

ΑΡΧΕΣ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΩΝ (επανάληψη)

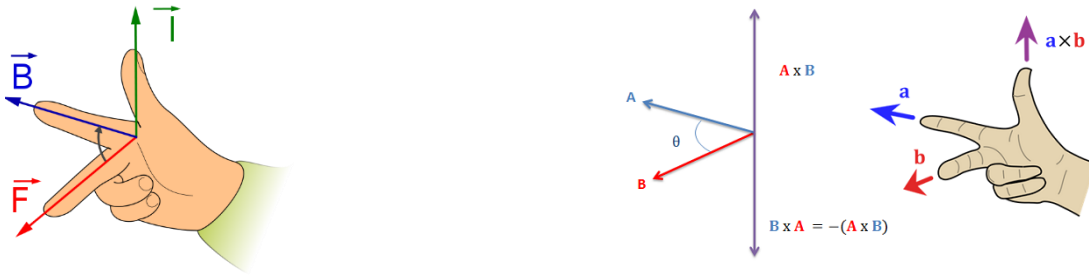
Για την ανάλυση της λειτουργίας τους θα χρησιμοποιήσουμε τους εξής τέσσερις νόμους

1) Δύναμη Laplace :

$$\vec{F}_L = I \vec{\ell} \times \vec{B}$$

$F_L = BI\ell$ όταν η ράβδος είναι κάθετη στις δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου

Δίνει τη δύναμη που δέχεται από μαγνητικό πεδίο B ευθύγραμμος ρευματοφόρος αγωγός του οποίου μήκος ℓ βρίσκεται μέσα στο μαγνητικό πεδίο και διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα I . Το διάνυσμα $\vec{\ell}$ είναι στη διεύθυνση του αγωγού με φορά αυτή του ρεύματος που τον διαρρέει. Η κατεύθυνση της δύναμης Laplace βρίσκεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού για το εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

**2) Νόμος της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής του Faraday:**

$$E = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{\ell}$$

$E = Bv\ell$ όταν και τα τρία διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους

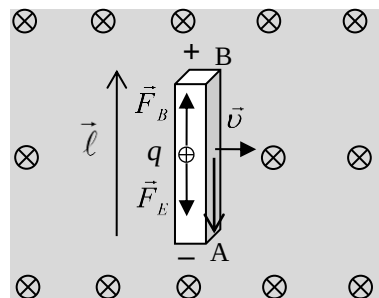
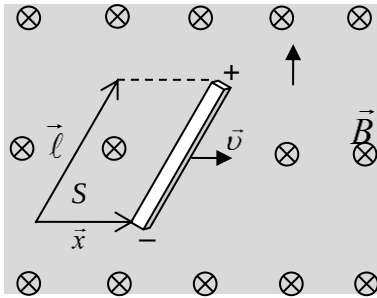
Δίνει την επαγωγική τάση που αναπτύσσεται στα άκρα ευθύγραμμου αγωγού που κινείται μέσα σε μαγνητικό πεδίο B . Η φορά του διανύσματος $\vec{v} \times \vec{B}$ καθορίζει την πολικότητα της τάσης της ράβδου καθώς το διάνυσμα $\vec{v} \times \vec{B}$ δείχνει από το αρνητικό προς το θετικό άκρο της ράβδου (φορά της δύναμης Lorentz που δέχεται ένα θετικό φορτίο). Το διάνυσμα $\vec{\ell}$ έχει μέτρο όσο το μήκος του αγωγού που βρίσκεται μέσα στο πεδίο, διεύθυνση κατά μήκος του αγωγού και φορά αυτή που σχηματίζει τη μικρότερη γωνία με το $\vec{v} \times \vec{B}$. Η παραπάνω έκφραση του νόμου του Faraday για ευθύγραμμο αγωγό εξάγεται είτε από την γενική μορφή του νόμου

$$E_{\text{επαγ}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(\vec{B} \cdot \vec{S})}{dt} = -\vec{B} \cdot \frac{d(\vec{\ell} \times \vec{x})}{dt} = -\vec{B} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} \times \vec{\ell} = -\vec{B} \cdot \vec{v} \times \vec{\ell} = -\vec{B} \times \vec{v} \cdot \vec{\ell} = \vec{v} \times \vec{B} \cdot \vec{\ell}$$

είτε από την εξισορρόπηση των ηλεκτροστατικών και μαγνητικών δυνάμεων σε ένα ελεύθερο φορτίο του αγωγού. Όταν η δύναμη Laplace διαχωρίσει τα θετικά από τα αρνητικά φορτία του αγωγού θα δημιουργηθεί στον αγωγό ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ που θα εμποδίσει την περαιτέρω μετακίνηση φορτίων. Θυμίζουμε ότι η διαφορά δυναμικού $\Delta V_{AB} = V_B - V_A$ (που είναι το έργο ανά μονάδα φορτίου που απαιτείται για τη μετακίνηση ενός φορτίου μεταξύ δύο σημείων του πεδίου ενάντια στη δύναμη του πεδίου) δίνεται από

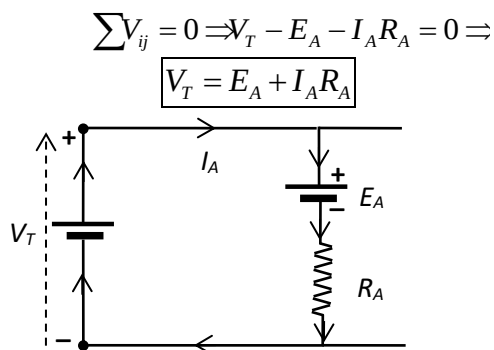
$$\Delta V_{AB} = -\frac{W_E(A \rightarrow B)}{q} = -\frac{\vec{F}_E \cdot \Delta \vec{x}_{AB}}{q} = -\frac{q\vec{E} \cdot \vec{\ell}}{q} = -\vec{E} \cdot \vec{\ell}$$

$$\vec{F}_E = -\vec{F}_B \Rightarrow q\vec{E} = -q\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow \vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow \vec{E} \cdot \vec{\ell} = -\vec{v} \times \vec{B} \cdot \vec{\ell} \Rightarrow E_{\text{επαγ}} \equiv \Delta V_{AB} = \vec{v} \times \vec{B} \cdot \vec{\ell}$$

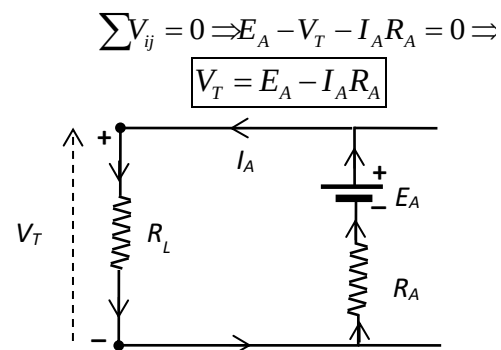


3) Νόμος των τάσεων του Kirchhoff

Η μηχανή «παίρνει» ρεύμα (κινητήρας)



Η μηχανή «δίνει» ρεύμα (γεννήτρια)



Ισχύς $P = VI$

Για ωμική αντίσταση όπου $V = IR$ η ισχύς που καταναλώνεται είναι $P = I^2 R$

4) Θεμελιώδης νόμος της μηχανικής του Νεύτωνα

$\sum F = ma$ για τη μεταφορική κίνηση

Ισχύς $P = Fv$

$\sum \tau = I\alpha$ για τη στροφική κίνηση

Ισχύς $P = \tau\omega$

ΟΙ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΜΗΧΑΝΕΣ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΡΕΥΜΑΤΟΣ

Γραμμικές μηχανές δεν υπάρχουν, επειδή είναι πρακτικά ανέφικτο να κατασκευαστούν. Το μέγεθος τους θα ήταν τεράστιο. Όμως σε αυτές μπορούμε εύκολα να δείξουμε όλα τα φαινόμενα που συμβαίνουν στις πραγματικές περιστροφικές μηχανές συνεχούς ρεύματος και άρα αποτελούν καλό εισαγωγικό παιδαγωγικό παράδειγμα.

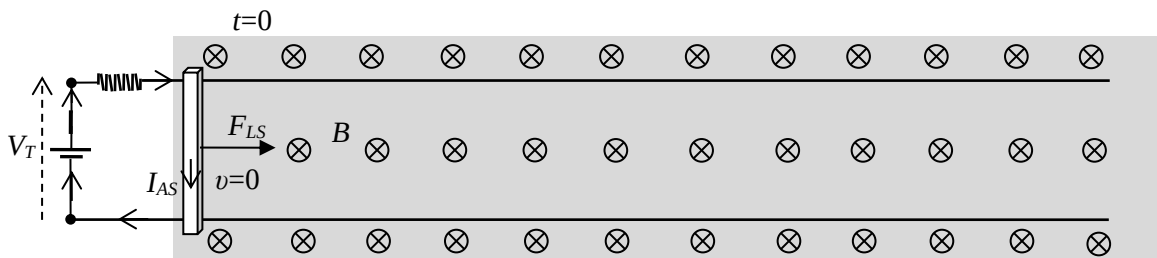
Ο ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΚΙΝΗΤΗΡΑΣ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΡΕΥΜΑΤΟΣ



Η αγώγιμη ράβδος μήκους ℓ μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβές στις λείες αγώγιμες οριζόντιες ράγες. Η όλη διάταξη θεωρούμε ότι παρουσιάζει ωμική αντίσταση R_A (που προέρχεται κυρίως από τη ράβδο) και βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης B . Τη ράβδο που είναι το κινητό μέρος της μηχανής την ονομάζουμε οπλισμό (Armature). Στους ακροδέκτες της διάταξης μπορούμε να εφαρμόσουμε ηλεκτρική τάση V_T (τερματική=Terminal) κλείνοντας τον διακόπτη.



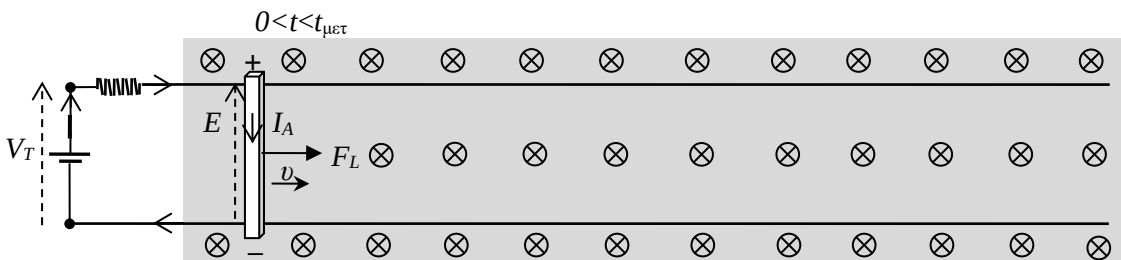
Όταν τη χρονική στιγμή $t=0$ κλείσουμε τον διακόπτη η ράβδος θα αρχίσει να διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα : $V_T = I_{AS} R_A \Rightarrow I_{AS} = \frac{V_T}{R_A}$ ρεύμα εκκίνησης (Start) οπλισμού (Armature).



Σε αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα μέσα σε μαγνητικό πεδίο εμφανίζεται δύναμη Laplace από το μαγνητικό πεδίο : $F_{LS} = B I_S \ell$

Αφού εμφανίστηκε συνισταμένη δύναμη η ράβδος θα επιταχυνθεί και θα αποκτήσει ταχύτητα

$$\sum F = F_{LS} > 0 \Rightarrow a > 0$$



Εφόσον η ράβδος αποκτά ταχύτητα έχουμε πλέον αγώγιμη ράβδο που κινείται μέσα σε μαγνητικό πεδίο και συνεπώς εμφανίζεται στα άκρα της ηλεκτρεγερτική δύναμη από επαγωγή (νόμος Faraday).

Την πολικότητα της επαγωγικής ΗΕΔ μπορούμε να τη βρούμε από τη δύναμη Lorentz που θα δεχτεί ένα ελεύθερο θετικό φορτίο της ράβδου που κινείται προς τα δεξιά μαζί με τη ράβδο $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. Το θετικό φορτίο θα δεχτεί δύναμη προς τα πάνω. Άρα το πάνω άκρο της ράβδου θα είναι ο θετικός πόλος και το κάτω ο αρνητικός. Επίσης μπορούμε να βρούμε την πολικότητα της επαγωγικής ΗΕΔ από το νόμο του Lenz: *Το επαγωγικό αποτέλεσμα έχει τέτοια φορά ώστε να αναιρεί την αιτία που το προκάλεσε.* Η αιτία που προκάλεσε την επαγωγική τάση είναι το ρεύμα I_A που δημιουργεί η πηγή V_T στο κύκλωμα με τις ράγες και τη ράβδο. Η ράβδος πρέπει να γίνει πηγή που θα δημιουργεί σε αυτό το κύκλωμα αντίθετο ρεύμα. Δηλαδή πηγή αντίθετης πολικότητας από την V_T : $E = Bv\ell$

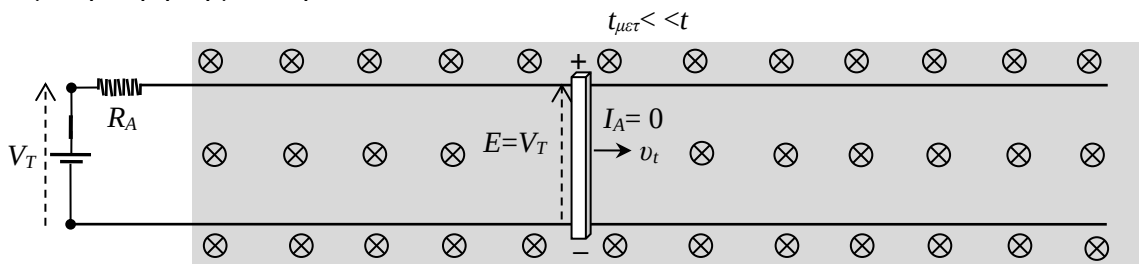
Ως αποτέλεσμα της εμφάνισης της επαγωγικής τάσης, το ρεύμα της ράβδου θα μειωθεί (έχουμε δύο αντίθετες μπαταρίες στο κύκλωμα)

$$V_T = E + I_A R_A \Rightarrow I_A = \frac{V_T - E}{R_A} \Rightarrow I_A \downarrow$$

και άρα και η δύναμη Laplace θα μειωθεί: $F_L = BI_A \ell \Rightarrow F_L \downarrow$

Για κάποιο μεταβατικό χρονικό διάστημα $t_{μετ}$, η δύναμη Laplace συνεχώς θα μειώνεται και η ράβδος θα κάνει επιταχυνόμενη κίνηση με μεταβλητή και διαρκώς μειούμενη επιτάχυνση

Η δύναμη Laplace τελικά θα μηδενιστεί και στο εξής η ράβδος θα πάψει να επιταχύνεται και θα κινείται με σταθερή ταχύτητα. Όταν συμβεί αυτό, δηλαδή η ράβδος ισορροπήσει $a=0$, λέμε ότι η μηχανή βρίσκεται στη μόνιμη ή σταθερή κατάσταση. Την σταθερή ταχύτητα που απέκτησε τελικά την λέμε ορική ή τερματική v_t .



Η επαγωγική ηλεκτρεγερτική δύναμη στη μόνιμη κατάσταση θα είναι: $E = Bv_t \ell$

που θα οδηγεί σε ρεύμα ράβδου: $V_T = E + I_A R_A \Rightarrow I_A = \frac{V_T - E}{R_A} = \frac{V_T - Bv_t \ell}{R_A}$

και δύναμη Laplace: $F_L = BI_A \ell = B\ell \cdot \frac{V_T - Bv_t \ell}{R_A}$

Την τερματική ταχύτητα τη βρίσκουμε από το μηδενισμό της συνισταμένης δύναμης, που στην περίπτωση μας είναι μόνο η δύναμη Laplace:

$$F_L = 0 \Rightarrow B\ell \cdot \frac{V_T - Bv_t \ell}{R_A} = 0 \Rightarrow V_T - B\ell v_t = 0 \Rightarrow v_t = \frac{V_T}{B\ell}$$

Μπορείτε να ελέγξετε ότι η έκφραση $\frac{V_T}{B\ell}$ έχει μονάδες ταχύτητας

$$[v_t] = \left[\frac{V_T}{B\ell} \right] = \frac{\text{V}}{\text{T} \cdot \text{m}} = \frac{\text{V}}{\frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}} \cdot \text{m}} = \frac{\text{V} \cdot \text{A}}{\text{N}} = \frac{\text{W}}{\text{N}} = \frac{\frac{\text{J}}{\text{s}}}{\text{N}} = \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{N} \cdot \text{s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Άρα στη μόνιμη κατάσταση : } F_L = 0, \quad E = Bv_t \ell = B\ell \frac{V_T}{B\ell} = V_T \text{ και } I_A = \frac{V_T - E}{R_A} = 0$$

Δηλαδή όταν η μηχανή λειτουργεί χωρίς φορτίο (δεν υπάρχει εξωτερική δύναμη που να σπρώχνει τη ράβδο προς τα αριστερά, όπως η τριβή ή κάποια άλλη δύναμη που πρέπει να υπερνικηθεί όπως ένα φορτίο που έχουμε τοποθετήσει σε επαφή με τη ράβδο και το οποίο θέλουμε να σπρώξουμε προς τα δεξιά) τότε η επαγωγική τάση είναι ίση με την τερματική τάση $E = V_T$ και η μηχανή δεν διαρρέεται από ρεύμα $I_A = 0$

Χρονική εξάρτηση μεγεθών - χρόνος αποκατάστασης ισορροπίας

Μπορούμε να υπολογίσουμε τη χρονική εξάρτηση των μεταβλητών και τον χρόνο αποκατάστασης έως τη μόνιμη κατάσταση λύνοντας την εξίσωση του Νεύτωνα. Το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με την ελεύθερη πτώση λαμβάνοντας υπόψη και την αντίσταση του αέρα : σταθερή δύναμη επιτάχυνσης $F = \text{βάρος}$, αντίσταση αέρα ανάλογη με την ταχύτητα.

$$\sum F = F_L = BI_A \ell = B\ell \cdot \frac{V_T - Bv_t \ell}{R_A} = \frac{B\ell V_T}{R_A} - \frac{B^2 \ell^2}{R_A} \cdot v_t = F - b \cdot v_t$$

$$\text{όπου } F = \frac{B\ell V_T}{R_A}, \quad b = \frac{B^2 \ell^2}{R_A} \text{ και } v_t = \frac{F}{b} = \frac{V_T}{B\ell} \text{ από } \sum F = 0$$

$$\sum F = ma \Rightarrow F - b \cdot v_t = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{b}{m} (F - v_t) = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{v_t - v}{\tau} = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{dv}{v_t - v} = \frac{dt}{\tau}} \quad (1)$$

Η σταθερά $\tau = \frac{m}{b} = \frac{mR_A}{B^2 \ell^2}$ έχει μονάδες χρόνου και ονομάζεται σταθερά χρόνου της μηχανής

$$\left[\frac{mR_A}{B^2 \ell^2} \right] = \frac{\text{kg} \cdot \Omega}{\text{T}^2 \text{m}^2} = \frac{\text{kg} \cdot \Omega}{\frac{\text{N}^2}{\text{A}^2 \text{m}^2} \cdot \text{m}^2} = \frac{\text{kg} \cdot \Omega \text{A}^2}{\text{N}^2} = \frac{\text{kg} \cdot \text{W}}{\text{N}^2} = \frac{\text{kg} \cdot \frac{\text{J}}{\text{s}}}{\text{N} \cdot \text{N}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{N} \cdot \text{m}}{\text{N} \cdot \text{N} \cdot \text{s}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{s}} = \text{s}$$

Έτσι οι δύο πλευρές της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης (1) είναι αδιάστατες, δηλαδή καθαροί αριθμοί, δεν έχουν μονάδες μέτρησης. Οι μονάδες της αριστερής πλευράς είναι ταχύτητα δια ταχύτητα, $\frac{\text{m/s}}{\text{m/s}} = 1$ και της δεξιάς χρόνος δια χρόνος $\frac{\text{s}}{\text{s}}$.

Οι δύο πλευρές μπορούν να ολοκληρωθούν απευθείας και ολοκληρώνοντας παίρνουμε:

$$\frac{dv}{v_t - v} = \frac{dt}{\tau} \Rightarrow \int_0^v \frac{dv}{v_t - v} = \frac{1}{\tau} \int_0^t dt$$

Αλλάζουμε μεταβλητή στο πρώτο ολοκλήρωμα : $x = v_t - v \Rightarrow dx = -dv$

$$-\int_{v_t}^{v_t - v} \frac{dx}{x} = \frac{1}{\tau} \int_0^t dt \Rightarrow \ln x \Big|_{v_t}^{v_t - v} = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow \ln(v_t - v) - \ln v_t = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow \ln \left(\frac{v_t - v}{v_t} \right) = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow \frac{v_t - v}{v_t} = e^{-t/\tau} \Rightarrow$$

$$v(t) = v_t (1 - e^{-t/\tau}) \Rightarrow \boxed{v(t) = \frac{V_T}{B\ell} (1 - e^{-t/\tau})}$$

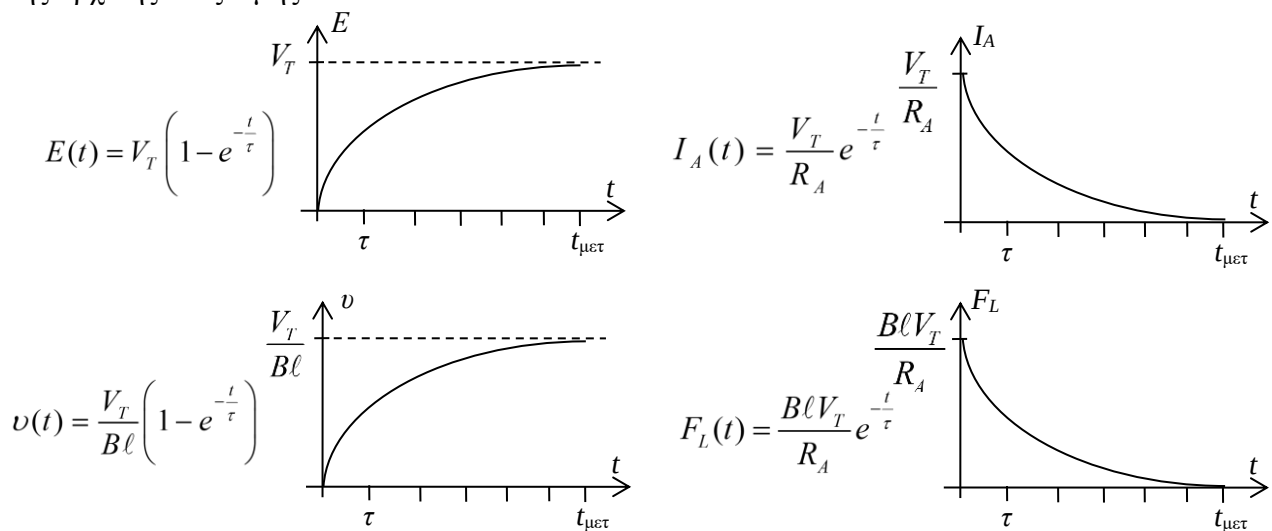
$$E(t) = Bv(t)\ell = B\ell v_t (1 - e^{-t/\tau}) \Rightarrow \boxed{E(t) = V_T (1 - e^{-t/\tau})}$$

$$I_A(t) = \frac{V_T - E(t)}{R_A} = \frac{V_T}{R_A} - \frac{V_T}{R_A} (1 - e^{-t/\tau}) \Rightarrow \boxed{I_A(t) = \frac{V_T}{R_A} e^{-t/\tau}}$$

$$F_L(t) = B I_A(t) \ell \Rightarrow F_L(t) = \frac{B \ell V_T}{R_A} e^{-t/\tau}$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε ως χρόνο μετάβασης στη μόνιμη κατάσταση τις 6 σταθερές χρόνου: $t_{\text{μετ}} = 6\tau$

Τότε $e^{-\frac{6\tau}{\tau}} = e^{-6} = 0,00248$ και $1 - e^{-\frac{6\tau}{\tau}} = 1 - e^{-6} = 1 - 0,00248 = 0,99752$. Μετά τη διέλευση αυτού του χρονικού διαστήματος τα μεγέθη της ταχύτητας και της επαγωγικής τάσης έχουν φτάσει στο 99,752% της τελικής τους τιμής ενώ το ρεύμα και η δύναμη έχουν πέσει στο 0,248 % της αρχικής τους τιμής, δηλαδή έχουν πρακτικά μηδενιστεί. Ήδη στις τρεις σταθερές χρόνου $e^{-\frac{3\tau}{\tau}} = e^{-3} = 0,04979$ και $1 - e^{-\frac{3\tau}{\tau}} = 1 - e^{-3} = 1 - 0,04979 = 0,95021$ η ταχύτητα και η επαγωγική τάση έχουν ανέβει στο 95% της τελικής τους τιμής και το ρεύμα και η δύναμη έχουν μειωθεί στο 5% της αρχικής τους τιμής.



Για να βρούμε την απόσταση x που καλύπτει η ράβδος μέχρι να βρεθεί σε κατάσταση ισορροπίας, ολοκληρώνουμε την εξίσωση της ταχύτητας :

$$\frac{dx}{dt} = v(t) = v_t (1 - e^{-t/\tau}) \Rightarrow \int_0^x dx = v_t \int_0^t (1 - e^{-t/\tau}) dt \Rightarrow$$

$$x(t) = v_t t - v_t \int_0^t e^{-t/\tau} dt = v_t t + v_t \tau \int_0^{-t/\tau} e^y dy \Rightarrow x(t) = v_t t + v_t \tau e^y \Big|_0^{-t/\tau} \Rightarrow$$

$$x(t) = v_t t - v_t \tau (e^{-t/\tau} - 1) = v_t t + v_t \tau (1 - e^{-t/\tau})$$

Υπολογίζοντας την παραπάνω έκφραση για $t=6\tau$ βρίσκουμε το διάστημα που θα πρέπει να διανύσει η ράβδος για να βρεθεί η μηχανή στη μόνιμη κατάσταση

$$x(6\tau) = v_t (6\tau - \tau) + v_t \tau e^{-6\tau/\tau} = 5 \cdot v_t \tau + 0,00248 \cdot v_t \tau \approx 5 \cdot v_t \tau$$

Ισχύς – Ενέργεια

Στη μόνιμη κατάσταση δεν απορροφάται εισερχόμενη ηλεκτρική ισχύς εφόσον η διάταξη δεν διαρρέεται από ρεύμα αλλά και ούτε λαμβάνεται κάποια χρήσιμη μηχανική ισχύς αφού η δύναμη που αναπτύσσεται από τον κινητήρα μηδενίζεται.

Οι στιγμιαίες τιμές της ισχύος κατά τη μεταβατική περίοδο είναι :

$$\text{Εισερχόμενη ηλεκτρική ισχύς: } P_{in}(t) = V_T I_A(t) = \frac{V_T^2}{R_A} e^{-t/\tau}$$

Ωμικές απώλειες σε θερμότητα : $P_{απωλ}(t) = I_A^2(t)R_A = \frac{V_T^2}{R_A} e^{-2t/\tau}$

Ισχύς που αναπτύσσει την επαγωγική τάση $P_{αναπτ}(t) = E(t)I_A(t) = \frac{V_T^2}{R_A} (1 - e^{-t/\tau}) e^{-t/\tau}$

Λαμβανόμενη μηχανική ισχύς : $P_{out}(t) = F_L(t)v(t) = \frac{V_T^2}{R_A} e^{-t/\tau} (1 - e^{-t/\tau})$

Παρατηρούμε ότι ισχύει η αρχή διατήρησης της ενέργειας : $P_{in}(t) = P_{out}(t) + P_{απωλ}(t)$

Επίσης η ισχύς που χρησιμοποιείται για την ανάπτυξη της επαγωγικής τάσης μετατρέπεται όλη σε μηχανική ισχύ (εφόσον αγνοούμε μηχανικές τριβές) : $P_{αναπτ}(t) = P_{out}(t) \Rightarrow E(t)I_A(t) = F_L(t)v(t)$

Η συνολική ηλεκτρική ενέργεια που παρείχε η ηλεκτρική πηγή μέχρι να βρεθεί η μηχανή στη μόνιμη κατάσταση είναι :

$$E_{in} = \int_0^\infty P_{in} dt = \frac{V_T^2}{R_A} \int_0^\infty e^{-t/\tau} dt = \frac{V_T^2}{R_A} (-\tau) \int_0^\infty e^y dy = -\frac{\tau V_T^2}{R_A} (e^{-\infty} - e^0) = \frac{\tau V_T^2}{R_A} = \frac{m V_T^2}{B^2 \ell^2}$$

Πάνω στην ωμική αντίσταση μετατράπηκε σε θερμότητα ενέργεια:

$$E_{απωλ} = \int_0^\infty P_{απωλ} dt = \frac{V_T^2}{R_A} \int_0^\infty e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = \frac{V_T^2}{R_A} \left(-\frac{\tau}{2}\right) \int_0^\infty e^y dy = -\frac{\tau V_T^2}{2R_A} (e^{-\infty} - e^0) = \frac{\tau V_T^2}{2R_A} = \frac{m V_T^2}{2B^2 \ell^2} = \frac{E_{in}}{2}$$

Παρατηρούμε ότι οι ωμικές απώλειες ενέργειας είναι ανεξάρτητες της ωμικής αντίστασης R_A και είναι ακριβώς ίσες με την μισή ενέργεια από αυτήν που παρείχε η πηγή.

Άρα η μηχανική ενέργεια που αποδόθηκε στη ράβδο θα πρέπει να είναι επίσης η μισή από αυτήν που παρείχε η πηγή. Πράγματι, λαμβανόμενη μηχανική ισχύς:

$$E_{out} = \int_0^\infty P_{out} dt = \frac{V_T^2}{R_A} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\tau}} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) dt = \frac{V_T^2}{R_A} \left(-\tau + \frac{\tau}{2}\right) \int_0^\infty e^y dy = -\frac{\tau V_T^2}{2R_A} (e^{-\infty} - e^0) = \frac{\tau V_T^2}{2R_A} = \frac{m V_T^2}{2B^2 \ell^2} = \frac{E_{in}}{2}$$

Η μισή ενέργεια της πηγής χάθηκε σε θερμότητα πάνω στις ωμικές αντιστάσεις και η υπόλοιπη μισή μετατράπηκε σε μηχανική ενέργεια με τη μορφή της κινητικής ενέργειας της ράβδου.

Επιβεβαιώνουμε ότι η τελική κινητική ενέργεια της ράβδου είναι πράγματι

$$K = \frac{1}{2} m v_t^2 = \frac{1}{2} m \frac{V_T^2}{B^2 \ell^2} = \frac{E_{in}}{2}$$

Αριθμητικό παράδειγμα με ρεαλιστικά μεγέθη: Γραμμικές μηχανές δεν υπάρχουν επειδή το μέγεθός τους θα ήταν εκατοντάδες μέτρα ή και χιλιόμετρα και είναι πρακτικώς αδύνατον να δημιουργηθεί τέτοιου μεγέθους σταθερό μαγνητικό πεδίο. Οι πραγματικές μηχανές είναι περιστρεφόμενες. Τροφοδοτούνται από πηγές με τάση δεκάδων ή μερικών εκατοντάδων βολτ $V_T \sim 100 \text{ V}$ και έχουν αντιστάσεις οπλισμού μερικών δεκάτων του ωμ ή το πολύ ένα ωμ $R_A \sim 0,1 \text{ έως } 1 \Omega$. Η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό τους είναι της τάξης των δεκάτων του τέσλα $B \sim 0,1 \text{ έως } 1 \text{ T}$. Οι ακτίνες περιστροφής τους, ανάλογα με το μέγεθός τους είναι συνήθως κοντά στα δέκα εκατοστά ή και μερικές δεκάδες εκατοστά έως και περίπου ένα μέτρο για μεγάλες μηχανές $r \sim 0,1 \text{ έως } 1 \text{ m}$. Περιστρέφονται με ταχύτητες που φτάνουν τις μερικές χιλιάδες στροφές το λεπτό (rpm) $n \sim \text{έως } 5.000 \text{ rpm}$. Ανάλογα με το μέγεθός και την ταχύτητα περιστροφής της μηχανής ο περιστρεφόμενος αγωγός μπορεί να έχει ταχύτητες της τάξης των δεκάδων ή και μερικών εκατοντάδων μέτρων το δευτερόλεπτο, m/s: $v = \omega r = \frac{2\pi}{60} n r = \frac{\pi}{30} 5.000 \cdot 0,3 = 157 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Το ενεργό μήκος του οπλισμού τους είναι δεκάδες εκατοστά έως και μερικά μέτρα $\ell \sim 0,1 \text{ έως } 10 \text{ m}$. Το ενεργό μήκος μπορεί να είναι μερικά μέτρα καθώς εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι ο αγωγός εδώ είναι ένα

ορθογώνιο πλαίσιο που μπορούμε να επαναλάβουμε στη μορφή μικρών, για να χωράνε μέσα στο μαγνητικό πεδίο, αλλά πολλών σπειρών (N) έτσι ώστε το ενεργό του μήκος που είναι το μήκος των δύο πλευρών, μήκους d , που κόβουν τις δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου όπως περιστρέφονται να πολλαπλασιαστεί επί N : $\ell = N \cdot 2d$. Π.χ. για $d=10$ cm με $N=5$ σπείρες το ενεργό μήκος είναι $\ell = N \cdot 2d = 5 \cdot 2 \cdot 0,1 = 1$ m.

Έστω μια γραμμική μηχανή που τροφοδοτείται από μπαταρία με τάση $V_T = 100$ V και διαθέτει τα εξής χαρακτηριστικά : $B = 0,5$ T , $R_A = 0,5$ Ω , $\ell = 2$ m , $m = 1$ kg . Να υπολογίσετε :

- Την ταχύτητα του οπλισμού στη μόνιμη κατάσταση
- Τη σταθερά χρόνου της μηχανής
- Το χρόνο μετάβασης στη μόνιμη κατάσταση
- Το διανυθέν μήκος μέχρι να επιτευχθεί η μόνιμη κατάσταση
- Το ρεύμα κατά την εκκίνηση της μηχανής
- Τη δύναμη Laplace κατά την εκκίνηση της μηχανής
- Την ηλεκτρική ενέργεια που παρείχε η πηγή
- Την κινητική ενέργεια του οπλισμού

$$\text{Τερματική ταχύτητα : } v_t = \frac{V_T}{B\ell} = \frac{100}{0,5 \cdot 2} = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Σταθερά χρόνου: } \tau = \frac{mR_A}{B^2 \ell^2} = \frac{1 \cdot 0,5}{0,5^2 \cdot 2^2} = 0,5 \text{ s}$$

$$\text{Μεταβατικό διάστημα: } t_{\text{μετ}} = 6\tau = 6 \cdot 0,5 = 3 \text{ s}$$

$$\text{Μήκος μετάβασης: } x_{\text{μετ}} = 5v_t \tau = 5 \cdot 100 \cdot 0,5 = 250 \text{ m}$$

$$\text{Ρεύμα εκκίνησης: } I_{AS} = \frac{V_T}{R_A} = \frac{100}{0,5} = 200 \text{ A}$$

$$\text{Δύναμη εκκίνησης: } F_{LS} = BI_{AS}\ell = 0,5 \cdot 200 \cdot 2 = 200 \text{ N}$$

$$\text{Ηλεκτρική ενέργεια που παρασχέθηκε : } E_{in} = \frac{\tau V_T^2}{R_A} = \frac{0,5 \cdot 100^2}{0,5} = 10.000 \text{ J}$$

$$\text{Κινητική ενέργεια οπλισμού: } K = \frac{1}{2} m v_t^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 100^2 = 5.000 \text{ J}$$

Το πρόβλημα της εκκίνησης

$$\text{Το ρεύμα που διαρρέει τη μηχανή δίνεται από τον τύπο : } I_A = \frac{V_T - E}{R_A}$$

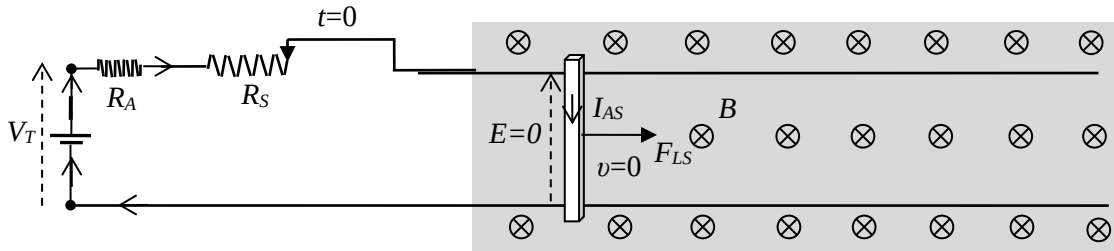
Τη στιγμή της εκκίνησης όπου δεν έχει δημιουργηθεί ακόμα επαγωγική τάση το ρεύμα είναι:

$$I_{AS} = \frac{V_T}{R_A}$$

και όπως υπολογίσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, μπορεί να πάρει πολύ μεγάλες τιμές, της τάξης των εκατοντάδων αμπερ, που να καταστρέψουν την μηχανή. Π.χ. για $R_A \sim 0,1$ Ω και $V_T \sim 100$ V

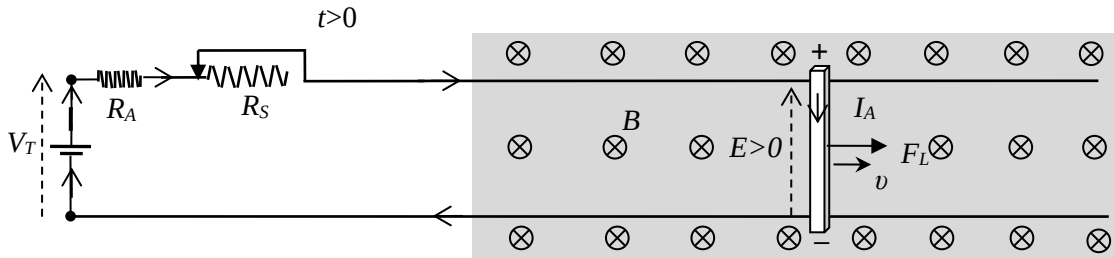
$$I_{AS} = \frac{V_T}{R_A} \sim \frac{100}{0,1} = 1000 \text{ A}$$

Για να αποφύγουμε αυτό το πρόβλημα, στις μηχανές συνεχούς ρεύματος, συνδέουμε μια μεγάλη μεταβλητή αντίσταση εκκίνησης R_s σε σειρά με την αντίσταση του οπλισμού R_A .



Έτσι το ρεύμα κατά την εκκίνηση θα δίνεται από τον τύπο : $I_{AS} = \frac{V_T}{R_A + R_S}$

Όταν θα έχει αναπτυχθεί η επαγωγική τάση τότε γυρίζουμε τη μεταβλητή αντίσταση R_S στο μηδέν.

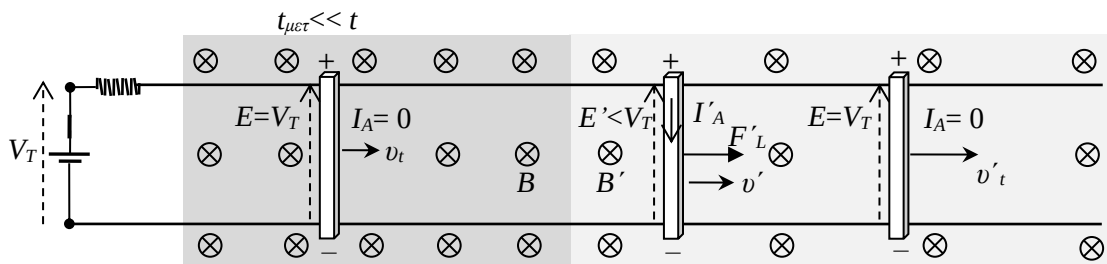


Η τιμή της αντίστασης εκκίνησης R_S καθορίζεται από το μέγιστο επιτρεπτό ρεύμα που θέλουμε να έχουμε. Π.χ. έστω ότι στη μηχανή του προηγούμενου παραδείγματος με $V_T = 100 \text{ V}$ και $R_A = 0,5 \Omega$, δεν θέλουμε το ρεύμα του οπλισμού να ξεπεράσει την τιμή $I_{\max} = 50 \text{ A}$.

$$\text{Τότε : } I_{AS} \leq I_{\max} \Rightarrow \frac{V_T}{R_A + R_S} \leq I_{\max} \Rightarrow R_S \geq \frac{V_T}{I_{\max}} - R_A \Rightarrow R_S \geq \frac{100}{50} - 0,5 = 1,5 \Omega$$

Επιπτώσεις μιας μεταβολής του μαγνητικού πεδίου

Έστω ότι η μηχανή βρίσκεται στην σταθερή κατάσταση λειτουργίας της και η ράβδος κινείται με σταθερή ταχύτητα $v_t = 100 \text{ m/s}$ και επαγωγική τάση ίση με την εξωτερική τάση στους ακροδέκτες των ραγών $E = V_T$. Ποιες θα είναι οι επιπτώσεις στη λειτουργία της μηχανής αν η ράβδος εισέλθει σε περιοχή όπου το μαγνητικό πεδίο έχει μειωθεί κατά π.χ. 20% : $B \rightarrow B' = 0,8 \cdot B$?



Η μείωση του μαγνητικού πεδίου θα επιφέρει αρχικά μία αντίστοιχη μείωση στην επαγωγική τάση που στην ισορροπία ήταν ως τώρα ίση με την τερματική τάση

$$E' = B'v_t\ell = 0,8Bv_t\ell = 0,8E = 0,8V_T \quad \downarrow$$

Αφού η επαγωγική τάση θα γίνει μικρότερη από την τερματική θα εμφανιστεί πάλι ρεύμα στη ράβδο

$$I'_A = \frac{V_T - E'}{R_A} = \frac{V_T - 0,8V_T}{R_A} = 0,2 \frac{V_T}{R_A} \quad \uparrow$$

Το ρεύμα αυτό, που έχει φορά προς τα κάτω, θα προκαλέσει πάλι την εμφάνιση δύναμης Laplace προς τα δεξιά που θα επιταχύνει τη ράβδο σε μεγαλύτερη ταχύτητα. Αυτό θα προκαλέσει αύξηση της επαγωγικής τάσης έως να εξισωθεί πάλι με την V_T . Μετά το μεταβατικό αυτό φαινόμενο το ρεύμα

και η δύναμη Laplace τελικά θα μηδενιστούν και η ράβδος θα κινείται πάλι με σταθερή **αλλά μεγαλύτερη ταχύτητα**.

Η νέα της τερματική ταχύτητα βρίσκεται πάλι από τον τύπο

$$v'_t = \frac{V_T}{B'\ell} = \frac{V_T}{0,8B\ell} = \frac{v_t}{0,8} = \frac{100}{0,8} = 125 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Οπότε μείωση του μαγνητικού πεδίου προκαλεί αύξηση της ταχύτητας της μηχανής.

Η ένταση του μαγνητικού πεδίου ελέγχεται από το ρεύμα διέγερσης.

Επίδραση της μεταβολής της τάσης εισόδου

Επειδή η ταχύτητα είναι ανάλογη της τάσης εισόδου $v_t = \frac{V_T}{B\ell}$, θα μεταβάλλεται ανάλογα.

Έστω ότι η μηχανή είναι σε ισορροπία $V_T = E$. Αν μειώσουμε την τάση εισόδου $V_T \rightarrow V'_T < V_T$ η ταχύτητα και η επαγωγική τάση $E = Bv\ell$, δεν θα μεταβληθούν στιγμιαία. Η επαγωγική τάση θα είναι στιγμιαία μεγαλύτερη από την τάση εισόδου $E > V'_T$ και θα εμφανιστεί ρεύμα στον οπλισμό της μηχανής με φορά αντίθετη από το ρεύμα που δημιουργεί η V_T . Το ρεύμα αυτό θα προκαλέσει δύναμη Laplace αντίθετη με την φορά κίνησης της ράβδου και θα την επιβραδύνει σε χαμηλότερη ταχύτητα $v'_t < v_t$. Αυτό θα μειώσει την επαγωγική τάση $E' = Bv'_t\ell$ μέχρι να εξισωθεί πάλι με την τάση εισόδου. Τότε το ρεύμα θα μηδενιστεί πάλι και η ράβδος θα ισορροπεί. Θα κινείται με **σταθερή αλλά μικρότερη ταχύτητα**

$$v'_t = \frac{V'_T}{B\ell} < v_t$$

Το αντίθετο θα συμβεί αν αυξήσουμε την τάση εισόδου. Επειδή $E < V'_T$ θα εμφανιστεί πάλι ρεύμα που θα προκαλέσει όμως αυτή τη φορά δύναμη Laplace που θα επιταχύνει τη ράβδο. Αυτό θα αυξήσει την επαγωγική τάση μέχρι να εξισωθεί με τη νέα τάση εισόδου. Τότε το ρεύμα θα μηδενιστεί πάλι και η ράβδος θα ισορροπεί. Θα κινείται με **σταθερή αλλά μεγαλύτερη ταχύτητα**.

Έλεγχος ταχύτητας της μηχανής

Με τους δύο αυτούς τρόπους :

- μεταβάλλοντας το μαγνητικό πεδίο
- μεταβάλλοντας την τάση εισόδου

μπορούμε να ρυθμίζουμε την ταχύτητα της μηχανής στην επιθυμητή τιμή.

Η ρύθμιση της τάσης εισόδου επιτυγχάνεται με ένα ποτενσιόμετρο. Η ρύθμιση του μαγνητικού πεδίου γίνεται μεταβάλλοντας το ηλεκτρικό ρεύμα I_F που το δημιουργεί. Το ρεύμα αυτό ονομάζεται ρεύμα πεδίου ή ρεύμα διέγερσης.

Π.χ. έστω η μηχανή του παραδείγματος με $V_T = 100 \text{ V}$, $B = 0,5 \text{ T}$, $R_A = 0,5 \Omega$, $\ell = 2 \text{ m}$,

$$m = 1 \text{ kg}, \text{ σε ισορροπία, να κινείται με ταχύτητα } v_t = \frac{V_T}{B\ell} = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Μεταβάλλοντας το ρεύμα διέγερσης μειώνουμε το μαγνητικό πεδίο κατά 20% : $B = 0,8 \cdot B = 0,40 \text{ T}$

Σε ποια τιμή πρέπει να ρυθμίσουμε την τάση εισόδου ώστε η ταχύτητα της μηχανής να γίνει 50 m/s?

Από τη μείωση του μαγνητικού πεδίου η ταχύτητα αυξήθηκε σε

$$v'_t = \frac{V_T}{B'\ell} = \frac{V_T}{0,8B\ell} = \frac{100}{0,8} = 125 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Για να μειωθεί θα πρέπει να μειωθεί η τάση εισόδου. Η τελική ταχύτητα θα είναι :

$$v'_t = \frac{V'_T}{B'\ell} \Rightarrow V'_T = B'v'_t\ell = 0,4 \cdot 50 \cdot 2 = 40 \text{ V} \quad \text{ή} \quad \frac{v'_t}{v_t} = \frac{V'_T/B'\ell}{V_T/B\ell} \Rightarrow V'_T = V_T \frac{B'}{B} \frac{v'_t}{v_t} = 100 \cdot 0,8 \cdot \frac{1}{2} = 40 \text{ V}$$