

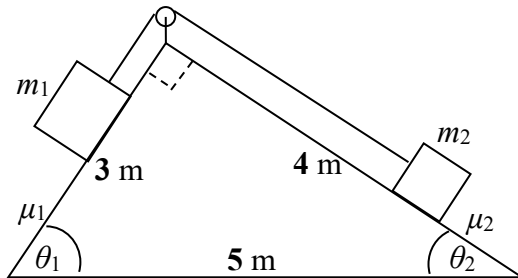
**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ**  
**ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ, ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**  
**ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Τ.Ε.**  
**ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2019-20**  
**ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ (Εξάμ. 1ο)**  
**Παρασκευή, 7 Φεβρουαρίου 2020**  
 (Εισηγητής: Κώστας Φιλιππίδης - kphilippides@teiwm.gr )

Όπου απαιτείται στα παρακάτω προβλήματα, θεωρήστε την επιτάχυνση της βαρύτητας  $g = 10 \text{ m/s}^2$

**Θέμα 1 Νόμοι κίνησης του Νεύτωνα – Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση**

**[μονάδες 3]**

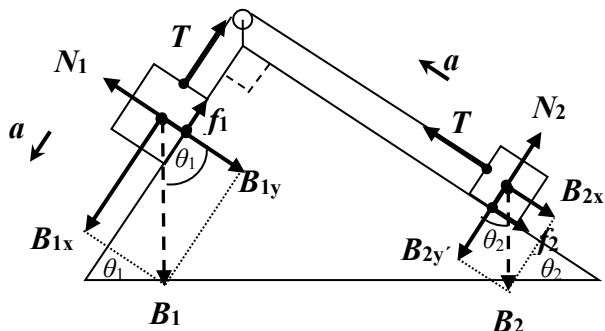
Τη χρονική στιγμή  $t=0$ , τα δύο σώματα του σχήματος, αφήνονται από την ηρεμία να ολισθήσουν στα κεκλιμένα επίπεδα του σχήματος που σχηματίζουν μεταξύ τους ορθή γωνία. Τα σώματα συνδέονται με αβαρές νήμα μέσω αβαρών τροχαλίας που περιστρέφεται χωρίς τριβές. Οι μάζες των σωμάτων είναι  $m_1 = 5 \text{ kg}$  και  $m_2 = 2 \text{ kg}$ . Τα κεκλιμένα επίπεδα δεν είναι λεία αλλά παρουσιάζουν τριβή κατά την ολίσθηση των σωμάτων. Οι συντελεστές τριβής είναι αντίστοιχα  $\mu_1 = 0,2$  και  $\mu_2 = 0,5$ . Τα μήκη των πλευρών του τριγώνου είναι 3, 4 και 5 m.



- A) Να σχεδιάσετε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στα δύο σώματα
- B) Να υπολογίσετε τις δύο συνιστώσες του βάρους κάθε σώματος παράλληλα και κάθετα στα κεκλιμένα επίπεδα.
- Γ) Να βρείτε τις κάθετες αντιδράσεις που δέχονται τα σώματα
- Δ) Να υπολογίσετε τις δυνάμεις τριβής που δέχεται κάθε σώμα.
- Ε) Να βρείτε την επιτάχυνση των σωμάτων και την τάση του νήματος που συνδέει τα σώματα.
- ΣΤ) Πόση είναι η ταχύτητα των σωμάτων όταν έχουν μετακινηθεί κατά  $x=1 \text{ m}$
- Ζ) Ποια χρονική στιγμή συμβαίνει αυτό  $t=?$

**Λύση**

A) Υποθέστε την κατεύθυνση της επιτάχυνσης (αν βγει στο τέλος αρνητική τότε είναι από την αντίθετη πλευρά). Τα δύο σώματα πάνε μαζί (το νήμα είναι μη εκτατό) άρα έχουν ίση επιτάχυνση και ταχύτητα κάθε στιγμή. Σε κάθε σώμα ασκούνται οι εξής 4 δυνάμεις : Βάρος (κατακόρυφα προς τα κάτω), Κάθετη αντίδραση (κάθετα στο δάπεδο), Τριβή ολίσθησης (παράλληλα με το δάπεδο αντίθετα με την κίνηση), Τάση νήματος (πάνω στο νήμα προς την τροχαλία). Το νήμα και οι τροχαλίες είναι αβαρή άρα η τάση του νήματος είναι ίση στα δύο άκρα του.



$$\eta\mu\theta_1 = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{4}{5} = 0,8 = \text{συν}\theta_2, \quad \text{συν}\theta_1 = \frac{\text{προσκεείμενη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{3}{5} = 0,6 = \eta\mu\theta_2$$

B)

$$B_{1x} = B_1\eta\mu\theta_1 = m_1g\eta\mu\theta_1 = 5 \cdot 10 \cdot \frac{4}{5} = 40 \text{ N}$$

$$B_{1y} = B_1\sigma\upsilon\nu\theta_1 = m_1g\sigma\upsilon\nu\theta_1 = 5 \cdot 10 \cdot \frac{3}{5} = 30 \text{ N}$$

$$B_{2x'} = B_2\eta\mu\theta_2 = m_2g\eta\mu\theta_2 = 2 \cdot 10 \cdot \frac{3}{5} = 12 \text{ N}$$

$$B_{2y'} = B_2\sigma\upsilon\nu\theta_2 = m_2g\sigma\upsilon\nu\theta_2 = 2 \cdot 10 \cdot \frac{4}{5} = 16 \text{ N}$$

Γ)

$$\sum F_{1y} = 0 \Rightarrow N_1 = B_{1y} \Rightarrow N_1 = 30 \text{ N}$$

$$\sum F_{2y'} = 0 \Rightarrow N_2 = B_{2y'} \Rightarrow N_2 = 16 \text{ N}$$

Δ)

$$f_1 = \mu_1 N_1 = 0,2 \cdot 30 \Rightarrow f_1 = 6 \text{ N}$$

$$f_2 = \mu_2 N_2 = 0,5 \cdot 16 \Rightarrow f_2 = 8 \text{ N}$$

E)

$$\sum F_{1x} = m_1 a \Rightarrow B_{1x} - f_1 - T = m_1 a \Rightarrow 40 - 6 - T = 5a \Rightarrow 34 - T = 5a \quad (1)$$

$$\sum F_{2x} = m_2 a \Rightarrow T - B_{2x} - f_2 = m_2 a \Rightarrow T - 12 - 8 = 2a \Rightarrow T - 20 = 2a \quad (2)$$

$$(1)+(2) \rightarrow 34 - T + T - 20 = 5a + 2a \Rightarrow 14 = 7a \Rightarrow a = 2 \text{ m/s}^2$$

$$(1): 34 - T = 5a \Rightarrow T = 34 - 5 \cdot 2 \Rightarrow T = 24 \text{ N}$$

$$\Sigma T) v^2 = 2ax \Rightarrow v^2 = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4 \Rightarrow v = 2 \text{ m/s}$$

$$Z) v = at \Rightarrow 2 = 2 \cdot t \Rightarrow t = 1 \text{ s}$$

## Θέμα 2 Διατήρηση ενέργειας – Στερεό σώμα – Πλάγια βολή

[μονάδες 4,5]

Κυκλική στεφάνη μάζας  $m$  και ακτίνας  $R$  αφήνεται να κυλίσει από την ηρεμία στα λοφάκια του σχήματος και από τον γκρεμό στο σημείο 2 εκτελεί πλάγια βολή και πέφτει στη θάλασσα. Η ροπή αδράνειας της στεφάνης είναι  $I = mR^2$ . Η στεφάνη κυλάει χωρίς να ολισθαίνει.

A) Να δείξετε ότι κατά την κύλιση η συνολική κινητική ενέργεια της στεφάνης, μεταφορική και περιστροφική, που υπολογίζεται από τον τύπο  $K = K_{\mu\epsilon\tau} + K_{\pi\epsilon\rho} = mv_x^2/2 + mv_y^2/2 + I\omega^2/2$ , είναι ίση με

$K = mv^2$  όπου  $v$  η ταχύτητα του κέντρου μάζας της.

B) Η στεφάνη περνάει από την κορυφή στο σημείο 1 με ταχύτητα  $v_1 = 15 \text{ m/s}$ . Τι ύψος  $h_1$  έχει το σημείο 1;

Γ) Με τι ταχύτητα  $v_2$  εκτοξεύεται από τον γκρεμό στο σημείο 2 όπου  $h_2 = 40 \text{ m}$ ;

Δ) Ποιες είναι οι συνιστώσες της ταχύτητας  $v_{2x}$  και  $v_{2y}$ , στο σημείο 2 αν η γωνία βολής  $\theta$  έχει  $\eta\mu\theta = 0,6$  και  $\sigma\upsilon\nu\theta = 0,8$ ;

E) Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στη στεφάνη όσο βρίσκεται στον αέρα και να εξηγήσετε γιατί στο εξής όσο η στεφάνη εκτελεί πλάγια βολή στον αέρα η οριζόντια ταχύτητα της  $v_{2x}$  και η γωνιακή της ταχύτητα  $\omega_2$  θα παραμένουν σταθερές.

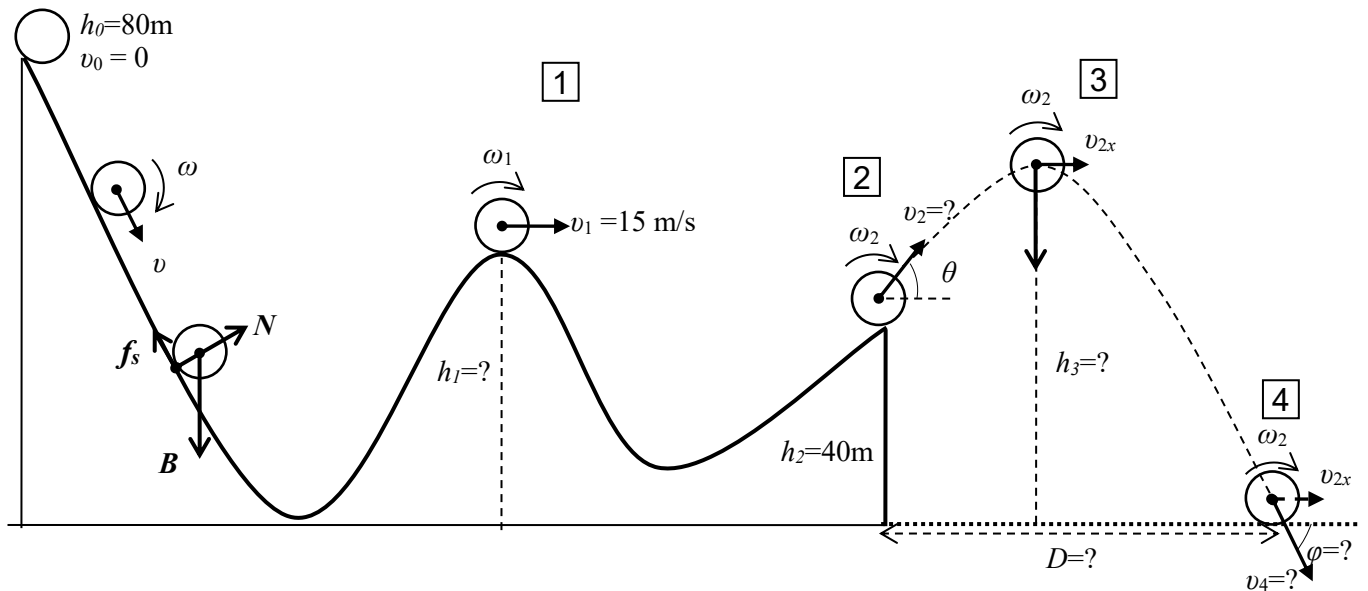
ΣΤ) Πόσο είναι το μέγιστο ύψος  $h_3$  που φτάνει η στεφάνη στο σημείο 3

Z) Με τι ταχύτητα και με τι γωνία χτυπάει στη θάλασσα στο σημείο 4;

H) Για πόσο χρόνο  $t_{\pi\tau\eta\sigma\eta\varsigma}$  παραμένει η στεφάνη στον αέρα?

Θ) Σε τι απόσταση  $D$  μακριά από τον γκρεμό πέφτει στη θάλασσα?

**Λύση**



A) Η στεφάνη κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει άρα η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής  $\omega$ , με την ταχύτητα του κέντρου μάζας  $v$  συνδέονται με τη σχέση :

$$\omega = \frac{v}{R}$$

$$K_{\text{περ}} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m R^2 \frac{v^2}{R^2} = \frac{1}{2} m v^2$$

$$K = K_{\text{μετ}} + K_{\text{περ}} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow \boxed{K = m v^2}$$

B) Ισχύει μεταξύ δυο οποιονδήποτε σημείων η Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας επειδή μόνο το βάρος παραγει έργο το οποίο είναι διατηρητική δύναμη.

$$E = K + U = K_{\text{μετ}} + K_{\text{περ}} + U_{\text{βαρ}} = \text{σταθ} \quad E_0 = E_1 = E_2 = E_3 = E_4$$

Άρα

$$E_0 = E_1 \Rightarrow mgh_0 = mv_1^2 + mgh_1 \Rightarrow h_1 = h_0 - v_1^2/g = 80 - 15^2/10 \Rightarrow \boxed{h_1 = 57,5 \text{ m}}$$

$$\Gamma) E_0 = E_2 \Rightarrow mgh_0 = mv_2^2 + mgh_2 \Rightarrow v_2^2 = g(h_0 - h_1) = 10(80 - 40) = 400 \Rightarrow \boxed{v_2 = 20 \text{ m/s}}$$

Δ)

$$v_{2x} = v_2 \sin \theta = 20 \cdot 0,8 \Rightarrow \boxed{v_{2x} = 16 \text{ m/s}} \quad v_{2y} = v_2 \cos \theta = 20 \cdot 0,6 \Rightarrow \boxed{v_{2y} = 12 \text{ m/s}}$$

Ε)

Όσο η στεφάνη βρίσκεται στον αέρα ασκείται πάνω της μόνο η δύναμη του βάρους της. Το βάρος ασκείται στο κέντρο μάζας (CM) κατακόρυφα. Άρα δεν επάγει ροπή γύρω από το CM ώστε να μεταβάλει την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής. Επίσης επειδή το βάρος είναι κατακόρυφη δύναμη δεν επηρεάζει ούτε την οριζόντια συνιστώσα της γραμμικής ταχύτητας. Οπότε στο σημείο 3 η στεφάνη έχει την ίδια γωνιακή ταχύτητα και την ίδια οριζόντια συνιστώσα ταχύτητας που είχε και στο σημείο 2 :

$$v_{3x} = v_{2x} \quad \omega_3 = \omega_2$$

Το ίδιο ισχύει και για το σημείο 4 :

$$v_{4x} = v_{2x} \quad \omega_4 = \omega_2$$

$$\Sigma \Gamma) E_3 = E_2 \Rightarrow \frac{1}{2} m v_{2x}^2 + \frac{1}{2} I \omega_2^2 + mgh_3 = \frac{1}{2} m v_{2x}^2 + \frac{1}{2} m v_{2y}^2 + \frac{1}{2} I \omega_2^2 + mgh_2 \Rightarrow h_3 = \frac{v_{2y}^2}{2g} + h_2 \Rightarrow$$

$$h_3 = \frac{12^2}{2 \cdot 10} + 40 = 7,2 + 40 \Rightarrow \boxed{h_3 = 47,2 \text{ m}}$$

H

$$E_3 = E_0 \Rightarrow \frac{1}{2} m v_{2x}^2 + \frac{1}{2} I \omega_2^2 + m g h_3 = m g h_0 \Rightarrow h_3 = h_0 - \frac{v_{2x}^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} \Rightarrow h_3 = 80 - \frac{16^2}{20} - \frac{20^2}{20} = 80 - 12,8 - 20 \Rightarrow$$

$$h_3 = 47,2 \text{ m}$$

Z)

$$E_0 = E_4 \Rightarrow m g h_0 = \frac{1}{2} m v_4^2 + \frac{1}{2} I \omega_2^2 \Rightarrow m g h_0 = \frac{1}{2} m v_4^2 + \frac{1}{2} m R^2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} m v_4^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 \Rightarrow v_4^2 = 2 g h_0 - v_2^2 \Rightarrow$$

$$v_4^2 = 2 \cdot 10 \cdot 80 - 20^2 = 1600 - 400 = 1200 \Rightarrow v_4 = \sqrt{3 \cdot 4 \cdot 100} \Rightarrow \boxed{v_4 = 20\sqrt{3} \text{ m/s}}$$

$$\boxed{v_{4x} = v_{2x} = 16 \text{ m/s}}, v_4^2 = v_{4x}^2 + v_{4y}^2 \Rightarrow v_{4y} = -\sqrt{v_4^2 - v_{4x}^2} = -\sqrt{1200 - 256} = -\sqrt{944} \Rightarrow \boxed{v_{4y} = 30,725 \text{ m/s}}$$

$$\varepsilon \varphi = \frac{v_{4y}}{v_{4x}} = \frac{-30,725}{16} \Rightarrow \varphi = \varepsilon \varphi^{-1} \left( \frac{-30,725}{16} \right) \Rightarrow \boxed{\varphi = -62,49^\circ}$$

$$\vec{v}_4 = (16, -30,725) = (20\sqrt{3}, 62,49^\circ)$$

H)

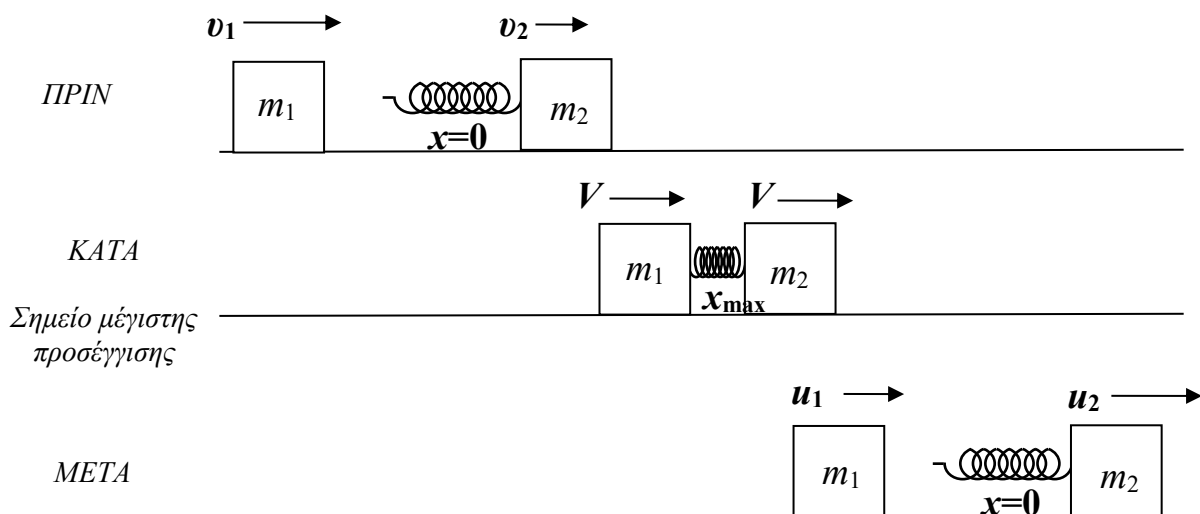
$$v_{4y} = v_{2y} - g t_{\pi\tau\eta\sigma\eta\varsigma} \Rightarrow t_{\pi\tau\eta\sigma\eta\varsigma} = \frac{v_{2y} - v_{4y}}{g} = \frac{30,725 - 12}{10} \Rightarrow \boxed{t_{\pi\tau\eta\sigma\eta\varsigma} = 4,2725 \text{ s}}$$

Θ)

$$D = v_{2x} t_{\pi\tau\eta\sigma\eta\varsigma} = 16 \cdot 4,2725 \Rightarrow \boxed{D = 68,36 \text{ m}}$$

### Θέμα 3 Ελαστική κρούση

[μονάδες 2,5]



Οι μάζες του σχήματος ολισθαίνουν χωρίς τριβή στο οριζόντιο δάπεδο. Η μάζα  $m_1 = 6 \text{ kg}$  κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα  $v_1 = 1,8 \text{ m/s}$  και συγκρούεται ελαστικά με την μάζα  $m_2 = 3 \text{ kg}$  που κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα  $v_2 = 0,9 \text{ m/s}$ . Το ελατήριο που είναι προσαρμοσμένο στη μάζα 2 έχει σταθερά  $k = 200 \text{ N/m}$ .

A) Να βρείτε τις ταχύτητες των μαζών  $u_1$  και  $u_2$  μετά την κρούση

B) Να βρείτε την κοινή ταχύτητα  $V$  των μαζών στο σημείο πλησιέστερης προσέγγισης όπου το ελατήριο έχει την μέγιστη συσπίρωση του.

Γ) Πόση είναι η μέγιστη συσπίρωση  $x_{\max}$  του ελατηρίου?

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 = \frac{6-3}{6+3} \cdot 1,8 + \frac{2 \cdot 3}{6+3} \cdot 0,9 = \frac{3}{9} \cdot 1,8 + \frac{6}{9} \cdot 0,9 = 3 \cdot 0,2 + 6 \cdot 0,1 \Rightarrow \boxed{u_1 = 1,2 \text{ m/s}}$$

$$u_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{3-6}{6+3} \cdot 0,9 + \frac{2 \cdot 6}{6+3} \cdot 1,8 = \frac{-3}{9} \cdot 0,9 + \frac{12}{9} \cdot 1,8 = -3 \cdot 0,1 + 12 \cdot 0,2 \Rightarrow \boxed{u_2 = 2,1 \text{ m/s}}$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V + m_2 V \Rightarrow V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{6 \cdot 1,8 + 3 \cdot 0,9}{6 + 3} = 6 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,1 = 1,5 \text{ m/s}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 V^2 + \frac{1}{2} m_2 V^2 + \frac{1}{2} k x_{\max}^2 \Rightarrow k x_{\max}^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - (m_1 + m_2) V^2 \Rightarrow$$

$$200 x_{\max}^2 = 6 \cdot 1,8^2 + 3 \cdot 0,9^2 - 9 \cdot 1,5^2 = 1,62 \Rightarrow x_{\max}^2 = \frac{1,62}{200} = 0,0081 \Rightarrow x_{\max} = 0,09 \text{ m}$$

$$E = K + U_{\varepsilon\lambda} = K_{CM} + K_{\sigma\chi\epsilon\tau} + U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_{CM}^2 + \frac{1}{2} \mu v_{\sigma\chi\epsilon\tau}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \sigma \tau \alpha \theta$$

$$E_0 = E_{CA} \Rightarrow K_{CM0} + K_{\sigma\chi\epsilon\tau0} + U_{\varepsilon\lambda0} = K_{CMCA} + K_{\sigma\chi\epsilon\tau CA} + U_{\varepsilon\lambda CA} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_{CM}^2 + \frac{1}{2} \mu v_{\sigma\chi\epsilon\tau}^2 + 0 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_{CM}^2 + 0 + \frac{1}{2} k x_{\max}^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \mu v_{\sigma\chi\epsilon\tau}^2 = \frac{1}{2} k x_{\max}^2 \Rightarrow x_{\max}^2 = \frac{\mu}{k} v_{\sigma\chi\epsilon\tau}^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{1}{k} (v_1 - v_2)^2 \Rightarrow$$

$$x_{\max}^2 = \frac{3 \cdot 9}{3 + 9} \cdot \frac{1}{200} (1,8 - 0,9)^2 = \frac{2}{200} 0,9^2 = \frac{0,9^2}{10^2} \Rightarrow x_{\max} = 0,09 \text{ m}$$

**ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ**  $T = \mu N$ ,  $B = mg$ ,  $F_{\varepsilon\lambda} = -kx$ ,  $\tau_F = Fr \cdot \eta \mu \theta = Fd$ . Ισορροπία:  $\sum F = 0$   $\sum \tau = 0$

Επιτάχυνση:  $\sum F = ma$ ,  $\sum \tau = I \alpha_\gamma$ . Κύλιση:  $a = \alpha_\gamma R$ ,  $v = \omega R$ .  $K_{\mu\epsilon\tau} = \frac{1}{2} m v^2$ ,  $K_{\pi\epsilon\rho} = \frac{1}{2} I \omega^2$ ,

$U_{\beta\alpha\rho} = mgh$ ,  $U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2} k x^2$ ,  $W_F = F \Delta x \cdot \cos \theta$ ,  $\Delta K = W_{o\lambda}$ ,  $E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$ ,  $p = mv$ ,

$p_{\pi\rho iv} = p_{\mu\epsilon\tau\alpha} \Rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$ ,  $u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2$ ,  $u_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$ ,

$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ ,  $v = v_0 + at$ ,  $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha_\gamma t^2$ ,  $\omega = \omega_0 + \alpha_\gamma t$ ,  $v = \frac{dx}{dt}$ ,  $a = \frac{dv}{dt}$ ,  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ ,  $\alpha_\gamma = \frac{d\omega}{dt}$ ,

$v^2 = v_x^2 + v_y^2$ ,  $\varepsilon\varphi\theta = \frac{v_y}{v_x}$

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

$$K = K_{\mu\epsilon\tau\alpha\phi\sigma\rho} + K_{\pi\epsilon\rho\iota\sigma\tau\rho} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}\kappa mR^2\frac{\upsilon^2}{R^2} = \frac{1+\kappa}{2}m\upsilon^2$$