu} \left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

Παρατηρούμε ότι η σταθερά χρόνου της γεννήτριας $\tau = \frac{m(R_A + R_L)}{B^2 \ell^2}$, είναι μεγαλύτερη από τη σταθερά χρόνου του κινητήρα $\tau = \frac{mR_A}{B^2 \ell^2}$, κατά την αντίσταση του φορτίου R_L στον αριθμητή (εκτός αν δεν υπάρχει R_L , δηλαδή η γεννήτρια έχει τα άκρα της βραχυκυκλωμένα οπότε $R_L=0$ και $R_{ολ}=R_A$). Στη λειτουργία της γεννήτριας η μηχανή θα χρειαστεί μεγαλύτερο χρονικό διάστημα για να μεταβεί στην κατάσταση ισορροπίας.

Στην περίπτωση της γεννήτριας όλα τα μεγέθη ξεκινούν από μηδενική τιμή και καταλήγουν εκθετικά στην τελική τους τιμή. Έτσι όλες οι γραφικές παραστάσεις της χρονικής εξάρτησης των μεγεθών $M = v, \varepsilon_A, i_A, v_T, f_L$ θα ακολουθούν συνάρτηση εκθετικής ανάπτυξης, δηλαδή θα είναι της μορφής:

$$M(t) = M_f \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$


$$\left. \frac{dM(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{M_f}{\tau}$$

Στη μόνιμη κατάσταση παρέχεται σταθερά μηχανική ισχύς από την κινητήρια δύναμη που είναι ίση με:

$$P_{in} = F_{\kappa\iota\nu} v_t = \frac{F_{\kappa\iota\nu}^2 R}{B^2 \ell^2}$$

Αγνοώντας τις μηχανικές απώλειες (τριβή, αντίσταση αέρα) αυτή μετατρέπεται αρχικά σε ηλεκτρική ισχύ μέσω της επαγωγικής τάσης που αναπτύσσεται:

$$P_{αναπτ} = E_A I_A = B v_t \ell \frac{B v_t \ell}{R} = \frac{B^2 \ell^2}{R} v_t^2 = \frac{B^2 \ell^2}{R} \frac{F_{\kappa\iota\nu}^2 R^2}{B^4 \ell^4} = \frac{F_{\kappa\iota\nu}^2 R}{B^2 \ell^2}$$

Η ηλεκτρική ισχύς που αναπτύσσεται, καταναλώνεται τελικά στις ωμικές αντιστάσεις μετατρεπόμενη σε θερμότητα.

Η ισχύς που καταναλώνεται στην αντίσταση του οπλισμού R_A θεωρείται απώλεια (καταναλώνεται μέσα στη μηχανή)

$$P_{απωλ}(t) = I_A^2 R_A = \frac{B^2 v_t^2 \ell^2}{R^2} R_A = \frac{F_{\kappa\iota\nu}^2}{B^2 \ell^2} R_A$$

Η εξερχόμενη, ωφέλιμη ισχύς είναι αυτή που καταναλώνεται στο ωμικό φορτίο R_L :

$$P_{out}(t) = I_A^2 R_L = \frac{B^2 v_t^2 \ell^2}{R^2} R_L = \frac{F_{\kappa\iota\nu}^2}{B^2 \ell^2} R_L$$

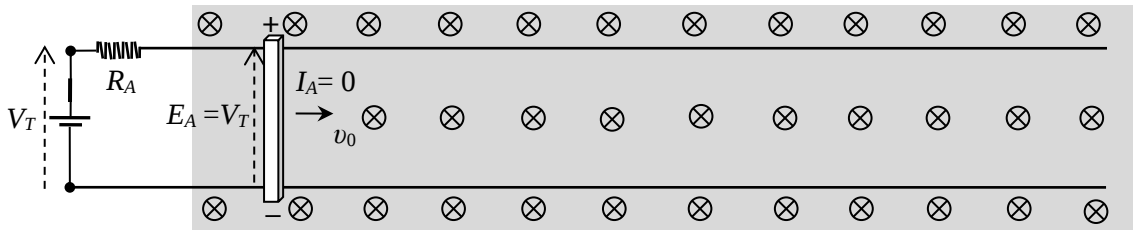
Παρατηρούμε ότι ισχύει η αρχή διατήρησης της ενέργειας, δηλαδή: $P_{in} = P_{out} + P_{απωλ}$.

Ο συντελεστής απόδοσης της μηχανής ορίζεται ως :

$$\eta\% = \frac{P_{out}}{P_{in}} 100\% \Rightarrow \eta\% = \frac{R_L}{R_L + R_A} 100\%$$

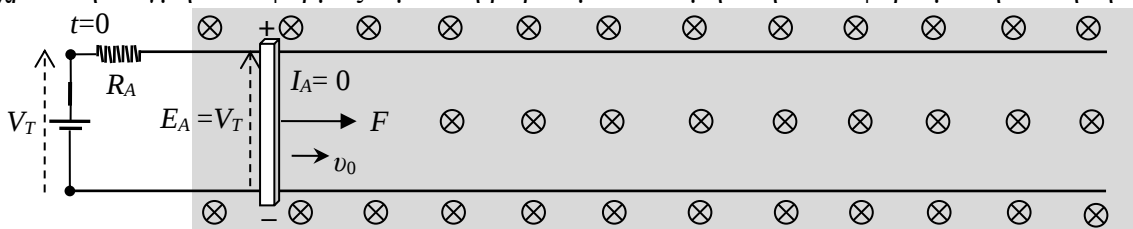
ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΔΥΝΑΜΗΣ (ΦΟΡΤΙΟΥ) ΣΕ ΜΗΧΑΝΗ ΣΕ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ.

Έστω η μηχανή (κινητήρας) του προηγούμενου παραδείγματος με $V_T = 100 \text{ V}$, $B = 0,5 \text{ T}$, $R_A = 0,5 \Omega$, $\ell = 2 \text{ m}$, $m = 1 \text{ kg}$, σε ισορροπία, να κινείται με ταχύτητα $v_0 = \frac{V_T}{B\ell} = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ που είναι η τερματική ταχύτητα της ισορροπίας χωρίς φορτίο.



Δύναμη στην ίδια φορά με την κίνηση

Τη χρονική στιγμή $t=0$ εφαρμόζουμε στη ράβδο μια δύναμη στην ίδια φορά με την κίνησή της



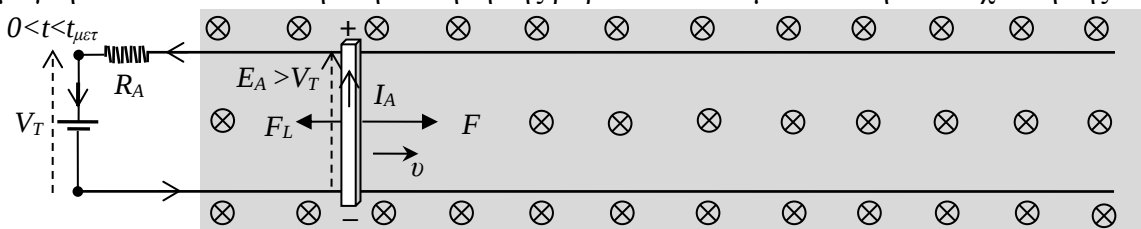
Η δύναμη θα επιταχύνει τη ράβδο σε μεγαλύτερη ταχύτητα λόγω της επιτάχυνσης που θα προκαλέσει

$$\sum F = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m} > 0 \Rightarrow v \uparrow .$$

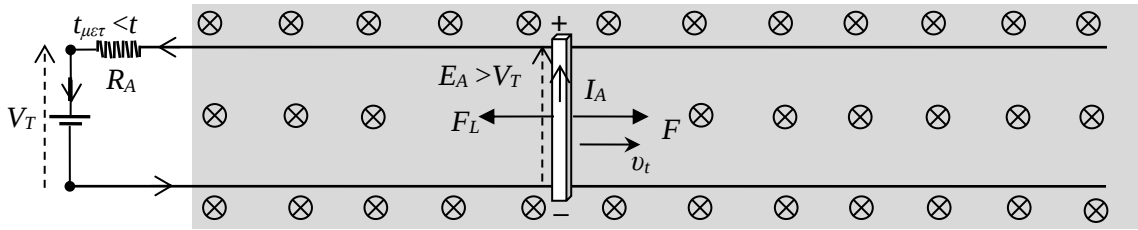
Ανάλογα θα αυξηθεί και η επαγωγική τάση $E_A = Bv\ell \uparrow$, η οποία πλέον θα γίνει μεγαλύτερη από την τερματική τάση $E_A > V_T$ και άρα θα αρχίσει η ράβδος να διαρρέεται από ρεύμα το οποίο θα αυξάνει όσο θα αυξάνεται η ταχύτητα της ράβδου

$$E_A = I_A R_A + V_T \Rightarrow I_A = \frac{E_A - V_T}{R_A}$$

Το ρεύμα θα έχει αντίθετη φορά από την πολικότητα της μπαταρίας – πηγής V_T και η μπαταρία πλέον θα καταναλώνει ενέργεια και θα φορτίζεται. Το ρεύμα αυτό θα προκαλέσει αυξανόμενη δύναμη Laplace από το μαγνητικό πεδίο αντίθετη στην κίνηση της ράβδου που θα μειώσει την επιτάχυνσή της.



Η ράβδος θα κινείται με μεταβλητή και διαρκώς μειούμενη επιτάχυνση μέχρι η επιτάχυνση να μηδενιστεί όταν η δύναμη Laplace γίνει ίση με τη δύναμη F . Αφού ολοκληρωθεί αυτό το μεταβατικό φαινόμενο η ράβδος θα ισορροπήσει σε νέα, **σταθερή αλλά μεγαλύτερη τερματική ταχύτητα**. Στη νέα ισορροπία με φορτίο η ράβδος θα διαρρέεται από ρεύμα και η επαγωγική της τάση θα είναι μεγαλύτερη από την τερματική της μπαταρίας. **Η μηχανή θα λειτουργεί ως γεννήτρια παρέχοντας ηλεκτρικό ρεύμα** (σε τερματική τάση V_T).



Η νέα ταχύτητα της μηχανής θα βρεθεί από την εξίσωση των δυνάμεων

$$F_L = F \Rightarrow BI_A \ell = F \Rightarrow B \ell \frac{E_A - V_T}{R_A} = F \Rightarrow B v_t \ell - V_T = \frac{F R_A}{B \ell} \Rightarrow v_t = \frac{V_T}{B \ell} + \frac{F R_A}{B^2 \ell^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{v_t = v_0 + \frac{F R_A}{B^2 \ell^2}}$$

Η τελική επαγωγική τάση στη νέα κατάσταση ισορροπίας θα είναι :

$$E_A = B v_t \ell \Rightarrow E_A = B \ell \left(\frac{V_T}{B \ell} + \frac{F R_A}{B^2 \ell^2} \right) \Rightarrow \boxed{E_A = V_T + \frac{F R_A}{B \ell}}$$

Το τελικό ρεύμα οπλισμού στην ισορροπία θα είναι :

$$I_A = \frac{E_A - V_T}{R_A} \Rightarrow \boxed{I_A = \frac{F}{B \ell}}$$

Η χρονική εξέλιξη του μεταβατικού φαινομένου βρίσκεται από την εξίσωση του Νεύτωνα

$$-F_L = -BI_A \ell = -B \ell \frac{E_A - V_T}{R_A} = -B \ell \frac{B v_t \ell - V_T}{R_A} = \frac{V_T B \ell}{R_A} - \frac{B^2 \ell^2}{R_A} v$$

$$\sum F = ma \Rightarrow F - F_L = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{F}{m} + \frac{V_T B \ell}{R_A} - \frac{B^2 \ell^2}{R_A} v = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{B^2 \ell^2}{m R_A} \left(\frac{F R_A}{B^2 \ell^2} + \frac{V_T}{B \ell} - v \right) = \frac{dv}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\tau} (v_t - v) = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{dv}{v_t - v} = \frac{dt}{\tau}} \quad \text{με } \tau = \frac{m R_A}{B^2 \ell^2} \quad \text{και } v_t = \frac{V_T}{B \ell} + \frac{F R_A}{B^2 \ell^2}$$

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v_t - v} = \int_0^t \frac{dt}{\tau} \Rightarrow - \int_{v_t - v_0}^{v_t - v} \frac{dx}{x} = \frac{1}{\tau} \int_0^t dt \Rightarrow \ln x \Big|_{v_t - v_0}^{v_t - v} = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow \ln(v_t - v) - \ln(v_t - v_0) = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow$$

$$\ln \left(\frac{v_t - v}{v_t - v_0} \right) = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow \frac{v_t - v}{v_t - v_0} = e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow v_t - v = (v_t - v_0) e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow$$

$$\boxed{v(t) = v_t + (v_0 - v_t) e^{-t/\tau}} \quad \text{ή} \quad \boxed{v(t) = v_0 + (v_t - v_0)(1 - e^{-t/\tau})}$$

$$v_t - v_0 = \frac{V_T}{B \ell} + \frac{F R_A}{B^2 \ell^2} - \frac{V_T}{B \ell} = \frac{F R_A}{B^2 \ell^2}$$

$$E_A(t) = B v(t) \ell = B \ell [v_0 + (v_t - v_0)(1 - e^{-t/\tau})] = B \ell \left(\frac{V_T}{B \ell} + \frac{F R_A}{B^2 \ell^2} (1 - e^{-t/\tau}) \right) =$$

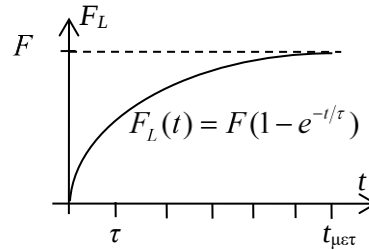
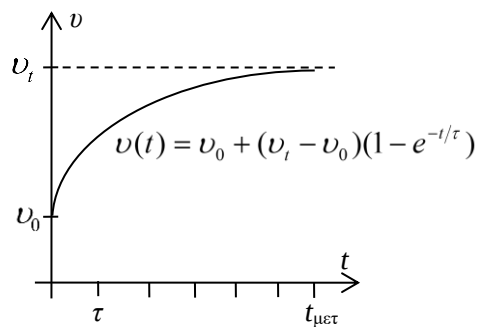
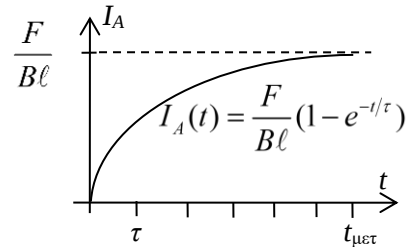
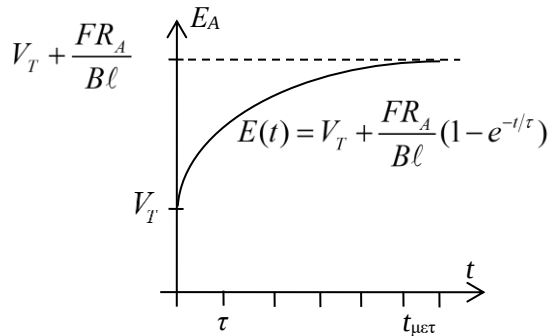
$$\boxed{E_A(t) = V_T + \frac{F R_A}{B \ell} (1 - e^{-t/\tau})}$$

$$E_{A0} \equiv E(t=0) = B v_0 \ell = V_T$$

$$E_A \equiv E_A(t \rightarrow \infty) = B v_t \ell = V_T + \frac{F R_A}{B \ell}$$

$$I_A(t) = \frac{E_A(t) - V_T}{R_A} = \frac{1}{R_A} \left(V_T + \frac{FR_A}{B\ell} (1 - e^{-t/\tau}) - V_T \right) \Rightarrow \boxed{I_A(t) = \frac{F}{B\ell} (1 - e^{-t/\tau})}$$

$$F_L(t) = BI_A(t)\ell = B\ell \frac{F}{B\ell} (1 - e^{-t/\tau}) \Rightarrow \boxed{F_L(t) = F(1 - e^{-t/\tau})}$$



Στην ισορροπία (μόνιμη κατάσταση) δίνεται στη ράβδο μηχανική ισχύς

$$P_{in} = Fv_t = \frac{FV_T}{B\ell} + \frac{F^2 R_A}{B^2 \ell^2} = \frac{FV_T}{B\ell} + \frac{FB\ell I_A R_A}{B^2 \ell^2} = \frac{FV_T}{B\ell} + \frac{FI_A R_A}{B\ell}$$

Αυτή μετατρέπεται επαγωγικά σε ηλεκτρική (αγνοούμε μηχανικές απώλειες)

$$P_{αναπτ} = E_A I_A = \left(V_T + \frac{FR_A}{B\ell} \right) \cdot \frac{F}{B\ell} = P_{in}$$

που μέρος της καταναλώνεται στην αντίσταση του οπλισμού

$$P_{απωλ} = I_A^2 R_A = \frac{F^2}{B^2 \ell^2} R_A$$

και μέρος της εξέρχεται από τη μηχανή ως ωφέλιμη ηλεκτρική ισχύς που στη συγκεκριμένη περίπτωση φορτίζει την πηγή

$$P_{out} = V_T I_A = V_T \frac{F}{B\ell}$$

Ισχύει η διατήρηση της ενέργειας

$$P_{in} = P_{out} + P_{απωλ}$$

και η πλήρης μετατροπή της μηχανικής σε ηλεκτρική ισχύ

$$Fv_t = E_A I_A$$

Η απόδοση της μηχανής ορίζεται ως

$$\eta\% = \frac{P_{out}}{P_{in}} \cdot 100\% = \frac{P_{in} - P_{απωλ}}{P_{in}} \cdot 100\% = \left(1 - \frac{P_{απωλ}}{P_{in}} \right) \cdot 100\%$$

που στην περίπτωση της γραμμικής γεννήτριας γίνεται

$$\eta\% = \frac{\frac{V_T F}{B\ell}}{\frac{FV_T}{B\ell} + \frac{F^2 R_A}{B^2 \ell^2}} \cdot 100\% = \frac{1}{1 + \frac{FR_A}{B\ell V_T}} \cdot 100\% = \frac{1}{1 + \frac{I_A R_A}{V_T}} \cdot 100\% = \frac{V_T}{E_A} \cdot 100\%$$

$$\frac{I_A R_A}{V_T} = \frac{E_f - V_T}{R_A} \frac{R_A}{V_T} = \frac{E}{V_T} - 1$$

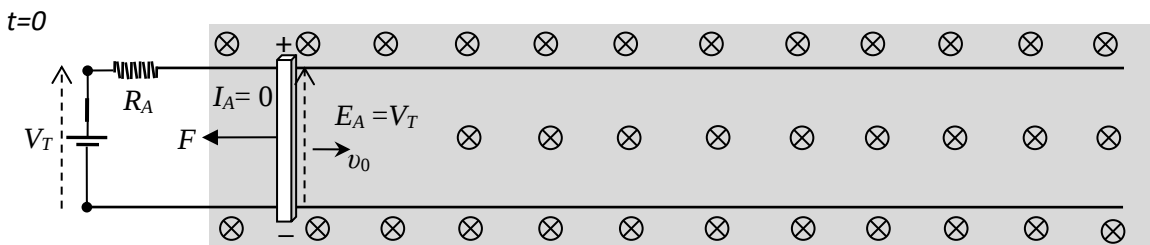
ή πιο εύκολα

$$E_f = V_T + I_A R_A \Rightarrow E_f I_A = V_T I_A + I_A^2 R_A$$

$$\eta\% = \frac{P_{out}}{P_{in}} \cdot 100\% = \frac{V_T I_A}{E_f I_A} \cdot 100\% = \frac{V_T}{E_f} \cdot 100\%$$

Δύναμη αντίθετη με την κίνηση

Τη χρονική στιγμή $t=0$ εφαρμόζουμε στη ράβδο μια δύναμη F αντίθετη στη φορά της κίνησής της (φορτίο)



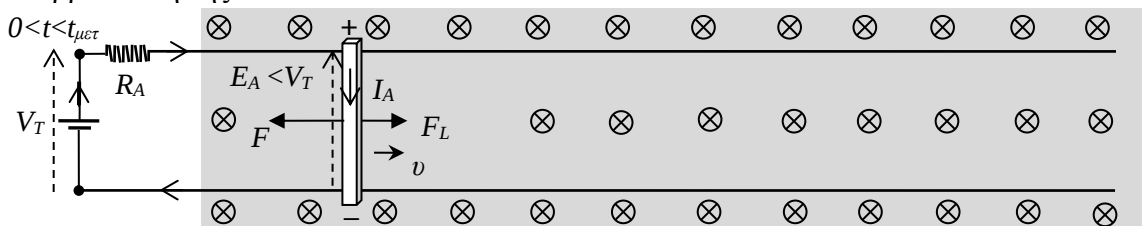
Η δύναμη θα επιβραδύνει τη ράβδο σε μικρότερη ταχύτητα λόγω της αρνητικής επιτάχυνσης που θα προκαλέσει

$$\sum F = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m} < 0 \Rightarrow v \downarrow$$

Ανάλογα θα μειωθεί και η επαγωγική τάση $E_A = Bv\ell \downarrow$, η οποία πλέον θα γίνει μικρότερη από την τερματική τάση $E_A < V_T$ και άρα θα αρχίσει η ράβδος να διαρρέεται από ρεύμα το οποίο θα αυξάνει όσο θα αυξάνεται η ταχύτητα της ράβδου

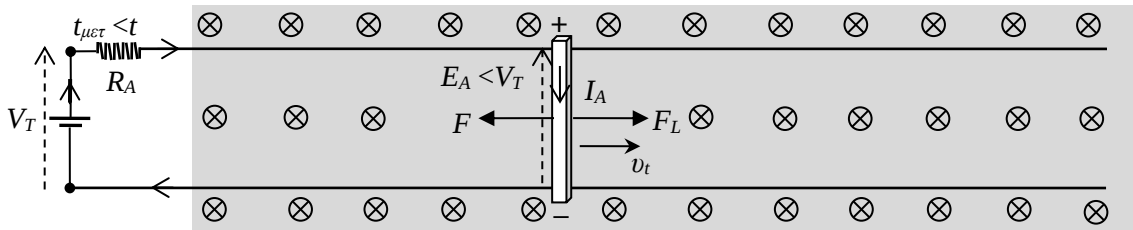
$$V_T = I_A R_A + E_A \Rightarrow I_A \uparrow = \frac{V_T - E_A \downarrow}{R_A}$$

Το ρεύμα θα έχει φορά σύμφωνα με την πολικότητα της μπαταρίας – πηγής V_T και αντίθετη με την επαγωγική τάση. Η μπαταρία πλέον θα παρέχει ενέργεια στο κύκλωμα. Το ρεύμα αυτό θα προκαλέσει αυξανόμενη δύναμη Laplace από το μαγνητικό πεδίο προς τη φορά της κίνησης της ράβδου που θα μειώσει την επιβράδυνσή της.



Η ράβδος θα κινείται με μεταβλητή και διαρκώς μειούμενη επιβράδυνση μέχρι η επιβράδυνση να μηδενιστεί όταν η δύναμη Laplace γίνει ίση με τη δύναμη φορτίου F . Αφού ολοκληρωθεί αυτό το μεταβατικό φαινόμενο η ράβδος θα ισορροπήσει σε νέα, σταθερή αλλά μικρότερη τερματική ταχύτητα. Στη νέα ισορροπία με φορτίο η ράβδος θα διαρρέεται από ρεύμα και η επαγωγική της τάση θα είναι

μικρότερη από την τερματική της μπαταρίας. **Η μηχανή θα λειτουργεί ως κινητήρας που θα σπρώχνει το φορτίο.**



Η νέα ταχύτητα της μηχανής θα βρεθεί από την εξίσωση των δυνάμεων

$$F_L = F \Rightarrow B I_A \ell = F \Rightarrow B \ell \frac{V_T - E_A}{R_A} = F \Rightarrow V_T - B v_t \ell = \frac{F R_A}{B \ell} \Rightarrow v = \frac{V_T}{B \ell} - \frac{F R_A}{B^2 \ell^2} \Rightarrow$$

$$v_t = v_0 - \frac{F R_A}{B^2 \ell^2}$$

Η τελική επαγωγική τάση στη νέα κατάσταση ισορροπίας θα είναι :

$$E_A = B v_t \ell \Rightarrow E_A = B \ell \left(\frac{V_T}{B \ell} - \frac{F R_A}{B^2 \ell^2} \right) \Rightarrow E_A = V_T - \frac{F R_A}{B \ell}$$

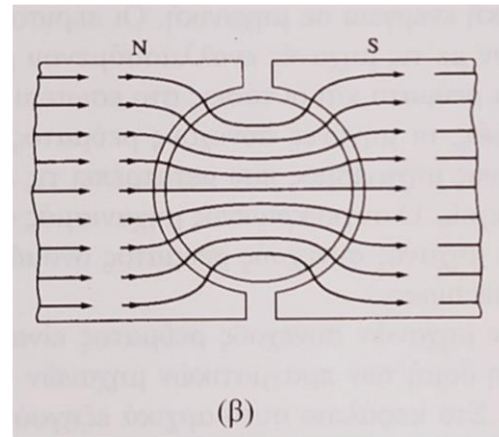
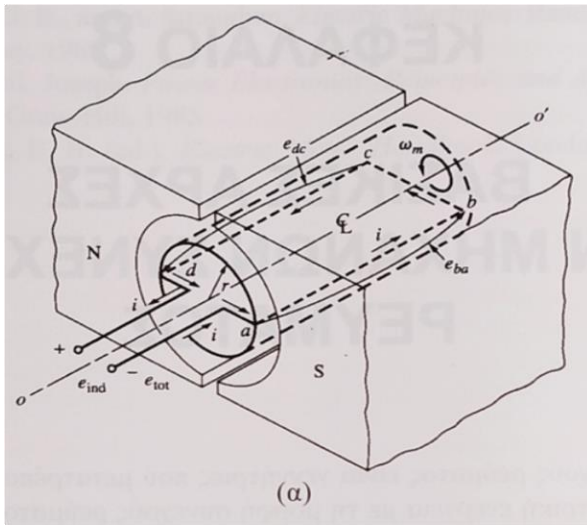
Το τελικό ρεύμα οπλισμού στην ισορροπία θα είναι :

$$I_A = \frac{V_T - E_A}{R_A} \Rightarrow I_A = \frac{F}{B \ell}$$

Η χρονική εξέλιξη του μεταβατικού φαινομένου βρίσκεται πάλι από την εξίσωση του Νεύτωνα όπως και πριν.

Η ΑΠΛΗ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ ΜΗΧΑΝΗ

ΓΕΝΝΗΤΡΙΑ : Περιστρεφόμενο πλαίσιο στο πεδίο μαγνήτη με ημικυκλικούς πόλους



Οι πόλοι του μαγνήτη (πέδyla) είναι διαμορφωμένοι κυκλικά ώστε το μαγνητικό πεδίο στην επιφάνεια τους να είναι όσο γίνεται ομογενές και κάθετο στην επιφάνειά τους. Οι δύο πλευρές του πλαισίου όταν θα περιστρέφονται θα κόβουν κάθετα τις δυναμικές γραμμές αυτού του μαγνητικού πεδίου.

Όταν δώσω κίνηση στο πλαίσιο (είναι προσαρτημένο σε άξονα που περιστρέφουμε) από το νόμο επαγωγής του Faraday θα εμφανιστεί τάση από επαγωγή στα άκρα του. Την τάση την παίρνω με τις σταθερές ψήκτρες που ακουμπούν στα δαχτυλίδia που είναι προσαρτημένα στις άκρες του πλαισίου.

Δίνω κίνηση παίρνω ηλεκτρική τάση, άρα έχω γεννήτρια.

Το βασικό αποτέλεσμα που πρέπει να θυμάστε είναι ότι η ηλεκτρεγερτική δύναμη (τάση) που αναπτύσσεται από επαγωγή στα άκρα του πλαισίου εξαρτάται από τρεις παράγοντες από τους οποίους είναι ανάλογη :

$$E = K\Phi\omega$$

1) τη μαγνητική ροή Φ του πεδίου της μηχανής : $\Phi = A_p B$

Όπου A_p είναι το εμβαδόν της επιφάνειας που σαρώνει το πλαίσιο όπως περιστρέφεται κάτω από τον κάθε πόλο της μηχανής. Αν η ακτίνα περιστροφής του πλαισίου είναι r (η οποία είναι ίση με το μισό μήκος της πίσω πλευράς bc) τότε το εμβαδόν είναι ίσο με μήκος ημικυκλίου επί μήκος πλαισίου (πλευρές ab , cd)

$$A_p = \pi r \ell$$

όπου θεωρήσαμε ότι το κενό μεταξύ των πόλων είναι αμελητέο και το πλαίσιο μόλις βγει κάτω από τον έναν πόλο μπαίνει αμέσως κάτω από τον άλλο.

2) τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής ω του πλαισίου

Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής (rad/s) συνδέεται με την ταχύτητα n που εκφράζει περιστροφές/min (rpm, revolutions per minute) με τον τύπο

$$\omega = \frac{2\pi}{60} n$$

επειδή κάθε περιστροφή αντιστοιχεί σε γωνία 2π ακτινίων (rad) και το ένα λεπτό έχει 60 δευτερόλεπτα (min=60 s). Οπότε η σχέση της επαγωγικής τάσης γράφεται και

$$E = K\Phi \frac{2\pi}{60} n = K \frac{\pi}{30} \Phi n = K' \Phi n, \quad \text{με } K' = \frac{\pi}{30} K$$

Απόδειξη

Η επαγωγική τάση είναι το άθροισμα της επαγωγικής τάσης στα άκρα κάθε πλευράς (αγωγού) του πλαισίου.

$$E = e_{ab} + e_{bc} + e_{cd} + e_{da}$$

Οι πλευρές bc και da δεν κόβουν δυναμικές γραμμές κατά την κίνησή τους και άρα δεν επάγεται τάση στα άκρα τους.

$$e_{bc} = \int_b^c (\vec{v}_\ell \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = 0, \quad \text{και} \quad e_{da} = \int_d^a (\vec{v}_\ell \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = 0, \quad \text{επειδή κάθε } (\vec{v}_\ell \times \vec{B}) \perp d\vec{\ell}$$

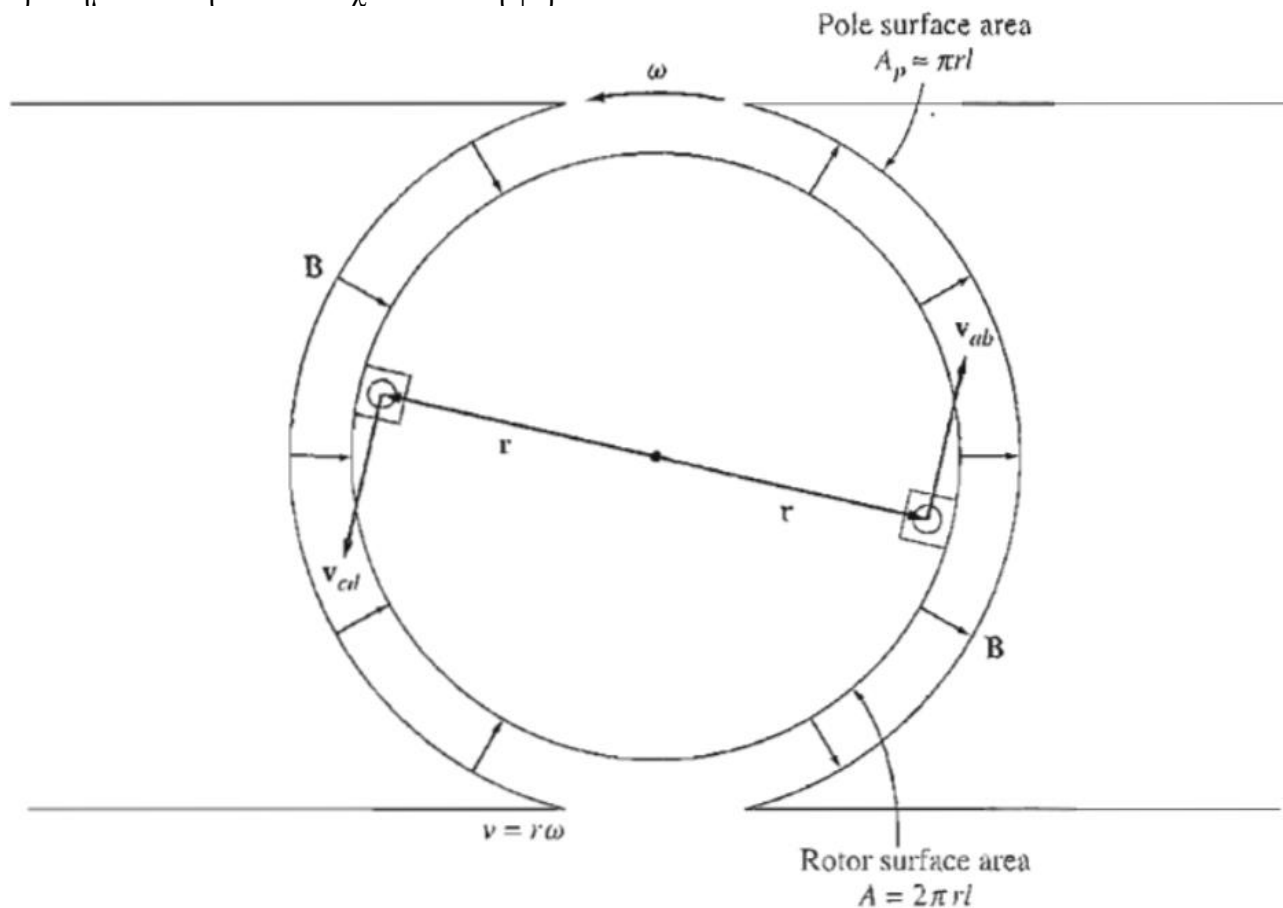
Οι πλευρές ab και cd κινούνται πάντα κάθετα στο σταθερό μαγνητικό πεδίο με σταθερή ταχύτητα και άρα κόβουν τις δυναμικές γραμμές και εμφανίζουν επαγωγική τάση στα άκρα τους που υπολογίζεται από τον ίδιο τύπο με τη γραμμική μηχανή.

$$e_{ab} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{\ell}_{ab} = Bv\ell \quad e_{cd} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{\ell}_{cd} = Bv\ell$$

Οι πλευρές αυτές δεν εμφανίζουν επαγωγική τάση για το μικρό διάστημα του διάκενου μεταξύ των δύο πόλων όπου κινούνται παράλληλα με τις δυναμικές γραμμές ή είναι εντελώς έξω από το μαγνητικό πεδίο.

$$E_{επαγ} = e_{ab} + e_{bc} + e_{cd} + e_{da} = Bv\ell + 0 + Bv\ell + 0 = 2Bv\ell$$

Αφού οι πλευρές ab και cd περάσουν από το διάκενο και βρεθούν κάτω από τον άλλο πόλο η τάση αλλάζει πρόσημο επειδή το πεδίο έχει αντίθετη φορά.



H

Η γραμμική ταχύτητα των πλευρών ab και cd σε σχέση με τη γωνιακή ταχύτητα δίνεται από τον τύπο

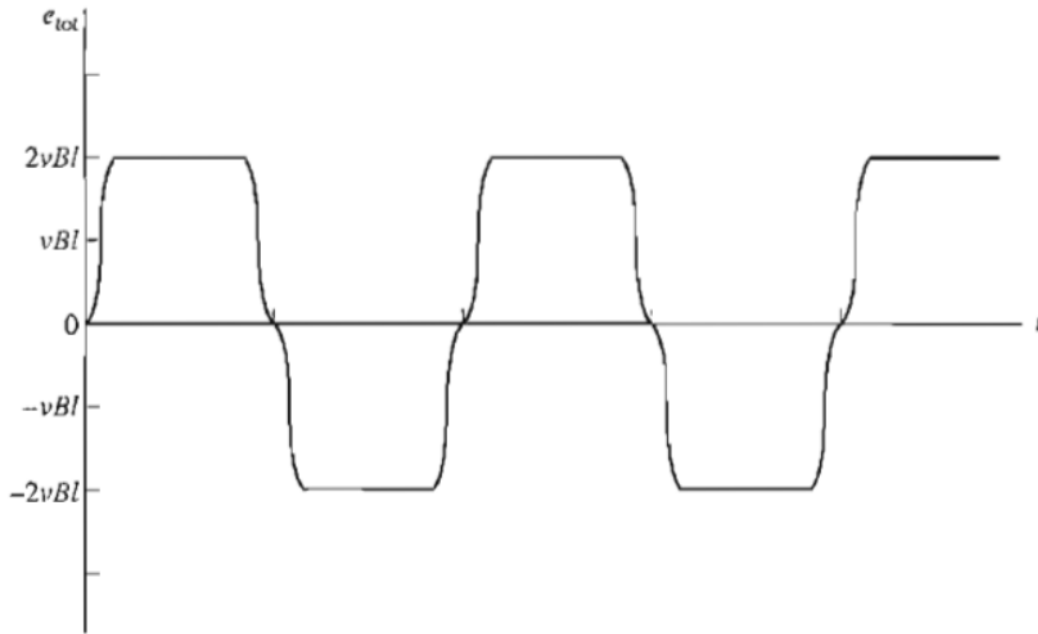
$$v = \omega r$$

οπότε η επαγόμενη τάση έρχεται στην επιθυμητή μορφή:

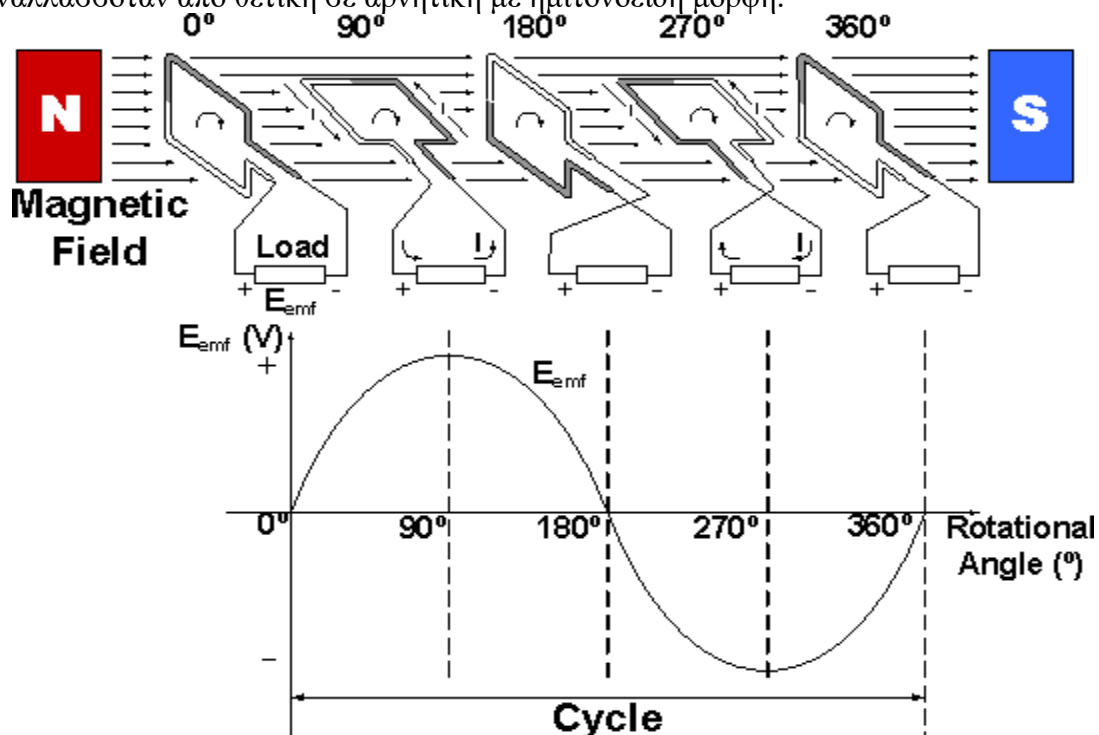
$$E_{επαγ} = 2Bv\ell = 2B\omega r\ell = \frac{2}{\pi}B\pi r\ell\omega = \frac{2}{\pi}BA_p\omega = \frac{2}{\pi}\Phi\omega$$

$$E_{επαγ} = \begin{cases} \pm \frac{2}{\pi} \Phi \omega & \text{κάτω από την επιφάνεια των πόλων} \\ 0 & \text{έξω από την επιφάνεια των πόλων} \end{cases}$$

Η τάση αυτή είναι όμως εναλλασσόμενη. Δηλαδή μέσα σε ένα κύκλο της μηχανής αλλάζει πρόσημο (παίρνει και θετικές και αρνητικές τιμές). Η πολικότητα αλλάζει κάθε φορά που οι πλευρές του πλαισίου αλλάζουν πόλο κάτω από τον οποίο κινούνται (εδώ κάθε 180°).

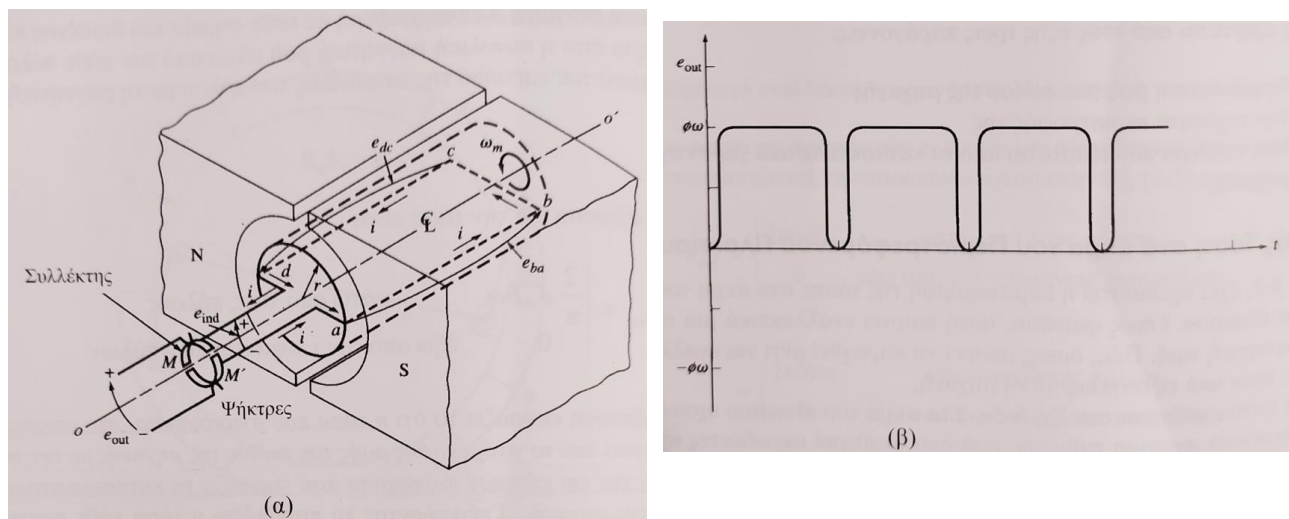
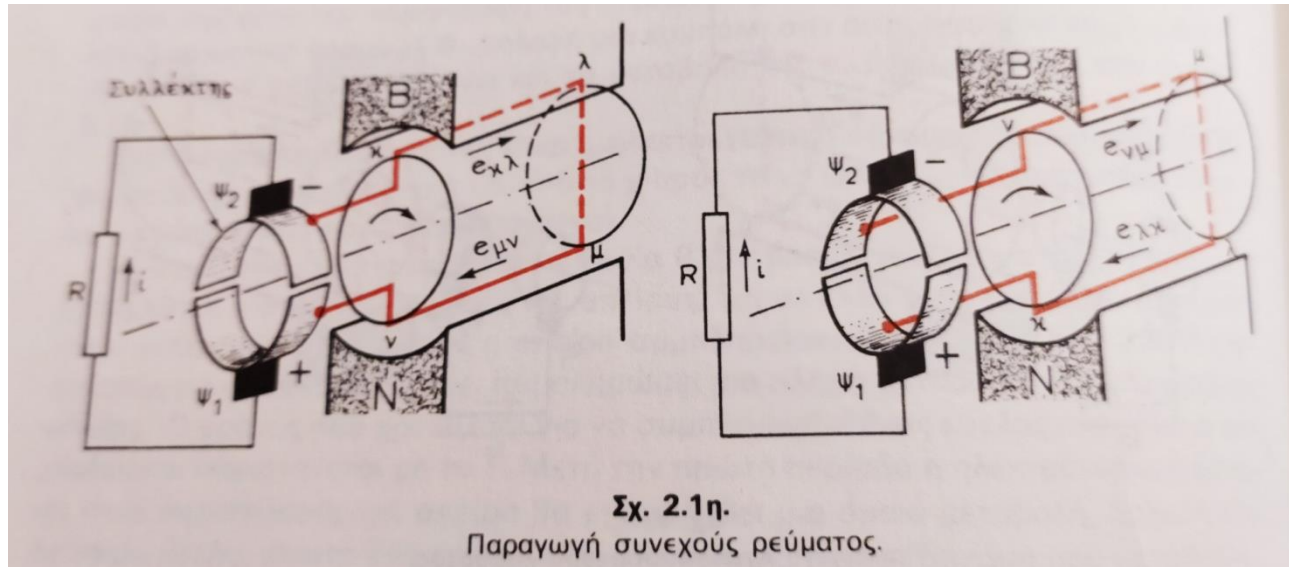


Η επαγωγική τάση αλλάζει από θετική σε αρνητική με περίπου τετραγωνική μορφή. Αν δεν είχαμε διαμορφώσει τους πόλους ημικυκλικά αλλά το μαγνητικό πεδίο ήταν παράλληλες ευθείες η τάση θα εναλλασσόταν από θετική σε αρνητική με ημιτονοειδή μορφή.



Με το συλλέκτη (δύο ημικυκλικούς τομείς προσαρτημένους στα άκρα του πλαισίου) μπορούμε να μετατρέψουμε την τάση σε συνεχή. Η μία ψήκτρα ακουμπάει πάντα στον τομέα που είναι θετικός εκείνη

τη στιγμή και η άλλη πάντα σε αυτόν που είναι αρνητικός. Όταν η επαγωγική τάση γίνεται μηδέν, κατά το διάστημα που οι πλευρές είναι στο διάκενο μεταξύ των πόλων όπως περιστρέφονται (ουδέτερη ζώνη) τότε οι τομείς αλλάζουν ψήκτρα επαφής. Έτσι όταν αλλάζουν πολικότητα αλλάζουν και ψήκτρα στην οποία δίνουν ρεύμα.



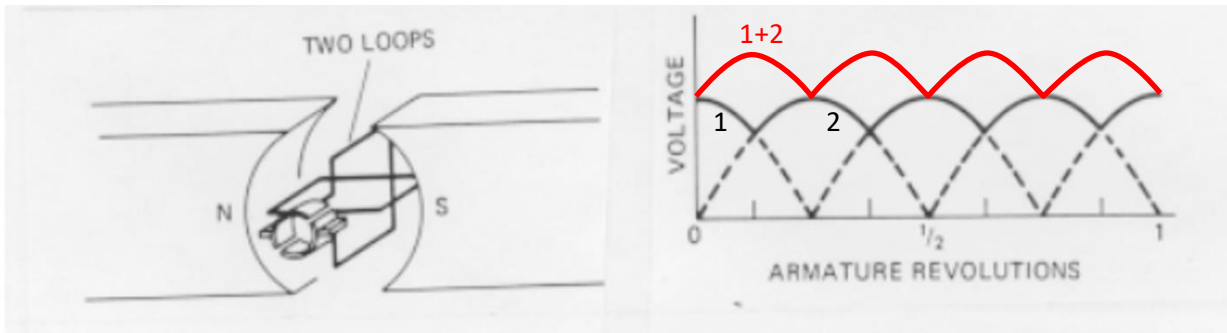
Με τον συλλέκτη η τάση ανορθώθηκε. Είναι μόνο θετική.

Παρουσιάζει όμως διακυμάνσεις. Πέφτει για λίγο στο μηδέν όταν οι πλευρές ab και cd κινούνται στο διάκενο μεταξύ των δύο πόλων. Εκεί ή βρίσκονται εκτός μαγνητικού πεδίου ή κινούνται παράλληλα στις δυναμικές γραμμές και δεν τις κόβουν, οπότε δεν εμφανίζεται επαγωγική τάση στα άκρα τους.

Η κυμάτωση μπορεί να εξομαλυνθεί βάζοντας περισσότερα πλαίσια, σε σειρά, να περιστρέφονται. Τότε πάντα κάποια πλαίσια θα είναι κάτω από τους πόλους και θα δίνουν τάση

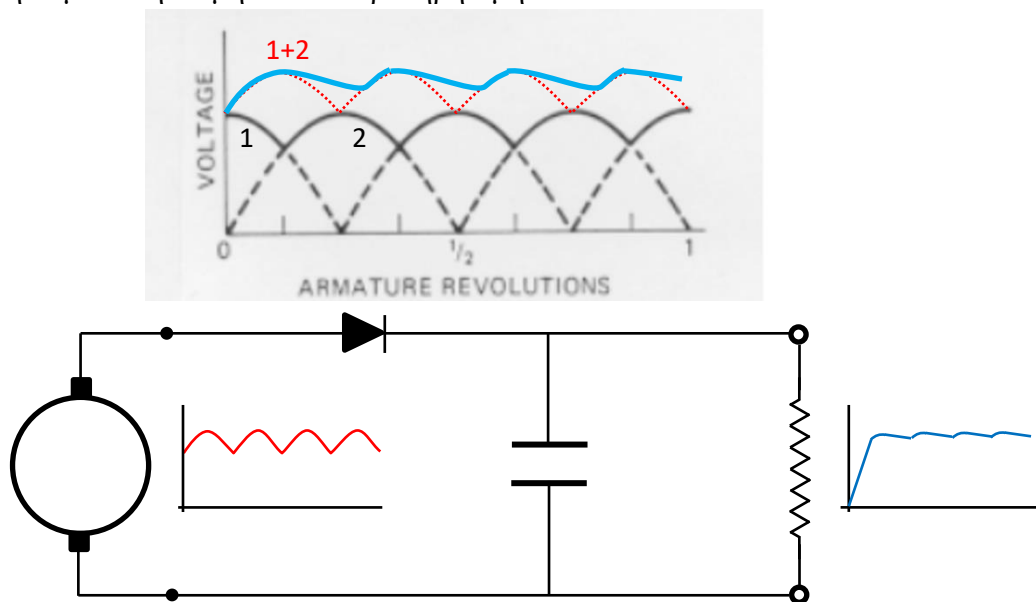
Δύο κάθετα πλαίσια

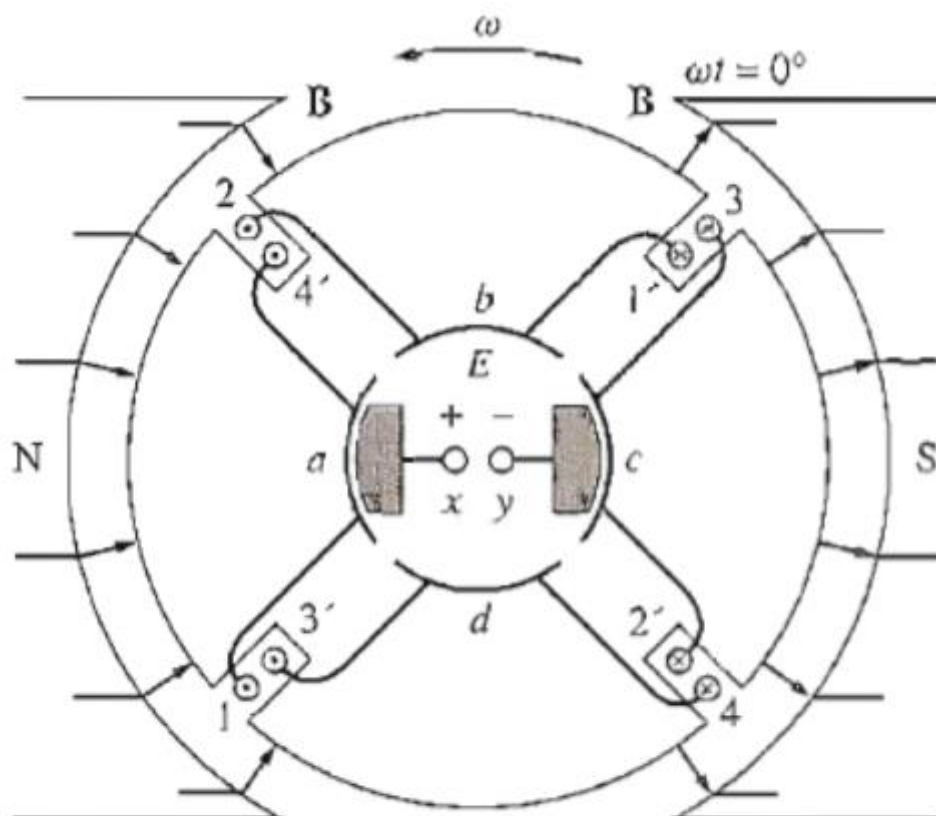
Αν οι τάσεις των δύο πλαισίων συνδεθούν σε σειρά, ενώ έχουν διαφορά φάσης 90° , τότε όταν η τάση του ενός αρχίζει να μειώνεται του άλλου αρχίζει να αυξάνεται. Οπότε το άθροισμά τους θα παρουσιάζει πολύ μικρότερη διακύμανση, εξομαλύνεται.



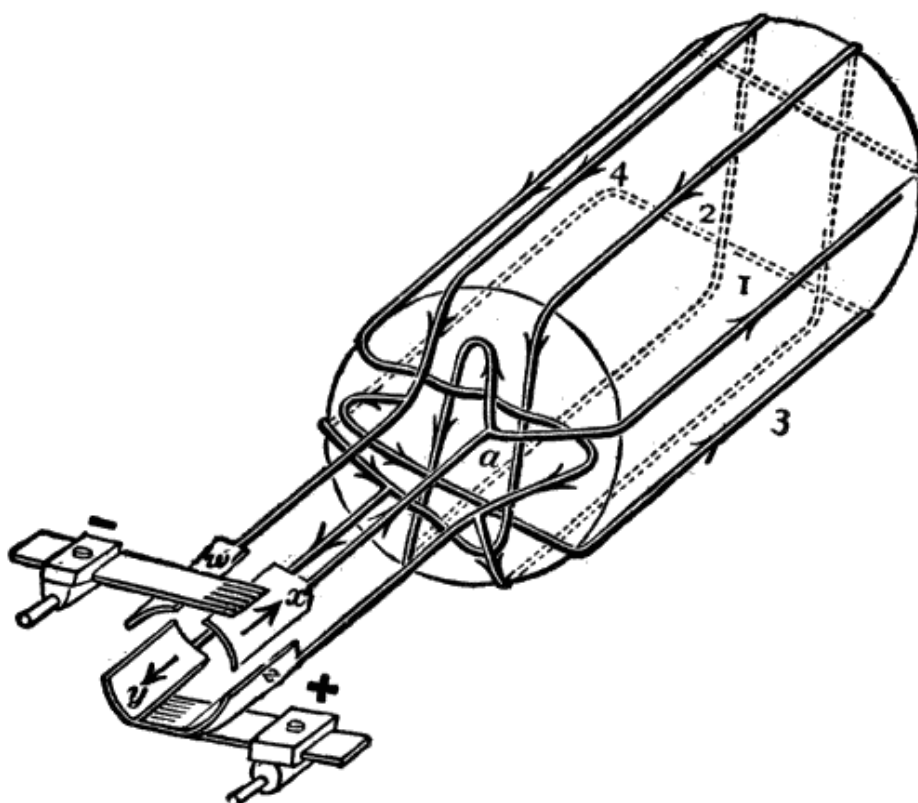
(δεν φαίνεται καλά στο σχήμα ότι ο συλλέκτης έχει τέσσερις τομείς ώστε τα δυο κάθετα πλαίσια να είναι σε σειρά)

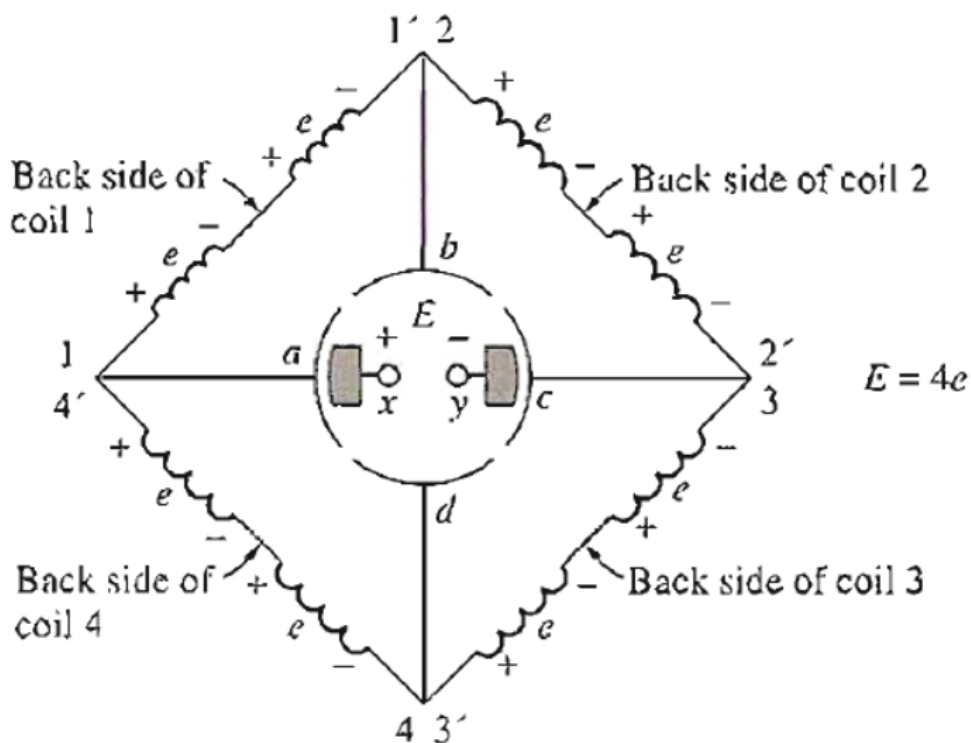
Η εξομάλυνση επιτυγχάνεται σε ακόμα μεγαλύτερο βαθμό αν συνδέσουμε παράλληλα με τους ακροδέκτες της γεννήτριας και έναν πυκνωτή με μεγάλη σταθερά χρόνου $\tau = RC > 10T$. Εφόσον ο πυκνωτής φορτιστεί πλήρως όταν η τάση από τα δύο πλαίσια θα μειώνεται αυτός θα αρχίσει να αποφορτίζεται και να τροφοδοτεί την αντίσταση του φορτίου. Όμως αποφορτίζεται πολύ πιο αργά. Έτσι μέχρι να αυξηθεί πάλι η τάση που έρχεται από τα δύο πλαίσια η τάση στα άκρα του φορτίου έχει πέσει ελάχιστα πιο κάτω από τη μέγιστη τιμή της. Η τάση προλαβαίνει να πέσει στο ελάχιστο που έφτανε με τα δύο πλαίσια μόνο. Η επιστροφή ρεύματος στη μηχανή αποφεύγεται με τη χρήση διόδου. Έτσι η εξομάλυνση γίνεται πολύ μεγαλύτερη σε βαθμό που η κυμάτωση να μην είναι παρατηρήσιμη.



Δύο κάθετα διπλά πλαίσια

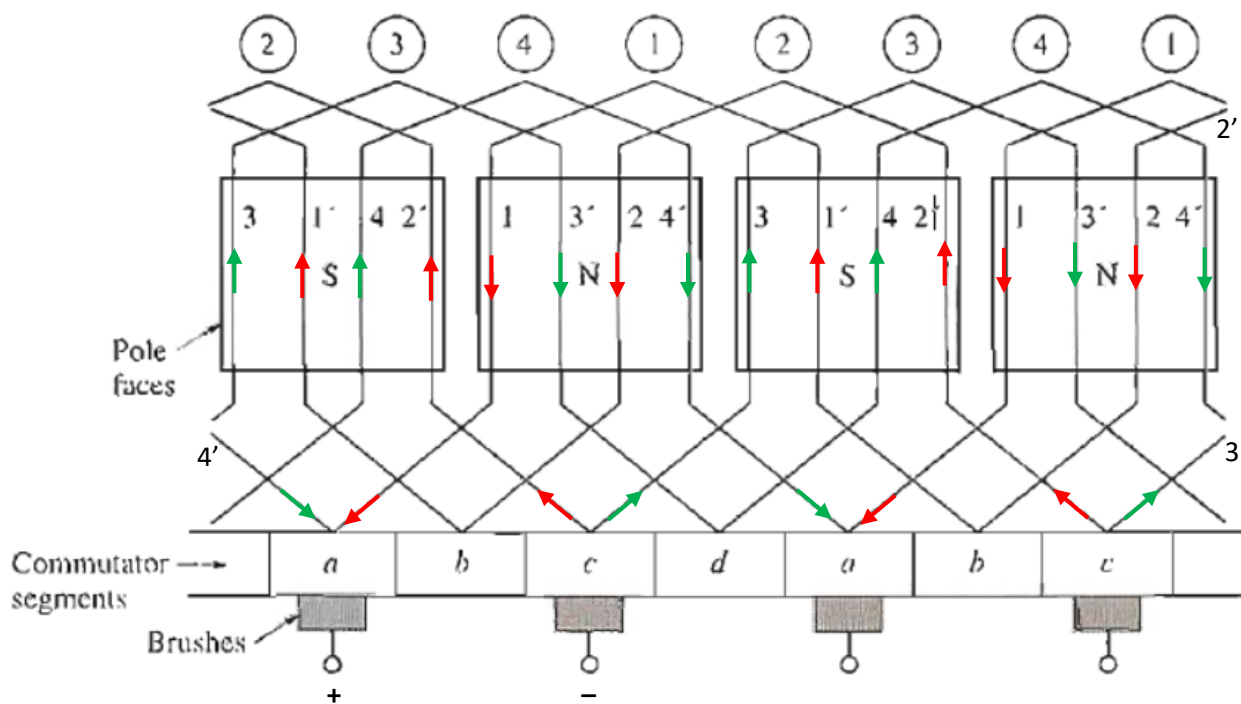
(a)





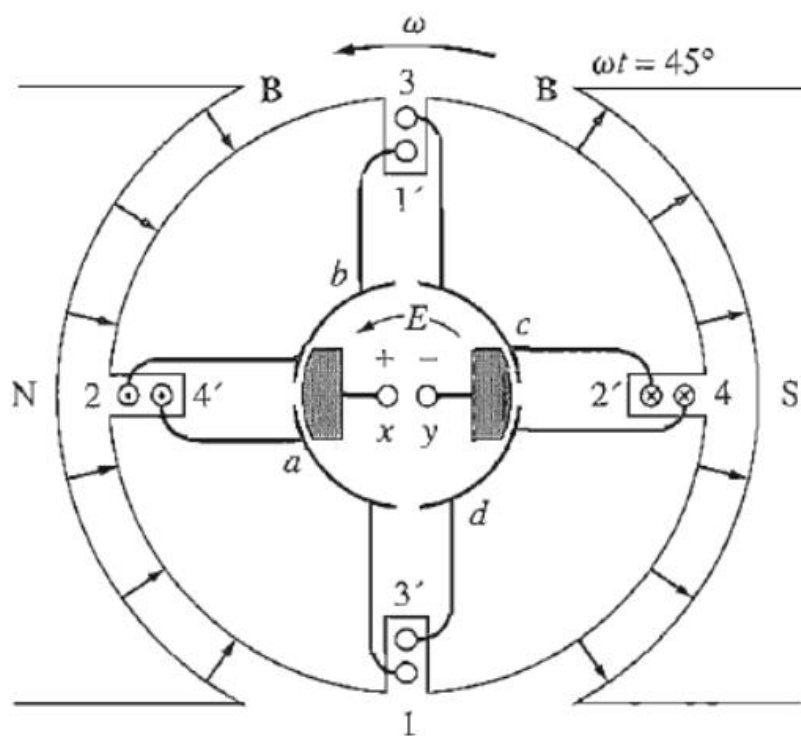
(b)

(τα ρεύματα είναι αντίθετα από ότι στο προηγούμενο 3D σχήμα ή $x \leftrightarrow y$)

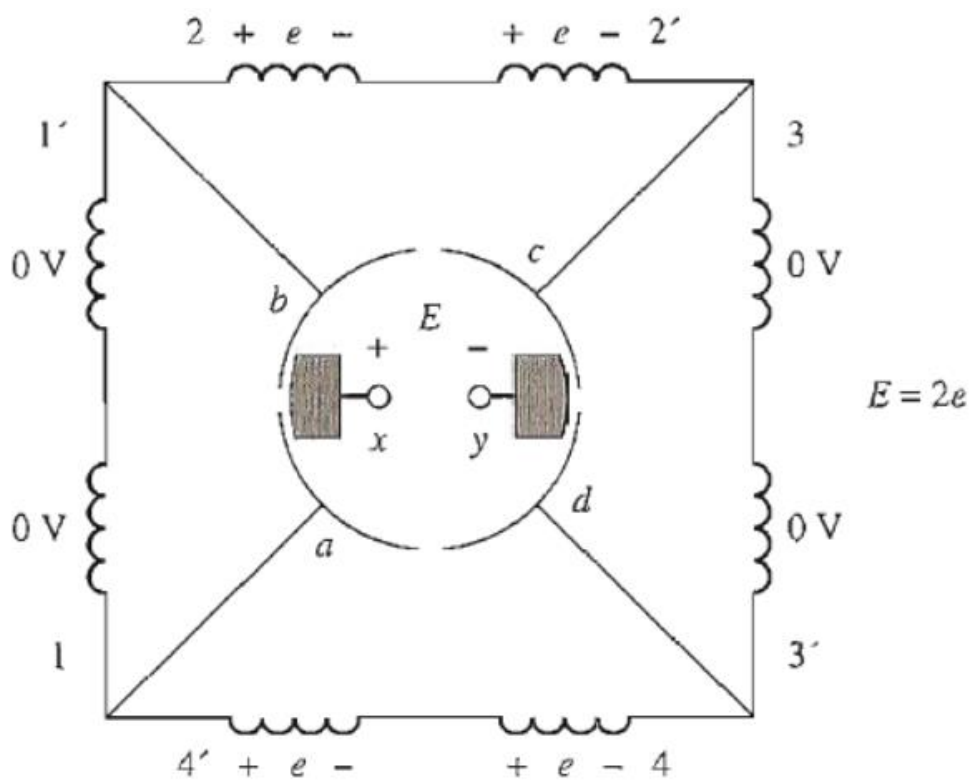


(c)

$$E = 4e \quad \omega t = 0^\circ$$



(a)



(b)

$$E = 2e \quad \omega t = 45^\circ$$

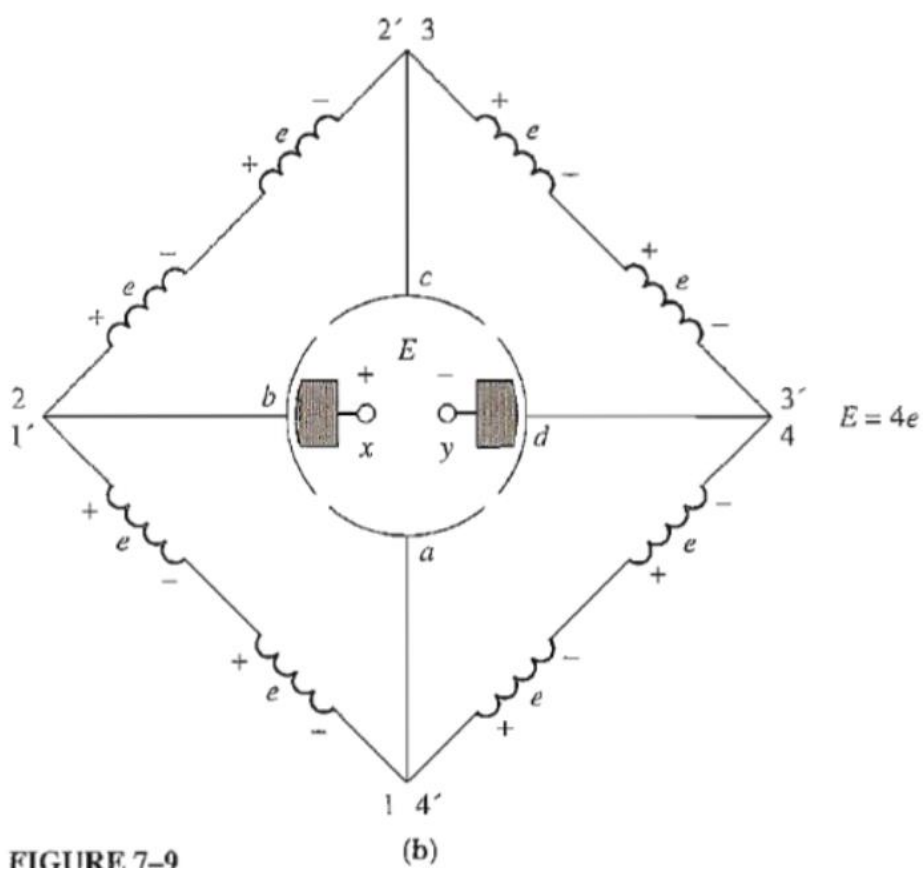
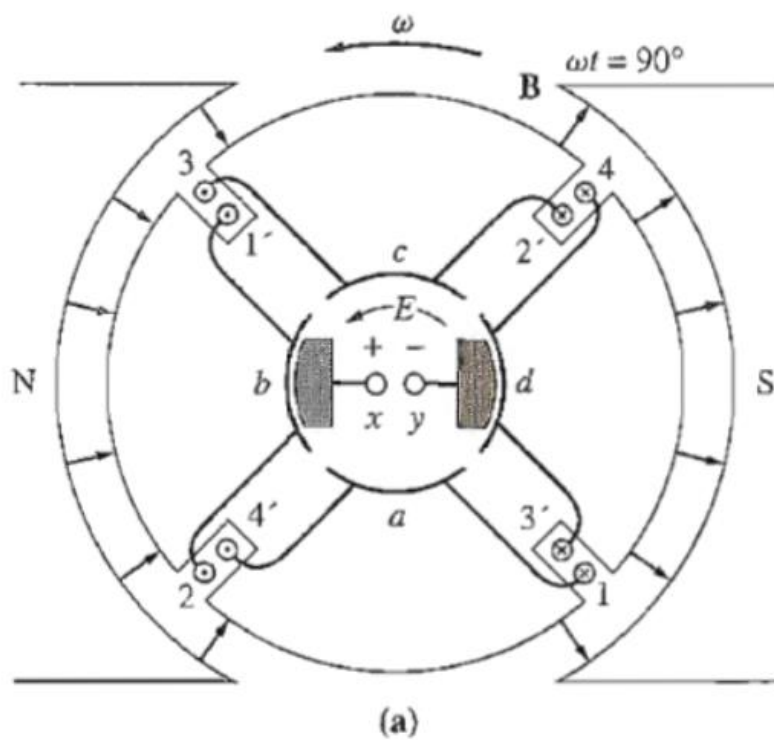
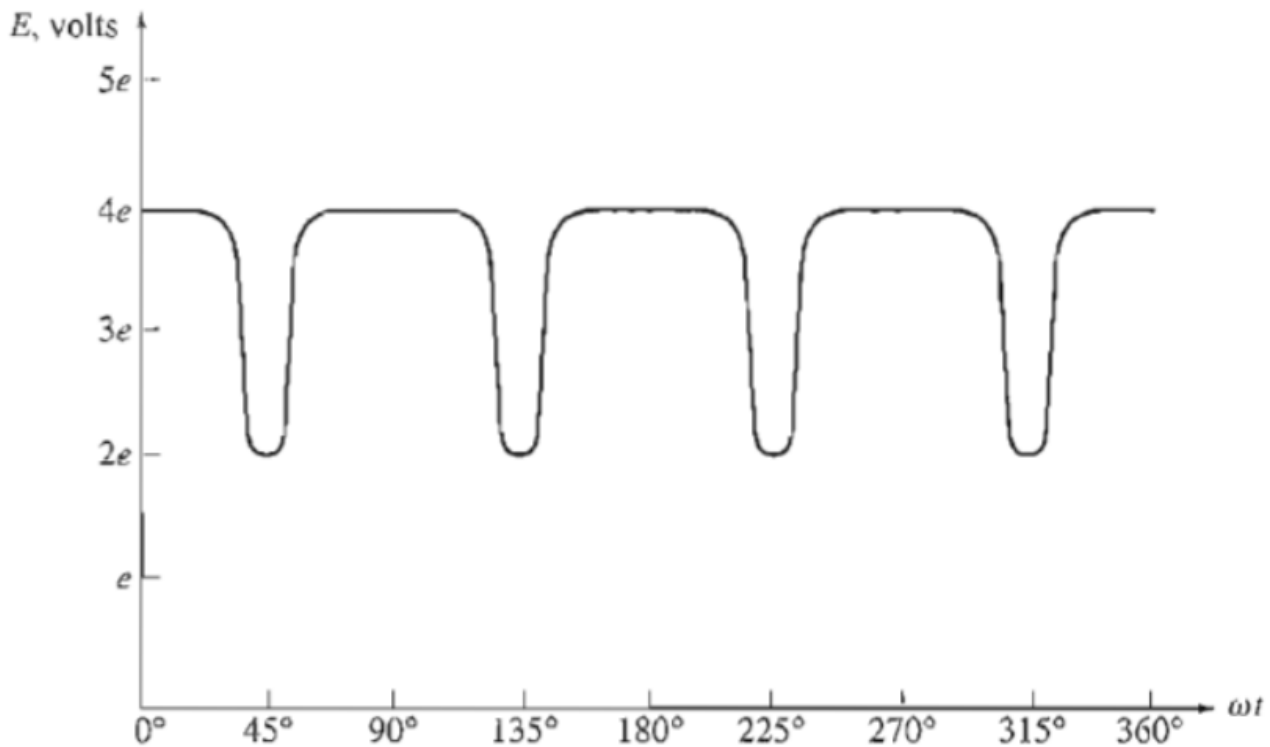


FIGURE 7-9

$$E = 4e \quad \omega t = 90^\circ$$

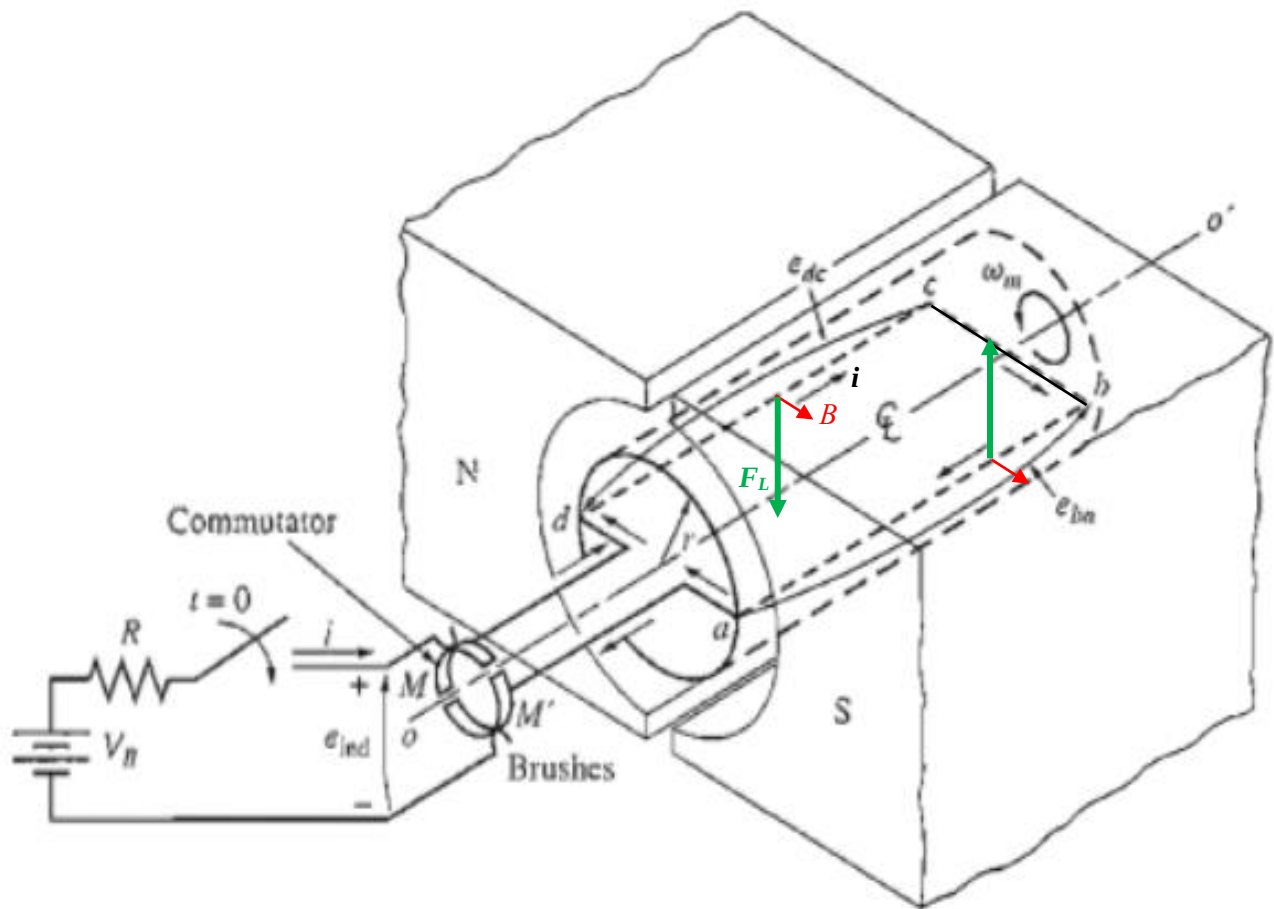


Με δύο πλαίσια κάθετα μεταξύ τους η κυμάτωση ήδη έπεσε στο μισό (της μέγιστης τιμής) ενώ η επαγωγική τάση δεν γίνεται ποτέ μηδέν (πάντα κάποιος αγωγός είναι κάτω από τους πόλους).

Βάζοντας ακόμα περισσότερα πλαίσια μπορούμε να πετύχουμε πρακτικά να έχουμε πάντα σταθερό αριθμό αγωγών κάτω από τους πόλους και κάποιο πολύ μικρό αριθμό αγωγών εκτός πόλων στην ουδέτερη ζώνη. Η τάση θα γίνει πρακτικά σταθερή καθώς κάθε στιγμή που κάποιος αγωγός θα μπαίνει στην ουδέτερη ζώνη κάποιος άλλος θα μπαίνει κάτω από τους πόλους.

Έτσι η κυμάτωση μπορεί πρακτικά να εξαλειφθεί και να παίρνω στην έξοδο της γεννήτριας συνεχή (θετική) και με σταθερή τιμή τάση.

KINHΘHPAΣ: ρυνεχής τάση ρτα άκρα πλαισίου ρτο πεδίο μαγνήτη με ημικυκλικούς πόλους



Σχήμα 1 (α)

Στο προηγούμενο μονό πλαίσιο (ένας βρόχος) με το συλλέκτη συνδέουμε εξωτερική πηγή τάσης (δεν δίνουμε κίνηση). Οι αγωγοί τώρα διαρρέονται από ρεύμα και από τις δυνάμεις Laplace που αναπτύσσονται, το πλαίσιο αρχίζει και περιστρέφεται. Έχουμε κινητήρα.

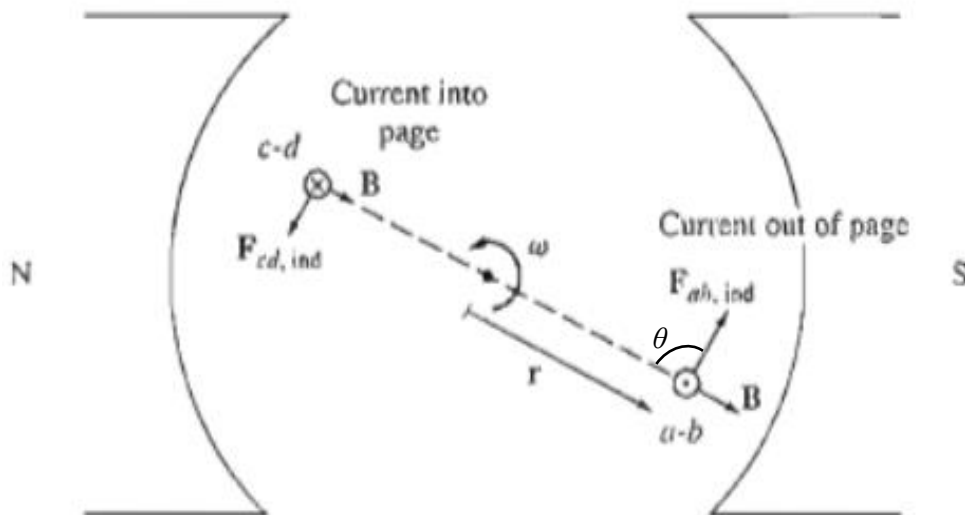
Το βασικό αποτέλεσμα που πρέπει να θυμάστε είναι ότι η ροπή που αναπτύσσεται στον άξονα του πλαισίου εξαρτάται από τρεις παράγοντες από τους οποίους είναι ανάλογη :

$$\tau = K\Phi i$$

- 1) τη μαγνητική ροή Φ του πεδίου της μηχανής : $\Phi = A_p B$
- 2) το ηλεκτρικό ρεύμα i που διαρρέει το πλαίσιο
- 3) την ίδια με πριν σταθερά K η οποία εξαρτάται από τα κατασκευαστικά χαρακτηριστικά της μηχανής.

Απόδειξη

Πλευρά ab : διαρρέεται από ρεύμα με φορά προς τα έξω από τη σελίδα ενώ οι γραμμές του μαγνητικού πεδίου είναι από δεξιά προς τα αριστερά (N→S). Η γωνία μεταξύ του ρεύματος i και του μαγνητικού πεδίου B θα είναι πάντα $\theta=90^\circ$ και άρα η δύναμη Laplace $\vec{F}_{ab} = i\vec{\ell} \times \vec{B}$ που εμφανίζεται, με φορά προς τα πάνω, έχει μέτρο ίσο με $F_{ab} = i\ell B$. Αυτή η δύναμη θα προκαλέσει ανθρωρολογιακή ροπή $\vec{\tau}_{ab} = \vec{r} \times \vec{F}_{ab}$ στη φορά του ω του σχήματος με μέτρο $\tau_{ab} = rF_{ab} \sin \varphi = rF_{ab} \sin 90^\circ = rF_{ab} = r i \ell B$ και φορά αντίθετη με των δεικτών του ρολογιού δηλαδή κατά τη φορά της κίνησης. Η γωνία φ είναι η γωνία μεταξύ της ακτίνας r και της δύναμης F .



Σχήμα 1 (β)

Στις πλευρές bc και da , επειδή το μαγνητικό πεδίο είναι διαμορφωμένο από τους ημικυκλικούς πόλους να δείχνει προς το κέντρο, δεν θα εμφανίζονται δυνάμεις Laplace γιατί τα ρεύματά τους είναι αντιπαράλληλα ($\theta=180^\circ$) και παράλληλα ($\theta=0^\circ$) αντίστοιχα με το μαγνητικό πεδίο και άρα τα εξωτερικά γινόμενα $\vec{F}_{bc} = i\vec{\ell} \times \vec{B} = -\vec{F}_{ad} = 0$ είναι μηδέν. Οπότε οι πλευρές αυτές δεν θα παράγουν ροπή.

Ακόμα και αν δεν ήταν διαμορφωμένο το μαγνητικό πεδίο αλλά ήταν προσανατολισμένο σταθερά από αριστερά προς τα δεξιά πάλι δεν θα παράγονταν ροπή από αυτές τις πλευρές επειδή οι δυνάμεις Laplace που θα εμφανίζονταν θα ήταν παράλληλες με τον άξονα περιστροφής (θα ήταν προς τα μέσα του βρόχου πάνω στον άξονα οο' του Σχήματος 1 (α), δείτε το Σχήμα 2)

Πλευρά cd : διαρρέεται από ρεύμα με φορά προς τα μέσα της σελίδας ενώ οι γραμμές του μαγνητικού πεδίου είναι πάλι από δεξιά προς τα αριστερά ($N \rightarrow S$). Η γωνία μεταξύ τους θα είναι επίσης πάντα $\theta=90^\circ$ και άρα η δύναμη Laplace $\vec{F}_{cd} = i\vec{\ell} \times \vec{B}$ που εμφανίζεται, με φορά προς τα κάτω, έχει μέτρο ίσο με $F_{cd} = i\ell B$. Αυτή η δύναμη θα προκαλέσει επίσης ανθρωρολογιακή ροπή $\vec{\tau}_{cd} = \vec{r} \times \vec{F}_{cd}$ στη φορά του ω του σχήματος με μέτρο $\tau_{cd} = rF_{cd} \sin \varphi = rF_{cd} \sin 90^\circ = rF_{cd} = ri\ell B$

Όταν οι πλευρές ab και cd κινούνται στο χάσμα μεταξύ των δύο πόλων η ροπή θα μηδενίζεται στιγμιαία. Είτε επειδή εκεί δεν υπάρχει μαγνητικό πεδίο είτε ακόμη και αν υπάρχει επειδή οι δυνάμεις Laplace περνάνε από τον άξονα περιστροφής. Αν κολλήσει η μηχανή λόγω τριβών θα κολλήσει σε αυτή τη θέση, γιατί δεν υπάρχει ροπή να την ξεκολλήσει (δείτε Σχήμα 2).

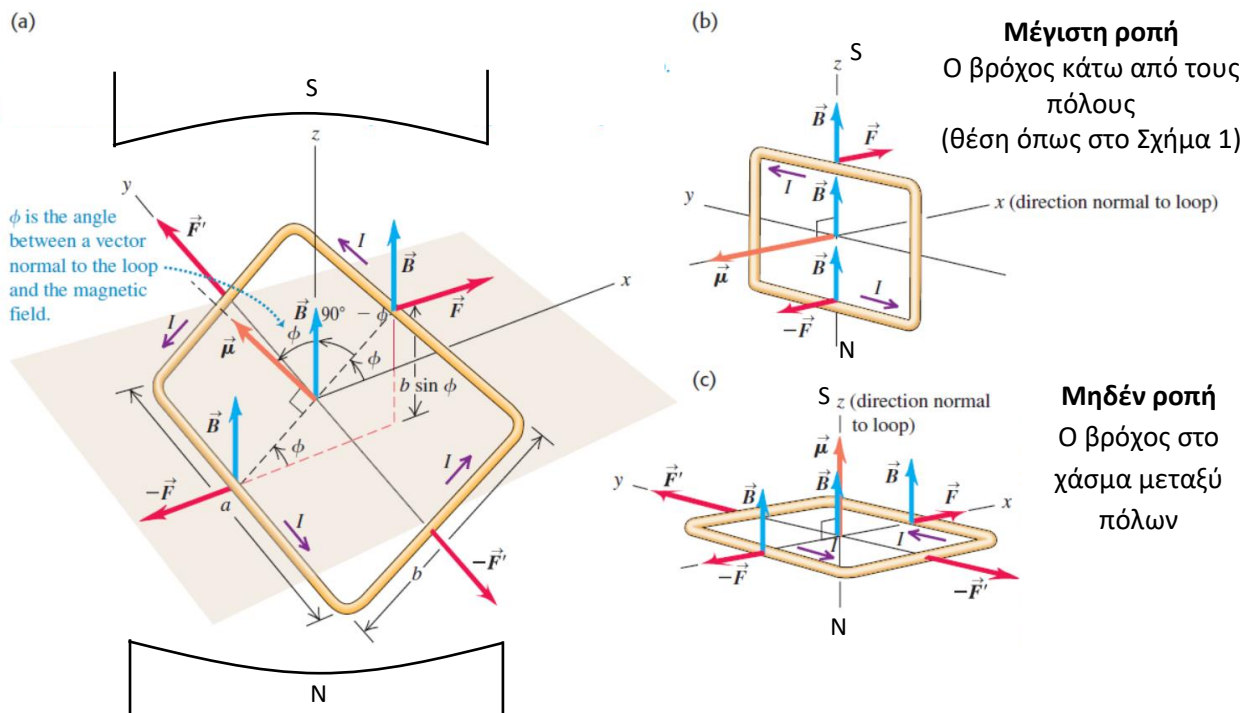
Η συνολική ροπή θα είναι το άθροισμα των ροπών από όλες τις πλευρές του βρόχου:

$$\tau_{\text{επαγ}} = \tau_{ab} + \tau_{bc} + \tau_{cd} + \tau_{da} = ri\ell B + 0 + ri\ell B + 0 = 2ri\ell B$$

Χρησιμοποιώντας πάλι τις σχέσεις $A_p = \pi r\ell$ και $\Phi = A_p B$ παίρνουμε

$$\tau_{\text{επαγ}} = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \Phi i & \text{κάτω από την επιφάνεια των πόλων} \\ 0 & \text{έξω από την επιφάνεια των πόλων} \end{cases}$$

Στο παρακάτω Σχήμα 2 φαίνονται όλες οι δυνάμεις Laplace και ποιες παράγουν ροπή. Το μαγνητικό πεδίο είναι από κάτω προς τα πάνω σταθερά (στο Σχήμα 1 ήταν από αριστερά προς τα δεξιά και ήταν διαμορφωμένο να δείχνει προς το κέντρο, προς τον άξονα).



Οι δυνάμεις $\vec{F}'$ δεν παράγουν ροπή επειδή είναι παράλληλες στον άξονα περιστροφής y

Άσκηση

Η μηχανή του παραπάνω σχήματος με το συλλέκτη και τις ψήκτρες αποτελείται από ένα πλαίσιο (ℓ, r) που μπορεί να περιστραφεί μεταξύ δύο ημικυκλικών πόλων μαγνητικού πεδίου B . Το πλαίσιο συνδέεται με μπαταρία τάσης V_B και η όλη διάταξη παρουσιάζει ωμική αντίσταση R . Οι τιμές των μεγεθών είναι : $r=0,5$ m, $\ell=1,0$ m, $R=0,3$ Ω, $B=0,25$ T, $V_B=120$ V

- 1) Περιγράψτε τι συμβαίνει μετά το κλείσιμο του διακόπτη. Ποιο είναι το μέγιστο ρεύμα της μηχανής κατά την εκκίνηση; Ποια είναι η γωνιακή ταχύτητα στη χωρίς φορτίο κατάσταση ισορροπίας
- 2) Στο πλαίσιο εφαρμόζεται κάποιο φορτίο με ροπή $10 \text{ N}\cdot\text{m}$. Ποια θα είναι η νέα ταχύτητα ισορροπίας του πλαισίου; Πόση ισχύς παρέχεται στον άξονα της μηχανής; Πόση ισχύ παράγει η μηχανή; Η μηχανή λειτουργεί ως κινητήρας ή ως γεννήτρια;
- 3) Καθώς η μηχανή είναι πάλι αφόρτιστη, εφαρμόζεται τώρα στον άξονά της ροπή ίση με $7,5 \text{ N}\cdot\text{m}$ και φορά κατά τη φορά κίνησής της. Ποια θα είναι η ταχύτητα στη νέα κατάσταση ισορροπίας; Τώρα η μηχανή λειτουργεί ως γεννήτρια ή ως κινητήρας;
- 4) Η μηχανή περιστρέφεται πάλι χωρίς φορτίο. Αν η ένταση του μαγνητικού πεδίου μειωθεί σε $0,20$ T, ποια θα είναι η ταχύτητα του δρομέα στη νέα κατάσταση ισορροπίας;

Λύση

- 1) Όταν κλείσει ο διακόπτης η μηχανή διαρρέεται από ρεύμα

$$i = \frac{V_B - E}{R}$$

Όμως η μηχανή είναι ακόμα ακίνητη και άρα δεν έχει αναπτυχθεί ακόμα επαγωγική τάση $E=0$, οπότε το ρεύμα εκκίνησης είναι

$$i_0 = \frac{V_B}{R} \Rightarrow i_0 = \frac{120}{0,3} = 400 \text{ A}$$

Εφόσον πλέον το πλαίσιο διαρρέεται από ρεύμα αναπτύσσεται ροπή από τη δύναμη Laplace

$$\tau_0 = \frac{2}{\pi} \Phi i_0$$

Η ροπή προκαλεί γωνιακή επιτάχυνση α και ο δρομέας αποκτά γωνιακή ταχύτητα ω και αρχίζει να περιστρέφεται. Εφόσον ο δρομέας περιστρέφεται αναπτύσσεται τάση από επαγωγή ίση με

$$E = \frac{2}{\pi} \Phi \omega$$

Όσο υπάρχει ροπή η γωνιακή ταχύτητα ω αυξάνεται και μαζί της αυξάνεται και η επαγόμενη τάση.

Η αύξηση της E με την αυξανόμενη ταχύτητα ω προκαλεί μείωση του αρχικού ρεύματος και άρα της ροπής μέχρι το ρεύμα και η ροπή να μηδενιστούν:

$$i > 0 \rightarrow \tau > 0 \rightarrow \alpha > 0 \rightarrow \omega \uparrow \rightarrow E \uparrow \rightarrow i \downarrow = \frac{V_B - E}{R}$$

Η μηχανή φτάνει σε κατάσταση ισορροπίας όπου δεν επιταχύνεται πλέον. Η επαγόμενη ροπή είναι μηδέν

$$\tau = \frac{2}{\pi} \Phi i = 0 \Rightarrow i = 0$$

Για να είναι το ρεύμα μηδέν σημαίνει ότι η επαγωγική τάση έγινε ίση σε μέτρο με την τάση της μπαταρίας

$$i = \frac{V_B - E}{R} = 0 \Rightarrow E = V_B \Rightarrow \frac{2}{\pi} \Phi \omega = V_B \Rightarrow \omega = \frac{\pi V_B}{2\Phi} = \frac{\pi V_B}{2B\pi r \ell} \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{V_B}{2Br\ell}}$$

Αν υπολογίσουμε τη γραμμική ταχύτητα των πλευρών ab και cd παίρνουμε

$$v = \omega r = \frac{V_B}{B(2\ell)}$$

Αυτός είναι ο ίδιος ακριβώς τύπος που πήραμε και στη γραμμική μηχανή (η περιστροφική έχει δύο ράβδους που περιστρέφονται άρα διπλάσιο μήκος από τη γραμμική).

Όπως φαίνεται η συμπεριφορά αυτής της μηχανής κατά την εκκίνηση είναι ίδια με αυτή της γραμμικής μηχανής συνεχούς ρεύματος.

$$\text{Η τιμή της ταχύτητας είναι } \omega = \frac{120}{2 \cdot 0,25 \cdot 0,5 \cdot 1,0} = 480 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Συνοπτικά στην ισορροπία:

$$\sum \tau = \tau_{\text{επαγ}} - \tau_{\text{φορτ}} = 0 \Rightarrow \omega = \sigma \tau \alpha \theta,$$

και η ω υπολογίζεται από τη σχέση

$$\tau_{\text{επαγ}} = \tau_{\text{φορτ}}$$

Στην ισορροπία χωρίς φορτίο

$$\sum \tau = \tau_{\text{επαγ}} = 0 \Rightarrow \omega = \sigma \tau \alpha \theta, \Rightarrow E_{\text{επαγ}} = V_B \Rightarrow i = 0$$

2) Όταν εφαρμοστεί ροπή στον άξονα της μηχανής (π.χ. φορτίο, φρένο) με μέτρο

$$\tau_{\text{φορτ}} = 10 \text{ N} \cdot \text{m}$$

και φορά αντίθετη στην κίνησή της, η συνισταμένη ροπή δεν θα είναι πια μηδέν, ο δρομέας θα επιβραδύνει, η επαγωγική τάση θα μειωθεί, το ρεύμα που ήταν μηδέν θα αυξηθεί και θα εμφανιστεί επαγόμενη ροπή που θα αυξηθεί μέχρι να εξισωθεί με τη ροπή του φορτίου και η μηχανή να ισορροπήσει σε μια μικρότερη ταχύτητα

$$\sum \tau < 0 \Rightarrow \omega \downarrow \Rightarrow E_{\text{επαγ}} = \frac{2}{\pi} \Phi \omega \downarrow \Rightarrow i = \frac{V_B - E_{\text{επαγ}}}{R} \uparrow \Rightarrow \tau_{\text{επαγ}} = \frac{2}{\pi} \Phi i \uparrow \xrightarrow{\text{έως}} \tau_{\text{επαγ}} = \tau_{\text{φορτ}}$$

$$\tau_{\text{επαγ}} = \tau_{\text{φορτ}} \Rightarrow \frac{2}{\pi} \Phi i = \tau_{\text{φορτ}} \Rightarrow i = \frac{\pi \tau_{\text{φορτ}}}{2 \Phi} = \frac{\tau_{\text{φορτ}}}{2 r \ell B} = \frac{10}{2 \cdot 0,5 \cdot 1,0 \cdot 0,25} = 40 \text{ A}$$

$$E_{\text{επαγ}} = V_B - iR = 120 - 40 \cdot 0,3 = 108 \text{ V}$$

$$E_{\text{επαγ}} = \frac{2}{\pi} \Phi \omega \Rightarrow \omega = \frac{\pi E_{\text{επαγ}}}{2 \Phi} = \frac{E_{\text{επαγ}}}{2 r \ell B} = \frac{108}{2 \cdot 0,5 \cdot 1,0 \cdot 0,25} = 432 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$P_{\text{μηχ}} = \tau \omega = 10 \cdot 432 = 4320 \text{ W}$$

$$P_{\text{ηλεκτρ}} = V_B i = 120 \cdot 40 = 4800 \text{ W}$$

Η μηχανή λειτουργεί ως κινητήρας μετατρέποντας ηλεκτρική ενέργεια σε μηχανική.

Οι απώλειες είναι: $P_{\text{απωλ}} = i^2 R = 40^2 \cdot 0,3 = 480 \text{ W}$

Επιβεβαιώνουμε ότι:

$$P_{\text{ηλεκτρ}} = P_{\text{μηχ}} + P_{\text{απωλ}}$$

3) Όταν εφαρμοστεί εξωτερική ροπή στον άξονα της μηχανής με μέτρο

$$\tau_{\text{εξωτ}} = 7,5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

και φορά κατά τη φορά της κίνησής της, η συνισταμένη ροπή δεν θα είναι πια μηδέν και ο δρομέας θα επιταχύνει. Η επαγωγική τάση θα μειωθεί, το ρεύμα που ήταν μηδέν θα αυξηθεί και θα εμφανιστεί επαγόμενη ροπή που θα αυξηθεί μέχρι να εξισωθεί με τη ροπή του φορτίου και η μηχανή να ισορροπήσει σε μια μικρότερη ταχύτητα

$$\sum \tau > 0 \Rightarrow \omega \uparrow \Rightarrow E_{\text{επαγ}} = \frac{2}{\pi} \Phi \omega \uparrow \Rightarrow i = \frac{V_B - E_{\text{επαγ}}}{R} \downarrow \text{ μέχρι να μηδενιστεί και μετά να αλλάξει φορά}$$

Η μηχανή τώρα παράγει ρεύμα και άρα λειτουργεί ως γεννήτρια. Η επαγωγική τάση είναι αντίθετης πολικότητας και μεγαλύτερη από την τάση της μπαταρίας. Επειδή το ρεύμα άλλαξε φορά θα αλλάξει φορά και η επαγόμενη ροπή η οποία όπως αυξάνεται το ρεύμα θα αυξάνεται μέχρι να γίνει αντίθετη με την εξωτερική επιταχύνουσα ροπή και η μηχανή να ισορροπήσει σε μια μεγαλύτερη ταχύτητα.

$$\tau_{επαγ} = \frac{2}{\pi} \Phi i \uparrow \xrightarrow{\text{έως}} \tau_{επαγ} = \tau_{φορτ}$$

$$\tau_{επαγ} = \tau_{φορτ} \Rightarrow \frac{2}{\pi} \Phi i = \tau_{φορτ} \Rightarrow i = \frac{\pi \tau_{φορτ}}{2 \Phi} = \frac{\tau_{φορτ}}{2 r l B} = \frac{7,5}{2 \cdot 0,5 \cdot 1,0 \cdot 0,25} = 30 \text{ A}$$

$$E_{επαγ} = V_B + iR = 120 + 30 \cdot 0,3 = 129 \text{ V}$$

$$E_{επαγ} = \frac{2}{\pi} \Phi \omega \Rightarrow \omega = \frac{\pi E_{επαγ}}{2 \Phi} = \frac{E_{επαγ}}{2 r l B} = \frac{129}{2 \cdot 0,5 \cdot 1,0 \cdot 0,25} = 516 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

4) Αρχικά η μηχανή περιστρέφεται χωρίς φορτίο και είναι σε ισορροπία $\sum \tau = 0$, $E = V_B$, $i = 0$.

Οπότε η ταχύτητά της θα είναι 480 rad/s όπως βρήκαμε στο 1). Ξαφνικά μειώνεται η ένταση του μαγνητικού πεδίου. Αυτό θα προκαλέσει πάλι ένα μεταβατικό φαινόμενο μετά το οποίο η μηχανή θα ισορροπήσει πάλι σε νέα ταχύτητα.

Το μεταβατικό φαινόμενο εξελίσσεται ως εξής. Η μείωση του μαγνητικού πεδίου θα επιφέρει αρχικά μία αντίστοιχη μείωση στην επαγωγική τάση που στην ισορροπία ήταν ως τώρα ίση με την τερματική τάση. Αφού η επαγωγική τάση θα γίνει μικρότερη από την τερματική θα εμφανιστεί πάλι ρεύμα στη ράβδο. Το ρεύμα αυτό θα προέρχεται από την μπαταρία και η δύναμη Laplace που θα προκαλέσει θα έχει ροπή που θα επιταχύνει το δρομέα (σαν κινητήρα) σε μεγαλύτερη ταχύτητα. Η αύξηση της ταχύτητας θα επιφέρει αύξηση της επαγωγικής τάσης έως να εξισωθεί πάλι με την V_B και το ρεύμα να γίνει μηδέν. Μόλις μηδενιστεί το ρεύμα εξαφανίζεται και η ροπή και ο δρομέας θα κινείται πάλι με σταθερή αλλά μεγαλύτερη ταχύτητα.

$$\Phi \downarrow \Rightarrow E_{επαγ} = \frac{2}{\pi} \Phi \omega \downarrow \Rightarrow i = \frac{V_B - E_{επαγ}}{R} \uparrow \Rightarrow \tau_{επαγ} = \frac{2}{\pi} \Phi i \uparrow \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega \uparrow \Rightarrow E_{επαγ} = \frac{2}{\pi} \Phi \omega \uparrow \Rightarrow i = \frac{V_B - E_{επαγ}}{R} \downarrow \xrightarrow{\text{έως}} E_{επαγ} = V_B, i = 0 \text{ και } \tau_{επαγ} = 0$$

Η νέα της τερματική ταχύτητα βρίσκεται πάλι από τον τύπο

$$E = V_B \Rightarrow \frac{2}{\pi} \Phi' \omega' = V_B \Rightarrow \omega' = \frac{\pi V_B}{2 \Phi'} = \frac{V_B}{2 r l B'} = \frac{120}{2 \cdot 0,5 \cdot 1,0 \cdot 0,2} = 600 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Με πολύ απλά λόγια αφού η αρχική και η τελική επαγωγική τάση θα είναι ίσες με την τάση της μπαταρίας, το γινόμενο $\Phi \omega$ θα πρέπει να παραμείνει σταθερό, οπότε αν μειωθεί η Φ θα πρέπει να αυξηθεί ανάλογα η ω .

$$E = K \Phi \omega = K \Phi \downarrow \omega \uparrow = K \Phi' \omega' \Rightarrow \omega' = \omega \frac{\Phi}{\Phi'} = 480 \frac{0,25}{0,2} = 600 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Μείωση της μαγνητικής ροής προκαλεί αύξηση της ταχύτητας της μηχανής. Η ίδια ιδιότητα παρατηρήθηκε και στη γραμμική μηχανή και ισχύει και στη λειτουργία των πραγματικών μηχανών συνεχούς ρεύματος.