



Θεωρία Ουρών Αναμονής Queuing Theory



Περιεχόμενα

- ✓ Εισαγωγή - Ορισμοί
- ✓ Δίκτυα αναμονής
- ✓ Μέτρα απόδοσης δικτύων αναμονής
- ✓ Στοχαστικές διαδικασίες
- ✓ Διαδικασίες Markov
- ✓ Αναμονητικά Συστήματα (Συστήματα $M/M/1$, $M/M/m$, $M/M/1/K$, $M/M/m/m$, $M/M/1/\infty/M$, $M/M/m/K/M$, $G/G/1$)
- ✓ Open Networks - Δίκτυα Jackson
- ✓ Κλειστά Δίκτυα
- ✓ Προσομοίωση Συστημάτων



Εισαγωγή - Ορισμοί

ΔΙΚΤΥΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ (Queueing Networks)

Τα δίκτυα αναμονής αποτελούν μία κατηγορία μοντέλων τα οποία χρησιμοποιούνται ευρέως για την περιγραφή συστημάτων παραγωγής, δικτύων υπολογιστών και τηλεπικοινωνιών, κυκλοφοριακών συστημάτων και συστημάτων εξυπηρέτησης πελατών.

- **Σταθμοί παραγωγής (workstations)** είναι συνήθως μηχανές συνδεδεμένες εν παραλλήλω και εργαζόμενοι σ' αυτές που δέχονται πρώτες ύλες ή ανεπεξέργαστα κομμάτια και παράγουν επεξεργασμένα είδη.
- **Σύστημα παραγωγής (production system)** είναι δίκτυο σταθμών παραγωγής.
- **Γραμμή παραγωγής (production line)** συνίσταται από μηχανές ή σταθμούς παραγωγής συνδεδεμένους εν σειρά.
- Ένα **δίκτυο παραγωγής (production network)** περιέχει σταθμούς παραγωγής με αυθαίρετες διασυνδέσεις.



Δίκτυα Αναμονής

Ένα δίκτυο αναμονής αποτελείται από:

- ❖ N εξυπηρετούντες $M_1, M_2, \dots, M_N$,
- ❖ ένα σύστημα αφίξεως πελατών M_0 που τροφοδοτεί τους εξυπηρετούντες,
- ❖ ένα σταθμό συγκέντρωσης M_{N+1} που λειτουργεί ως έξοδος πελατών από το σύστημα, και
- ❖ ένα δίκτυο κυκλοφορίας πελατών μεταξύ των $M_i, i = 0, \dots, N+1$.

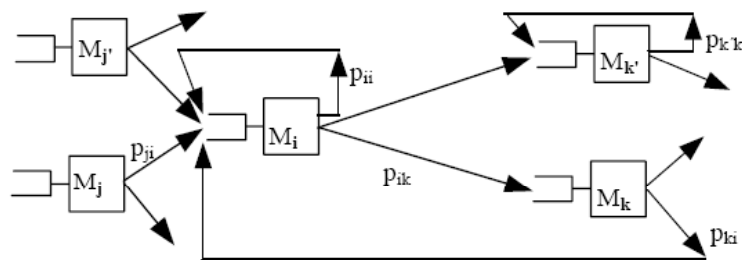
Ονομάζουμε τους εξυπηρετούντες **μηχανές**, και τους πελάτες **προϊόντα** ή **κομμάτια**, και το δίκτυο αναμονής **δίκτυο παραγωγής**.

Δίκτυα Αναμονής

Κάνουμε τις εξής παραδοχές:

- Οι χρόνοι κατεργασίας των μηχανών είναι τ.μ. με γνωστές κατανομές.
- Κάθε μηχανή τροφοδοτείται από μία αποθήκη (buffer) συγκέντρωσης πρώτων υλών ή ενδιάμεσων προϊόντων η οποία έχει πεπερασμένη χωρητικότητα.
- Η M_0 μπορεί να έχει άπειρες πρώτες ύλες στην αποθήκη της ή να συμβολίζει τις αφίξεις πρώτων υλών από έξω.
- Η M_{N+1} έχει άπειρη χωρητικότητα, αλλά δεν παράγει κομμάτια.
- Το δίκτυο κυκλοφορίας κομματιών έχει αυθαίρετη γεωμετρία.

Κάποιο κομμάτι που εξέρχεται από την M_i μπορεί να επιστρέψει σ' αυτήν για επανεπεξεργασία ή να οδηγηθεί σε κάποια άλλη μηχανή για περαιτέρω επεξεργασία.



Όταν η M_i είναι έτοιμη να στείλει ένα κομμάτι στις M_k , $M_{k'}$ και οι αποθήκες τους συμβεί να είναι γεμάτες, τότε η μηχανή μένει μπλοκαρισμένη ή **αποκλεισμένη** και παύει να λειτουργεί (**αλυσίδα αποκλεισμένων μηχανών**).

Όταν η αποθήκη της M_i είναι άδεια και η μηχανή είναι έτοιμη να πάρει ένα κομμάτι τότε μένει πεινασμένη ή **αποστερημένη**.

Όταν δημιουργηθεί κενή θέση στην αποθήκη της M_i οι M_j και $M_{j'}$ **ανταγωνίζονται** για το ποια από τις δύο θα στείλει το αποκλεισμένο κομμάτι της στην κενή θέση. Το δυαδικό συμβαίνει όταν οι M_k και $M_{k'}$ είναι αποστερημένες και κάποια στιγμή η M_i παράγει ένα κομμάτι. Για τέτοιες περιπτώσεις καθορίζονται εξ αρχής κάποιοι κανόνες που λέγονται **πρωτόκολλα δρομολόγησης**.



Πρωτόκολλα δρομολόγησης

Παραδείγματα:

- FCFS: First Come First Served = Η μηχανή που αποκλείσθηκε /αποστερήθηκε πρώτη θα λειτουργήσει πρώτη.
- LCFS: Last Come First Served = Το αντίθετο του προηγούμενου πρωτόκολλου.
- RANDOMIZED: Με μία γεννήτρια τυχαίων αριθμών επιλέγεται κάποια μηχανή, σύμφωνα με προκαθορισμένες πιθανότητες.
- SPT: Shortest Processing Time = Πρώτη θα λειτουργήσει (θα τροφοδοτηθεί ή θα ελευθερωθεί) η μηχανή που έχει μικρότερο μέσο χρόνο κατεργασίας.



Μέτρα απόδοσης δικτύων αναμονής

Κριτήρια αξιολόγησης ενός δικτύου αναμονής:

- (α) Μέσοι ρυθμοί εξόδου πελατών από τους εξυπηρετούντες.
- (β) Μέσο πλήθος πελατών στις ουρές.
- (γ) Μέσοι χρόνοι αναμονής για εξυπηρέτηση (= χρόνος στην ουρά + χρόνος εξυπηρέτησης).

Αν το σύστημα είναι μία βιομηχανία, το (α) είναι η παραγωγικότητά της, το (β) δείχνει πόσο μεγάλες αποθήκες πρέπει να έχει, και το (γ) πόσος είναι ο χρόνος μετατροπής πρώτων υλών σε έτοιμο προϊόν.

Αν το σύστημα εξυπηρετεί πελάτες, το πιο σημαντικό είναι το (γ) που είναι η μέση καθυστέρηση ενός πελάτη.

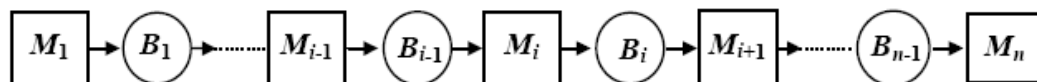
Αύξηση της παραγωγικότητας ενός δικτύου παραγωγής → ανάμεσα σε διαδοχικούς σταθμούς χώρους **εναποθήκευσης (buffers)**.

Κεντρικό πρόβλημα των δικτύων παραγωγής = **ανάλυση** και **σύνθεση**.

Με την ανάλυση αναπτύσσουμε τη μεθοδολογία, βάσει της οποίας υπολογίζουμε μέσους ρυθμούς παραγωγής του συστήματος, μέση στάθμη χώρων εναποθήκευσης κλπ.

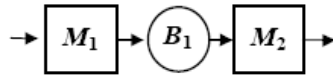
Με τη σύνθεση υπολογίζουμε το βέλτιστο μέγεθος χώρων εναποθήκευσης όταν λαμβάνουμε υπ' όψη την αύξηση της παραγωγικότητας αλλά και το κόστος αποθέματος, τη βέλτιστη κατανομή επiskeυαστικών πόρων κλπ.

Το πρόβλημα της ανάλυσης και σύνθεσης είναι εξαιρετικά δύσκολο λόγω του τεράστιου αριθμού των διαστάσεων και των υπερβολικών υπολογιστικών απαιτήσεων. Η πολυπλοκότητα του προβλήματος σε συνδυασμό με την τυχαιότητα των διακεκριμένων γεγονότων (μηχανές χαλάνε ή επισκευάζονται, χώροι εναποθήκευσης γεμίζουν ή αδειάζουν) το κάνουν ιδιαίτερα ελκυστικό και ενδιαφέρον.



Για να υπολογίσουμε τη μέση παραγωγή της γραμμής και τη μέση στάθμη των χώρων εναποθήκευσης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις αλυσίδες Markov που είναι ακριβή μοντέλα.

Η κατάσταση της αλυσίδας περιγράφεται από τις καταστάσεις των μηχανών (0 ή 1) και τον αριθμό των κομματιών (0, 1, 2,...) που βρίσκονται μεταξύ δύο διαδοχικών μηχανών κάποια χρονική στιγμή.



Στην παραπάνω στοιχειώδη γραμμή, αν η χωρητικότητα της αποθήκης είναι $N_1=0$, τότε στο σύστημα μπορεί να υπάρχουν 0, 1, ή 2 κομμάτια.

Έχουμε τις εξής καταστάσεις με τη σύμβαση $(M_1 B_1 M_2)$

$(0,0,0), (1,0,0), (1,0,1), (0,0,1)$

$(0,1,0), (1,1,0), (1,1,1), (0,1,1)$

$(0,2,0), (1,2,0), (1,2,1), (0,2,1)$

δηλαδή συνολικά 12 καταστάσεις και άρα 12 διαφορικές εξισώσεις να λύσουμε. Ακόμη και στη μόνιμη κατάσταση το σύστημα γίνεται πολύπλοκο.

Γενικά, σε ένα δίκτυο παραγωγής με n μηχανές και m αποθήκες αριθμός καταστάσεων:

$$2^n \prod_{j=1}^m (N_j + 3)$$

Π.χ. για μία γραμμή με $n = 20$, $m = 19$, $N_j = 20$ (ρεαλιστική περίπτωση) έχουμε περίπου 7.8×10^{31} καταστάσεις!

Αν υποθέσουμε (τελείως υπεραισιόδοξα) ότι κάθε διαφορική εξίσωση παίρνει 10 msec χρόνου CPU, ο υπολογιστής που θ' αναλάβει να λύσει αυτό το πρόβλημα χρειάζεται 10^{32} msec, ή περίπου 3×10^{18} έτη!

Για τη μελέτη συστημάτων αναμονής στη μόνιμη κατάσταση χρησιμοποιούνται μοντέλα Markov. Ωστόσο, λόγω της πολυπλοκότητας των μοντέλων αυτών, ο υπολογισμός των πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης είναι εφικτός μόνον για ειδικές κατηγορίες δικτύων (γραμμές αναμονής με άπειρες αποθήκες - θεώρημα Burke, δίκτυα Jackson, κλειστά δίκτυα - F.M.S.).

Για τη μελέτη γενικότερων συστημάτων το μόνο αποτελεσματικό εργαλείο είναι η προσομοίωση, και εφαρμόζεται ευρέως τα τελευταία είκοσι χρόνια.

Στοχαστικές διαδικασίες

Οι **αλυσίδες Markov** είναι στοχαστικές διαδικασίες διακεκριμένων καταστάσεων και διακεκριμένου χρόνου.

Θεωρία πιθανοτήτων: μια τυχαία μεταβλητή X είναι μια συνάρτηση που καθορίζει έναν αριθμό $X(\omega)$, σε κάθε εξαγόμενο ω ενός τυχαίου πειράματος, που ορίζεται σε χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.

Μια **στοχαστική διαδικασία (stochastic process)** $\{X_t(\omega), t \in T\}$ είναι μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών ορισμένων σε κοινό χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ με παράμετρο την πραγματική μεταβλητή t (χρόνος). Έτσι σε κάθε εξαγόμενο ω του τυχαίου πειράματος ορίζουμε μια συνάρτηση $X_t(\omega)$, $\omega \in \Omega$.

Αν το σύνολο T είναι ο άξονας των πραγματικών τότε η διαδικασία λέγεται διαδικασία **συνεχούς χρόνου**. Αν το T είναι σύνολο ακεραίων τότε η διαδικασία λέγεται **διακεκριμένου χρόνου**.

Η διαδικασία $X_t(\omega)$ λέγεται **διακεκριμένης κατάστασης** αν οι τιμές της είναι μετρήσιμες (αριθμήσιμες). Αλλιώς λέγεται **συνεχούς κατάστασης**.

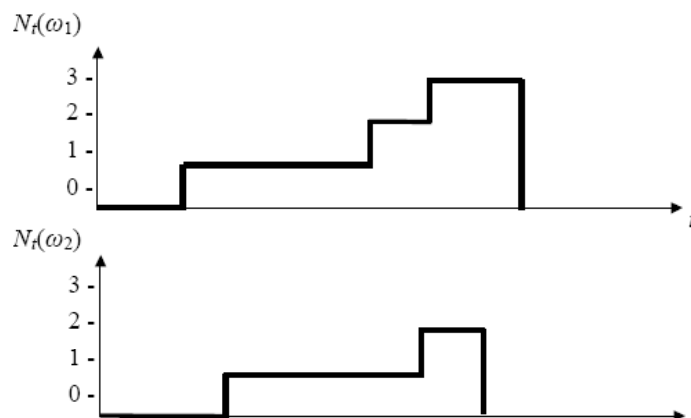
Επομένως η στοχαστική διαδικασία συνίσταται από μια **οικογένεια συναρτήσεων** $X_t(\omega)$.

Θεωρία τ. μ. δεν παρέχει τα μέσα για την εξέταση φαινομένων που είναι τυχαία και εξελίσσονται στο χρόνο (πολλά φυσικά συστήματα) → ανάπτυξη θεωρίας στοχαστικών διαδικασιών.

Στοχαστικές διαδικασίες

Παράδειγμα 1:

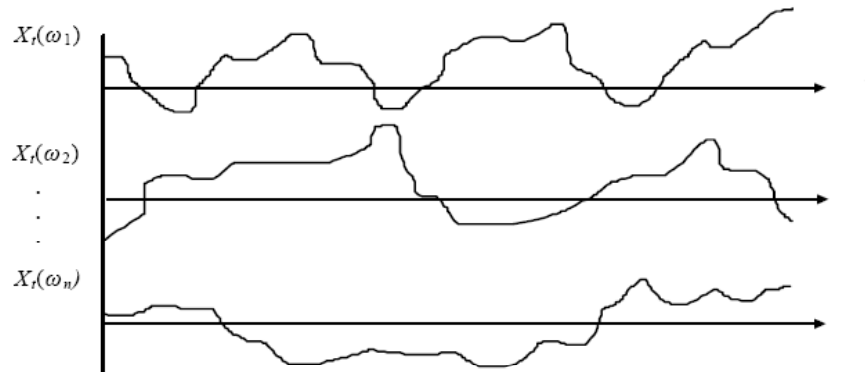
Θεωρείστε μια μηχανή που επεξεργάζεται κάποιο κομμάτι και έχει δεδομένη πιθανότητα να πάθει βλάβη και να τεθεί υπό επισκευή. Τότε, $N_t(\omega)$ είναι η συνολική παραγωγή από τη στιγμή της επισκευής μέχρι τη στιγμή t έως ότου πάθει βλάβη η μηχανή.



Στοχαστικές διαδικασίες

Παράδειγμα 2:

Η κίνηση ενός μορίου κάποιου ρευστού είναι στοχαστική διαδικασία. Συγκεκριμένα οι τρεις συνιστώσες (x, y, z) καθώς και οι συνιστώσες ταχύτητας και επιτάχυνσης, ακολουθούν τυχαίες τροχιές σαν αυτές του σχήματος. Όλα τα σωματίδια συνιστούν τη διαδικασία $X_t(\omega)$. Μια συγκεκριμένη πραγματοποίηση $X_t(\omega_i)$ της $X_t(\omega)$ αντιστοιχεί στην κίνηση του σωματιδίου i . Αυτή η στοχαστική διαδικασία είναι η διαδικασία Brown.



Διαδικασίες Markov

Θεωρούμε ένα σύστημα με M κόμβους (σταθμούς παραγωγής) $i=1, \dots, M$. Μπροστά από κάθε κόμβο υπάρχει μία αποθήκη. Ποια είναι η κατάσταση του συστήματος κάποια χρονική στιγμή t ;

Κατάσταση είναι το μέγεθος το οποίο καθορίζει σε κάποιο βαθμό την μελλοντική εξέλιξη του συστήματος. Είναι, με άλλα λόγια, αυτό που κάνει δύο συστήματα με ίδιες μηχανές να έχουν διαφορετική εξέλιξη.

Για το δίκτυο που εξετάζουμε, κατάσταση είναι ένα διάνυσμα το οποίο αποτελείται από τις στάθμες $n_i(t)$ των αποθηκών τη στιγμή t , και συμβολίζεται $n(t)=[n_1(t), \dots, n_M(t)]$. Η εξέλιξη της $n(t)$ στο χρόνο επηρεάζεται από τυχαίους παράγοντες (τυχαίοι χρόνοι παραγωγής), γι' αυτό η $n(t)$ είναι μία **στοχαστική διαδικασία**. Η πιο απλή, αναλυτικά, στοχαστική διαδικασία ικανοποιεί την ακόλουθη : **Ιδιότητα Markov**



Διαδικασίες Markov

Ιδιότητα Markov: Αν τ και T είναι δύο χρονικές στιγμές τέτοιες ώστε η τ είναι πιο πρόσφατη και t είναι κάποια μελλοντική χρονική στιγμή ($t > \tau \geq T$) τότε για να προβλέψουμε την $n(t)$ αρκεί η γνώση της $n(\tau)$ και είναι άχρηστη η πληροφορία σχετικά με την $n(T)$.

Αν η $n(t)$ ικανοποιεί την ιδιότητα αυτή, τότε ονομάζεται **διαδικασία Markov**. Η ιδιότητα διατυπώνεται μαθηματικά ως εξής :

$$P[n(t)=j \mid n(\tau)=i, n(T)=k, \tau \geq T] = P[n(t)=j \mid n(\tau)=i]$$



Διαδικασίες Markov

Έστω N το σύνολο των πιθανών καταστάσεων μίας διαδικασίας Markov $n(t)$. Το πρόβλημα που μας απασχολεί είναι η εκτίμηση των ποσοτήτων

$$P_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P[n(t) = j],$$

εφόσον τα όρια, υπάρχουν που ονομάζονται **πιθανότητες μόνιμης κατάστασης**. Από αυτές μπορούμε στη συνέχεια να εκτιμήσουμε τις μέσες στάθμες των αποθηκών.

Διαδικασίες Markov

Για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων ορίζουμε τις ποσότητες

$$\begin{aligned} P_{ij}(\tau, t) &\triangleq \text{πιθανότητα να ευρεθούμε στην } j \text{ ξεκινώντας από την } i \\ &= P[n(t)=j | n(\tau)=i], \tau \leq t \end{aligned}$$

η $q_i(t)$, για κάθε $i \in N$, ορίζεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \text{πιθανότητα εξόδου από την } i \text{ στο διάστημα } (t, t+\Delta t) &= \\ &= 1 - P_{ii}(t, t+\Delta t) = q_i(t)\Delta t + o(\Delta t) \end{aligned}$$

η $q_{ij}(t)$, για κάθε $i, j \in N$ με $i \neq j$, ορίζεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \text{πιθανότητα μετάβασης από την } i \text{ στην } j \text{ στο διάστημα } (t, t+\Delta t) &= \\ &= P_{ij}(t, t+\Delta t) = q_{ij}(t)\Delta t + o(\Delta t) \end{aligned}$$

όπου $o(\Delta t)$ είναι μία συνάρτηση που ικανοποιεί την ιδιότητα $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$

Διαδικασίες Markov

Υποθέτουμε τώρα ότι για τη διαδικασία Markov $n(t)$ οι ποσότητες q_i και q_{ij} είναι ανεξάρτητες του χρόνου t . Υποθέτουμε επίσης ότι 0 είναι η αρχή του χρόνου και η αρχική κατάσταση $n(0)=k$ είναι καθορισμένη.

Συμβολίζουμε $P_i(t)$ την πιθανότητα η διαδικασία να βρεθεί στην κατάσταση i δοθέντος ότι ξεκίνησε από την k ($P_{ki}(0, t)$).

Τότε, η εξέλιξη της διαδικασίας $n(t)$ περιγράφεται από την **ευθεία εξίσωση Chapman-Kolmogorov** (C-K):

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = -q_i P_i(t) + \sum_{j \neq i} q_{ji} P_j(t)$$

Η εξίσωση C-K δηλώνει ότι ο ρυθμός μεταβολής της πιθανότητας ώστε το σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση i ισούται με το ρυθμό εισόδου στην κατάσταση αυτή από άλλες καταστάσεις μείον το ρυθμό εξόδου του συστήματος από την i προς άλλες καταστάσεις.

Τα q_i , q_{ij} συνδέονται με τη σχέση

$$q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}.$$

Διαδικασίες Markov

Μας ενδιαφέρει η μόνιμη κατάσταση : $t \rightarrow \infty$. Τότε πρέπει να ισχύει το ακόλουθο

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dP_i(t)}{dt} = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_i(t + \Delta t) - P_i(t)}{\Delta t}$$
$$\left(\begin{array}{l} \text{όταν επιτρέπεται} \\ \text{εναλλαγή των } \lim \end{array} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{\lim_{t \rightarrow \infty} P_i(t + \Delta t) - \lim_{t \rightarrow \infty} P_i(t)}{\Delta t} = 0,$$

οπότε οι διαφορικές εξισώσεις C-K γίνονται αλγεβρικές

$$q_i P_i = \sum_{j \neq i} q_{ji} P_j, \quad \forall i \in N,$$

Λύνοντας το σύστημα αυτών των εξισώσεων μαζί με την $\sum_i P_i = 1$ προκύπτουν τα P_i .

Διαδικασίες Markov

Αποδεικνύεται ότι για μία διαδικασία Markov

(i) αν j και k είναι δύο διακεκριμένες καταστάσεις τότε δεν μπορεί να συμβούν **ταυτοχρόνως** δύο μεταβάσεις $i \rightarrow j$ και $j \rightarrow k$,

(ii) ο συνολικός χρόνος παραμονής στην κατάσταση i είναι τ.μ. x που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με $F(x) = 1 - e^{-q_i x}$, σ.π.π $f(x) = dF/dx = q_i e^{-q_i x}$ και μέση τιμή $E\{x\} = 1/q_i$,

(iii) αν γνωρίζουμε ότι $x_i \geq b$ και $a \geq b$ τότε $P(x \geq a \mid x \geq b) = P(x \geq a-b \mid x \geq 0)$ (**έλλειψη μνήμης**).

Πως συνδέονται οι ποσότητες q_{ij} με τους χρόνους παραγωγής ή, ανάλογα, τους ρυθμούς παραγωγής (ροής) των μηχανών ενός δικτύου παραγωγής;

Αναμονητικά Συστήματα

Συμβολισμός ενός αναμονητικού συστήματος είναι:

I/O/m/K/P

I : στατιστική εισόδου (*M*: χωρίς μνήμη, *G*: γενική, *E*: Erlang)

O : στατιστική εξόδου

m : αριθμός εξυπηρετούντων

K : χωρητικότητα συστήματος

P : μέγεθος πληθυσμού πελατών

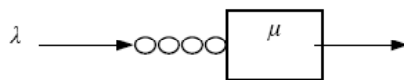
Παράδειγμα: *M/G/5/50/1000* είναι ένα αναμονητικό σύστημα όπου η είσοδος είναι Poisson, η έξοδος γενικής κατανομής, υπάρχουν 5 σταθμοί εξυπηρέτησης, η χωρητικότητα του συστήματος (ουρά + εξυπηρέτηση) είναι 50, και ο συνολικός αριθμός πελατών είναι 1000.

Σύστημα M/M/1

Το απλούστερο σύστημα αναμονής είναι το M/M/1 στο οποίο υπάρχει ένας εξυπηρετών με εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης μέσης τιμής $1/\mu$ και τροφοδοτείται από ένα σύστημα αφίξεων. Το διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων είναι εκθετικά κατανομημένα με μέση τιμή $1/\lambda$. Έτσι,

μ είναι ο μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης και

λ ο μέσος ρυθμός άφιξης πελατών από έξω.



Η κατάσταση n του συστήματος ισούται με το πλήθος πελατών στο σύστημα (ουρά + εξυπηρέτηση). Από την κατάσταση n πηγαίνουμε στην $n+1$ με μία άφιξη, και στην $n-1$ με εξυπηρέτηση.

Ποια η σχέση των λ , μ με τα q_{ij} ?

Σύστημα M/M/1

Η πιθανότητα να συμβεί μία άφιξη στο διάστημα $[t, t+x]$ δοθέντος ότι θα συμβεί σε χρόνο $\geq t$ είναι

$$\begin{aligned} P(\text{άφιξη στο } [t, t+x] | \text{άφιξη σε } \geq t) &= \frac{P(\text{άφιξη στο } [t, t+x] \text{ ΚΑΙ άφιξη σε } \geq t)}{P(\text{άφιξη σε } \geq t)} = \\ &= \frac{P(\text{άφιξη στο } [t, t+x])}{P(\text{άφιξη σε } \geq t)} = \frac{P(\text{άφιξη σε } \geq t) - P(\text{άφιξη σε } \geq t+x)}{P(\text{άφιξη σε } \geq t)} \\ &= \frac{[1-F(t)] - [1-F(t+x)]}{1-F(t)} = 1 - \frac{e^{-\lambda(t+x)}}{e^{-\lambda t}} = 1 - e^{-\lambda x} \\ &= (\dots \text{ανάπτυγμα Taylor}) = 1 - \left[1 + \frac{-\lambda e^{-\lambda x}|_{x=0}}{1!} x + o(x) \right] = \lambda x + o(x). \end{aligned}$$

Το λ είναι το $q_{n(n+1)}$, και ανάλογα προκύπτει $\mu = q_{n(n-1)}$.

Σύστημα M/M/1

Η αλγεβρική εξίσωση C-K γίνεται

$$\lambda P_0 = \mu P_1$$

γιατί όταν υπάρχουν $n=0$ πελάτες δεν γίνονται εξυπηρετήσεις.

Οι υπόλοιπες εξισώσεις C-K είναι

$$(\lambda + \mu) P_n = \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1}, \quad n > 0$$

Από αυτές και την $\sum_i P_i = 1$ προκύπτει ότι, αν το σύστημα είναι **ευσταθές**, δηλ. ο ρυθμός εισόδου πελατών στο σύστημα είναι μικρότερος από τον ρυθμό εξυπηρέτησης ($\lambda < \mu$), τότε

$$P_n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = (1 - \rho) \rho^n, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Αν η συνθήκη ευστάθειας δεν ισχύει, τότε $P_\infty = 1, P_n = 0 \quad \forall n < \infty$.

Σύστημα M/M/1

Το μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα είναι

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = (1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} n \rho^n = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

Σε κάθε αναμονητικό σύστημα ισχύει ο **νόμος του Little** :

(μέσο πλήθος πελατών) = (μέσος ρυθμός εισόδου) (μέσος χρόνος παραμονής)

Για το M/M/1, όπου δεν υπάρχει περιορισμός στην ουρά, ο μέσος ρυθμός αφίξεων πελατών λ ισούται με το μέσο ρυθμό εισόδου (όσοι φθάνουν, γίνονται πάντα δεκτοί από το σύστημα). Κατά συνέπεια,

ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα (ουρά + εξυπηρέτηση) $T = N/\lambda$.

ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά μόνον είναι $W = T - 1/\mu$.

Εφαρμόζοντας το νόμο του Little για το σύστημα "ουρά" προκύπτει το μέσο πλήθος πελατών στην ουρά

$$N_q = \lambda W = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$$

Στα συστήματα παραγωγής, το N_q ισοδυναμεί με την μέση στάθμη στην αποθήκη.

Σύστημα M/M/1

Ο μέσος ρυθμός παραγωγής του συστήματος ισούται με το μέσο ρυθμό εξυπηρέτησης όταν το σύστημα δεν είναι άδειο

$$\bar{\mu}_{\text{συστ.}} = (1 - P_0) \mu = \left[1 - \left(1 - \frac{\lambda}{\mu} \right) \right] \mu = \lambda$$

$$P(n) = (1 - p) p^n$$

$$P(0) = (1 - p)$$

$$N_q = \frac{p^2}{1 - p}$$

$$N = \frac{p}{1 - p}$$

$$W = \frac{p}{\mu(1 - p)}$$

$$T = \frac{1}{\mu(1 - p)}$$

Σύστημα M/M/m

Το ίδιο σύστημα αλλά με m ίδιους εξυπηρετούντες περιγράφει έναν σταθμό παραγωγής που αποτελείται από m παράλληλες μηχανές. Ορίζουμε την ποσότητα $\rho = \lambda / (m\mu)$. Αν $\rho < 1$, τότε από τις εξισώσεις C-K προκύπτουν τελικά

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(m\rho)^n}{n!} + \frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)}} \quad \text{και} \quad P_n = \begin{cases} P_0 \frac{(m\rho)^n}{n!}, & n \leq m \\ P_0 \frac{\rho^n m^m}{m!}, & n \geq m \end{cases}$$

Το μέσο πλήθος στην ουρά είναι $N_q = \sum_{n=m}^{\infty} (n-m) P_n = \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \cdot P_m$

$N = N_q + \lambda/\mu$, $W = (m\rho)^m P_0 / (m! m \mu (1-\rho)^2)$, $T = W + 1/\mu$ και

ο μέσος ρυθμός παραγωγής του συστήματος είναι

$$\bar{\mu}_{\text{συστ.}} = \lambda = (\text{μέσος ρυθμός αφίξεων})$$

Σύστημα M/M/1/K

Πεπερασμένη χωρητικότητα αποθήκης = $K-1$.

Το σύστημα αποθήκη + εξυπηρετών χωρά K πελάτες. Τότε αν $\rho = \lambda/\mu \neq 1$

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}, \quad \text{και} \quad P_n = P_0 \rho^n, \quad 0 \leq n \leq K$$

ενώ αν $\rho=1$, $P_n = 1/(K+1)$ για όλα τα n .

Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα είναι

$$N = \begin{cases} \rho \frac{1 - (K+1)\rho^K + K\rho^{K+1}}{(1-\rho)(1-\rho^{K+1})} & \text{αν } \rho \neq 1 \\ \frac{K}{2}, & \text{αν } \rho = 1 \end{cases}$$

Σύστημα M/M/m/m (Complete loss system)

Υπάρχουν m εξυπηρετούντες και η χωρητικότητα του συστήματος είναι m που σημαίνει ότι μόλις και οι m εξυπηρετούντες είναι κατειλημμένοι, τότε κάθε νέος πελάτης που φθάνει στο σύστημα χάνεται.

Το μοντέλο τώρα γίνεται

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & n < m \\ 0, & n \geq m \end{cases}$$

$$\mu_n = n\mu, \quad n = 1, 2, \dots, m$$

και οι αντίστοιχες πιθανότητες

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^m \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!}} \quad P_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}}{\sum_{k=0}^m \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!}}$$

για $n=m$ γίνεται

$$P_m = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \frac{1}{m!}}{\sum_{k=0}^m \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!}}$$

που είναι ο τύπος **B($m, \lambda/\mu$) του Erlang**, και είναι η πιθανότητα σ' ένα τηλεφωνικό σύστημα m γραμμών (εξυπηρετούντων) να είναι κατειλημμένες και οι m γραμμές.

Σύστημα M/M/1/∞/M (Finite-population model)

Το σύστημα δεν έχει μνήμη (όπως και τα προηγούμενα) υπάρχει ένας εξυπηρετών, και ενώ η ουρά έχει απεριόριστη χωρητικότητα, οι χρήστες του συστήματος είναι M . (γράφεται και M/M/1/ /M).

Ο κάθε πελάτης φθάνει με ρυθμό λ , δηλαδή ο χρόνος άφιξης είναι μια εκθετική τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή $1/\lambda$. Όταν υπάρχουν στο σύστημα n πελάτες (στην ουρά και στην εξυπηρέτηση), τότε υπολείπονται $M-n$ πελάτες των οποίων ο ρυθμός άφιξης είναι $\lambda(M-n)$.

Το μοντέλο τώρα γίνεται

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda(M-n), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$\mu_n = \mu, \quad n = 1, 2, \dots, M.$$

και οι αντίστοιχες πιθανότητες

$$P_n = \begin{cases} P_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda(M-k)}{\mu} = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{M!}{(M-n)!}, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^M \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{M!}{(M-n)!}}$$

Σύστημα M/M/m/K/M

Είναι η γενίκευση όλων των προηγούμενων συστημάτων. Είναι σύστημα χωρίς μνήμη, με m εξυπηρετούντες, χωρητικότητα K και πληθυσμό M .

Μοντέλο

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda (M-n), & 0 \leq n \leq K-1 \\ 0, & \text{αλλιού} \end{cases} \quad \mu_n = \begin{cases} n\mu, & 0 \leq n \leq m \\ m\mu, & n \geq m \end{cases}$$

και οι αντίστοιχες πιθανότητες

$$P_n = P_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda(M-k)}{\mu(k+1)} = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \binom{M}{n}, \quad 0 \leq n \leq m-1$$

$$P_n = P_0 \frac{\lambda(M-k)}{\mu(k+1)} \prod_{k=m}^{n-1} \frac{\lambda(M-k)}{m\mu}$$

$$= P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \binom{M}{n} \frac{n!}{m!} m^{m-n}, \quad m \leq n \leq K$$

Σύστημα G/G/1

Συστήματα ενός εξυπηρετούντος, όταν οι κατανομές των χρόνων εξυπηρέτησης και αφίξεων είναι γενικές.

Έστω

$1/\lambda$: μέση τιμή του χρόνου μεταξύ αφίξεων

σ_t^2 : διασπορά του χρόνου μεταξύ αφίξεων (για εκθετική κατανομή: $\sigma_t^2 = 1/\lambda^2$)

$1/\mu$: μέση τιμή χρόνου εξυπηρέτησης,

σ_x^2 : διασπορά του χρόνου εξυπηρέτησης (για εκθετική κατανομή: $\sigma_x^2 = 1/\mu^2$)

Σε μερικές περιπτώσεις οι χρόνοι μεταξύ αφίξεων t ικανοποιούν τη σχέση

$$E\{t - t_0 | t > t_0\} \leq \frac{1}{\lambda} = E\{t\}$$

Δηλ. αν γνωρίζουμε ότι έχει περάσει χρόνος t_0 ή και περισσότερος από τότε που έγινε μία άφιξη, τότε η επόμενη άφιξη θα γίνει μετά από χρόνο που είναι κατά μέσον όρο μικρότερος ή ίσος από το μέσο χρόνο μεταξύ διαδοχικών αφίξεων. Η εκθετική κατανομή ικανοποιεί την σχέση ως ισότητα. Άλλες κατανομές που την ικανοποιούν είναι η ομοιόμορφη, βήτα, κλπ..

Αν ισχύει η σχέση αυτή και το σύστημα είναι ευσταθές, $\lambda/\mu < 1$, τότε

$$\frac{\lambda^2(\sigma_t^2 + \sigma_x^2)}{1-\rho} - \frac{1-\rho}{2} \leq N_q \leq \frac{\lambda^2(\sigma_t^2 + \sigma_x^2)}{2(1-\rho)}, \quad \bar{\mu}_{\text{συστ.}} = \lambda.$$

Open Networks - Δίκτυα Jackson

Ένα **δίκτυο παραγωγής** περιέχει M σταθμούς παραγωγής με αυθαίρετες διασυνδέσεις. Σ' ένα **ανοιχτό δίκτυο** εργασίες (πελάτες) φτάνουν σε κάποιο/ους σταθμούς παραγωγής και μπαίνουν στο δίκτυο.

Ένα δίκτυο Jackson αποτελείται από M κόμβους εξυπηρέτησης, $i=1,2,\dots,M$. Ο κόμβος i έχει m_i ίδιους εξυπηρετούντες και ∞ αποθήκη. Η τροφοδοσία της αποθήκης γίνεται από

(α) έξω, με αφίξεις κατά Poisson και μέσο ρυθμό γ_i ,

(β) άλλους κόμβους j , ή και από τον ίδιο με ανατροφοδότηση (feedback, πχ. επανακατεργασία).

Έστω P_{ji} η πιθανότητα ώστε ένας πελάτης που φεύγει από τον j να πάει στην αποθήκη του κόμβου i . Οι πιθανότητες P_{j0} αντιστοιχούν σε πελάτες που φεύγουν από το σύστημα (0 =κόμβος που συμβολίζει την έξοδο). Οι πιθανότητες ικανοποιούν τη σχέση

$$\sum_{i=0}^M P_{ji} = 1$$

Δίκτυα Jackson

Οι μέσοι ρυθμοί εισόδου λ_i στους κόμβους i προκύπτουν από τη λύση του γραμμικού συστήματος ($i=1,\dots,M$)

$$\lambda_i = \gamma_i + \sum_{j=1}^M \lambda_j P_{ji}$$

Οι χρόνοι άφιξης και εξυπηρέτησης είναι εκθετικοί. Η κατάσταση του συστήματος συμβολίζεται $n=(n_1, n_2, \dots, n_M)$ και αποτελείται από τις στάθμες των κόμβων.

Το θεώρημα που ακολουθεί, αποτελεί το εργαλείο ανάλυσης του συστήματος:

Θεώρημα Jackson: Για το δίκτυο που ορίστηκε πριν, οι αλγεβρικές εξισώσεις C-K έχουν λύση: $P(n_1, n_2, \dots, n_M) = P_{n1}(1)P_{n2}(2)\dots P_{nM}(M)$

όπου $P_{ni}(i)$ είναι η πιθανότητα ώστε ο κόμβος i να έχει n_i πελάτες και υπολογίζεται θεωρώντας τον κόμβο i ως σύστημα $M/M/m_i$ με ρυθμούς λ_i, μ_i από τις

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(m\rho)^n}{n!} + \frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)}} \quad \text{και} \quad P_n = \begin{cases} P_0 \frac{(m\rho)^n}{n!}, & n \leq m \\ P_0 \frac{\rho^n m^m}{m!}, & n \geq m \end{cases}$$

Δίκτυα Jackson

Από το θεώρημα αυτό και την σχέση
βρίσκουμε και τις μέσες στάθμες σε κάθε
αποθήκη.

$$N_q = \sum_{n=m}^{\infty} (n-m) P_n = \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \cdot P_m$$

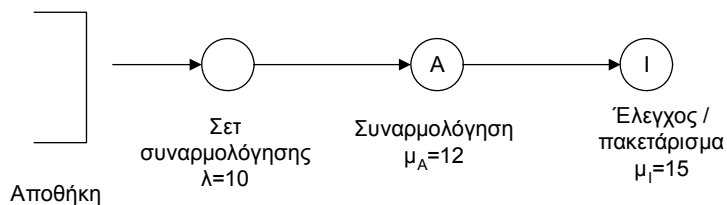
Ο μέσος ρυθμός ροής κομματιών (πελατών) από τον κόμβο j στον i ισούται
με $\lambda_j P_{ji}$.

Γενικά

- Το άθροισμα ανεξάρτητων τ.μ. Poisson είναι τ.μ. Poisson
- Αν ο ρυθμός των αφίξεων είναι Poisson τότε ο ενδοαφίξιακός χρόνος είναι εκθετικά κατανεμημένος.
- Ο χρόνος μεταξύ των αναχωρήσεων ενός M/M/m συστήματος με άπειρη ουρά είναι εκθετικός (θεώρημα Burke).

Δίκτυα Jackson

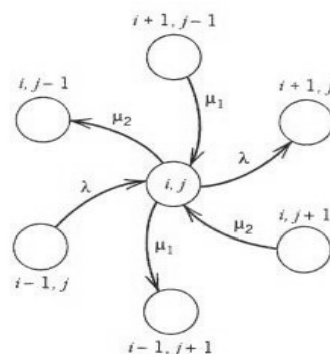
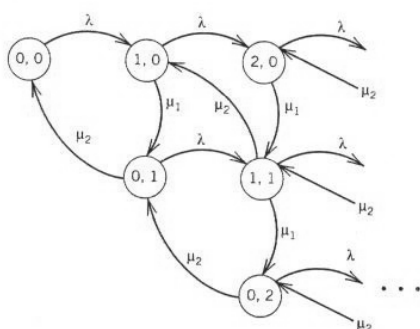
Παράδειγμα 1: Σύστημα παραγωγής εν σειρά με εκθετικούς χρόνους.



Εκθετικοί χρόνοι εξυπηρέτησης → έξοδος Poisson → A, I είναι M/M/m
Αριθμός εργασιών στο «σετ συναρμολόγησης» σταθερός.

Κατάσταση του συστήματος: (n_1, n_2) αριθμός εργασιών στο A και στο I.

$$p(n_1, n_2) = \Pr(n_1 \text{ εργασίες στο A} \cap n_2 \text{ εργασίες στο I})$$



Παράδειγμα 1:

Υποθέτουμε έναν εξυπηρετών σε κάθε σταθμό. Εξισώσεις μόνιμης κατάστασης:

Κατάσταση (n_1, n_2)	Ρυθμός Εξόδου	=	Ρυθμός Εισόδου
$0,0$	$\lambda p(0,0)$	=	$\mu_2 p(0,1)$
$n_1 > 0, 0$	$(\lambda + \mu_1)p(n_1, 0)$	=	$\mu_2 p(n_1, 1) + \lambda p(n_1 - 1, 0)$
$0, n_2 > 0$	$(\lambda + \mu_2)p(0, n_2)$	=	$\mu_2 p(0, n_2 + 1) + \mu_1 p(1, n_2 - 1)$
$n_1 > 0, n_2 > 0$	$(\lambda + \mu_1 + \mu_2)p(n_1, n_2)$	=	$\lambda p(n_1 - 1, n_2) + \mu_1 p(n_1 + 1, n_2 - 1) + \mu_2 p(n_1, n_2 + 1)$

Εφαρμόζοντας τον περιορισμό $\sum_i \sum_j p(n_1, n_2) = 1$
η λύση του συστήματος

$$p(n_1, n_2) = (1 - p_1) p_1^{n_1} (1 - p_2) p_2^{n_2} \quad n_1, n_2 \geq 0$$

με $p_j = \lambda / \mu_j$

Παράδειγμα 1: Να βρεθεί ο μέσος αριθμός των εργασιών σε κάθε σταθμό

$\lambda = 10/\text{hr}$, $\mu_1 = 12/\text{hr}$, $\mu_2 = 15/\text{hr} \rightarrow p_1 = 10/12$ και $p_2 = 10/15$.

Μέσος χρόνος παραμονής στο A: $T_1 = 1/(\mu_1(1-p_1)) = 1/2 \text{ hr}$

Μέσο πλήθος εργασιών στο A: $N_1 = \lambda T_1 = 5 \text{ εργασίες}$

Μέσος χρόνος παραμονής στο I: $T_2 = 1/(\mu_2(1-p_2)) = 1/5 \text{ hr}$

Μέσο πλήθος εργασιών στο I: $N_2 = \lambda T_2 = 2 \text{ εργασίες}$

Μέσο πλήθος εργασιών στο σύστημα: $N = 10 + 1 + N_1 + N_2 = 18 \text{ εργασίες}$

Μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα: $T = T_{q0} + \lambda^{-1} + T_1 + T_2 = 1 + 0.1 + 0.5 + 0.2 = 1.8 \text{ hr}$

Έστω ότι ο buffer του σταθμού συναρμολόγησης έχει χωρητικότητα 10 εργασίες.
Είναι επαρκής;

Απάντηση: Υπολογίζουμε την πιθανότητα ένας σταθμός M/M/1 με $p = 10/12$ να έχει περισσότερους από 10 πελάτες. $\Pr(n) = (1-p)p^n$

Άρα $\Pr(n > 10) = 1 - \Pr(n \leq 10) = 0.135$

Ο buffer θα είναι γεμάτος στο 13.5% του χρόνου

Παράδειγμα 1: Υποθέτουμε ότι κάθε εργασία αποτυγχάνει να περάσει τον έλεγχο με πιθανότητα p_{21} και επιστρέφει στο σταθμό συναρμολόγησης. Ποιος είναι ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα αν $p_{21}=0.1$;

$$\lambda_1' = \lambda + p_{21}\lambda_2'$$

$$\lambda_2' = 1\lambda_1'$$

Άρα $\lambda_1' = \lambda_2' = \lambda / (1 - p_{21}) = 10 / 0.9 = 11.111$

$$p_1 = \lambda_1' / \mu_1 = 0.9259,$$

$$p_2 = \lambda_2' / \mu_2 = 0.7407$$

Μέσος χρόνος παραμονής στο A:

$$T_1 = 1 / (\mu_1(1 - p_1)) = 1.1246 \text{ hr}$$

Μέσο πλήθος εργασιών στο A:

$$N_1 = \lambda_1' T_1 = 12.5 \text{ εργασίες}$$

Μέσος χρόνος παραμονής στο I:

$$T_2 = 1 / (\mu_2(1 - p_2)) = 0.2571 \text{ hr}$$

Μέσο πλήθος εργασιών στο I:

$$N_2 = \lambda_2' T_2 = 2.857 \text{ εργασίες}$$

Έστω u_j ο μέσος αριθμός επισκέψεων στο σταθμό j τότε

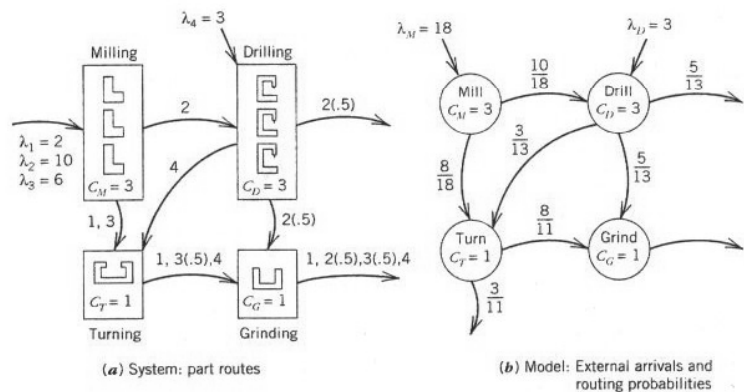
$$u_j = \frac{\lambda_j}{\sum_{k=1}^M \lambda_k} + \sum_{k=1}^M p_{kj} u_k \Rightarrow u_j = \frac{\lambda_j'}{\sum_{k=1}^M \lambda_k'}$$

Άρα $u_1 = \lambda_1' / \lambda = 1.111$, $u_2 = \lambda_2' / \lambda = 1.111$

Μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα:

$$T = T_{q0} + \lambda^{-1} + u_1 T_1 + u_2 T_2 = 1 + 0.1 + 1.111(1.1246) + 1.111(0.2571) = 2.64 \text{ hr}$$

Παράδειγμα 2:



Part	Demand /week	Route (Machine, Hr per part)		
		1	2	3
1	2	M, 2	T, 1	G, 2
2	10	M, 4	D, 5	G, 1(50%)
3	6	M, 10	T, 1	G, 2(50%)
4	3	D, 10	T, 2	G, 2

Π.Χ.

$$\lambda'_{M3} = 6 + 0$$

$$\lambda'_{D3} = 0 + 0$$

$$\lambda'_{T3} = 0 + 1\lambda'_{M3}$$

$$\lambda'_{G3} = 0 + 0.5\lambda'_{T3}$$

	Part				Sum
	1	2	3	4	
λ'_M	2	10	6	0	18
λ'_D	0	10	0	3	13
λ'_T	2	0	6	3	11
λ'_G	2	5	3	3	13

Παράδειγμα 2: Μέσοι χρόνοι επεξεργασίας

$$\mu_j^{-1} = \sum_{k=1}^K r_{kj} \mu_{kj}^{-1}$$

r_{kj} = ποσοστό των εργασιών τύπου k στο σταθμό j

$\mu_{kj} \rightarrow (40\text{hr/week}) / (\text{hr per part})$

$$\mu_M^{-1} = \frac{2}{18} \frac{2}{40} + \frac{10}{18} \frac{4}{40} + \frac{6}{18} \frac{10}{40} = 0.1444$$

$$\mu_D^{-1} = \frac{10}{13} \frac{5}{40} + \frac{3}{13} \frac{10}{40} = 0.1538$$

$$\mu_T^{-1} = \frac{2}{11} \frac{1}{40} + \frac{6}{11} \frac{1}{40} + \frac{3}{11} \frac{2}{40} = 0.103182$$

$$\mu_G^{-1} = \frac{2}{13} \frac{2}{40} + \frac{5}{13} \frac{1}{40} + \frac{3}{13} \frac{2}{40} + \frac{3}{13} \frac{2}{40} = 0.04038$$

Κάθε σταθμός είναι μια ουρά M/M/m

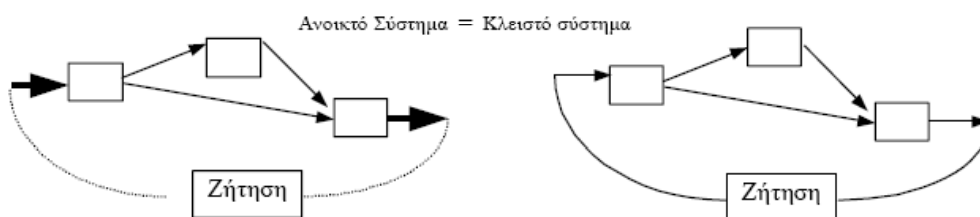
Station	λ	μ	m	ρ	T	W	N	N_q	P_0
M	18	6.923	3	0.867	0.4185	0.2741	7.534	4.934	0.035
D	13	6.500	3	0.667	0.2222	0.0684	2.889	0.889	0.111
T	11	31.43	1	0.350	0.0489	0.0171	0.538	0.188	0.650
G	13	24.76	1	0.525	0.0850	0.0446	1.105	0.580	0.475

Μέτρα του συστήματος: π.χ. μέσος αριθμός εργασιών στο σύστημα

$$N = \sum_{j=M}^G N_j = 7.534 + 2.889 + 0.538 + 1.105 = 12.07$$

Κλειστά Δίκτυα

Φανταστείτε ένα ανοικτό δίκτυο στο οποίο, όταν ένας πελάτης φεύγει (προϊόν παράγεται) τότε και μόνον τότε ένας άλλος πελάτης εισέρχεται στο σύστημα. Αυτό στην πράξη συμβαίνει όταν σε ένα σύστημα παραγωγής οι πρώτες ύλες εισέρχονται στο σύστημα μόνον όταν υπάρχει ζήτηση. Τα συστήματα αυτά ονομάζονται **συστήματα έλξης** (pull systems) ή **παραγωγής κατά παραγγελίες** (make-to-order). Για τη μοντελοποίηση τέτοιων συστημάτων θεωρούμε το σύστημα σαν μία μηχανή η οποία τροφοδοτείται από την αποθήκη ετοιμών προϊόντων και τροφοδοτεί την αποθήκη πρώτων υλών.



Κλειστά Δίκτυα

Στο κλειστό σύστημα, το συνολικό πλήθος πελατών οι οποίοι βρίσκονται στους κόμβους εξυπηρέτησης είναι σταθερό: $N = n_1 + \dots + n_M$.

Ορίζουμε τις ποσότητες $b_i(n_i)$ οι οποίες εξαρτώνται από τον κόμβο i και το πλήθος πελατών στην ουρά και εξυπηρέτησή του :

$$b_i(n_i) = \begin{cases} n_i! , & n_i \leq m_i \\ m_i! m_i^{n_i - m_i} , & n_i \geq m_i \end{cases}$$

Έστω λ_i οι μέσοι ρυθμοί αφίξεων στις ουρές των κόμβων i . Τότε, οι εξισώσεις διατήρησης πελατών παίρνουν τη μορφή

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^M \lambda_j P_{ji}, i=1, \dots, M$$

Το σύστημα αυτό είναι γραμμικό, αλλά δεν έχει μοναδική λύση γιατί ο πίνακας $[P_{ji}]$ δεν είναι αντιστρέψιμος. Θεωρούμε αντί των λ_i , τις μεταβλητές

Όπου

$$\lambda = \sum_{i=1}^M \lambda_i$$

$$x_i = \frac{\lambda_i}{\lambda}$$

Τότε

$$x_i = \sum_{j=1}^M x_j P_{ji}, \quad i = 2, \dots, M, \text{ και}$$

$$x_1 = 1 - \sum_{j=2}^M x_j$$

Κλειστά Δίκτυα

Το σύστημα αυτό αποτελείται από M γραμμικώς ανεξάρτητες εξισώσεις με M αγνώστους. Οι λύσεις x_i του συστήματος ικανοποιούν και την

$$x_1 = \sum_{j=1}^M x_j P_{j1}$$

Θεώρημα των Gordon-Newell Στο κλειστό σύστημα, οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης δίδονται από τις σχέσεις

$$P(n) = P(n_1, n_2, \dots, n_M) = \frac{1}{G(N)} \cdot \prod_{i=1}^M \frac{\left(\frac{x_i}{\mu_i}\right)^{n_i}}{b_i(n_i)}$$

όπου

$$G(N) = \sum_{\substack{\text{για κάθε συνδυασμό} \\ (n_1, \dots, n_M): n_1 + \dots + n_M = N}} \prod_{i=1}^M \frac{\left(\frac{x_i}{\mu_i}\right)^{n_i}}{b_i(n_i)}$$

και x_i είναι οποιεσδήποτε λύσεις του συστήματος

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^M \lambda_j P_{ji}, i=1, \dots, M$$

Κλειστά Δίκτυα

Η ποσότητα u_i είναι η **σχετική χρησιμοποίηση** του σταθμού i .

Ο σταθμός που έχει $\max u_i$ ονομάζεται **συνωστισμένος** (bottleneck), και οι μηχανές του εργάζονται περισσότερο χρόνο από τις μηχανές των υπόλοιπων.

$$u_i = \frac{\left[\frac{x_i}{m_i \mu_i} \right]}{\left[\sum_{j=1}^M \frac{x_j}{m_j \mu_j} \right]}$$

Οι μέσοι ρυθμοί εισροής/εκροής σε κάθε σταθμό είναι

$$\lambda_i = \mu_i \sum_{\substack{\text{για καθε συνδυασμο:} \\ n_i=1 \text{ και } \sum_{j \neq i} n_j = N - n_i}} P(n) + 2\mu_i \sum_{\substack{\text{για καθε συνδυασμο:} \\ n_i=2 \text{ και } \sum_{j \neq i} n_j = N - n_i}} P(n) + \dots + m_i \mu_i \sum_{\substack{\text{για καθε συνδυασμο:} \\ n_i \geq m_i \text{ και } \sum_{j \neq i} n_j = N - n_i}} P(n)$$

Η ποσότητες (λ/μ) ονομάζονται **φορτίσεις των σταθμών**.

Το μέσο πλήθος κομματιών στην αποθήκη i ενός κλειστού δικτύου παραγωγής είναι

$$N_{q,i} = \sum_{\substack{\text{για καθε συνδυασμο} \\ n_i \geq m_i}} (n_i - m_i) P(n_i).$$

Κλειστά Δίκτυα

Προφανώς, οι υπολογισμοί που απαιτούν οι ανωτέρω σχέσεις είναι πάρα πολλοί. Απλούστερες περιπτώσεις:

Όταν οι σχετικές χρησιμοποιήσεις των κόμβων είναι ίσες, το σύστημα ονομάζεται **ισορροπημένο** (balanced). Σε ισορροπημένα συστήματα, όλες οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης είναι ίσες με

$$\frac{1}{\binom{N+M-1}{N}} = \frac{(M-1)! N!}{(N+M-1)!}$$

και οι πελάτες ισοκατανέμονται κατά μέσον όρο ανάθεσα στους σταθμούς. Το μέσο πλήθος πελατών σε κάθε σταθμό (εξυπηρέτηση + αναμονή) είναι N/M .

Μπορεί να αποδειχθεί ότι όταν οι σταθμοί παραγωγής αποτελούνται από μία μηχανή οι μέσοι ρυθμοί εισροής/εκροής δίδονται από τις σχέσεις

$$\lambda_i = x_i \frac{G(N-1)}{G(N)}$$

Η ποσότητα x_i ισούται με την φόρτιση της μηχανής i .

Προσομοίωση Συστημάτων

Μοντέλο διακριτών γεγονότων - Αλυσίδα Markov

Παράμετροι

- σύνολο καταστάσεων $\{1, 2, \dots, n\}$
- ρυθμοί μεταβάσεως λ_{ij} (από την i στην j), μ_i (έξοδος από την i), όπου $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, με $i \neq j$
- αρχική κατάσταση s_0
- TSIM συνολικός χρόνος προσομοίωσης

και μεταβλητές καταστάσεως

- t : ρολόι προσομοίωσης (=TΩΡΑ)
- i : κατάσταση του συστήματος τη στιγμή t
- x : χρόνος παραμονής στην κατάσταση i
- $W(k)$: συνολικός χρόνος παραμονής στην κατάσταση $k = 1, \dots, n$.

Προσομοίωση Συστημάτων

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

(α) Διάβασε τα δεδομένα

(β) $t=0$, $i=s_0$, $W(k)=0$ για κάθε $k=1, \dots, n$.

(γ) Γέννησε τον εκθετικό χρόνο παραμονής στην i , $x = -\frac{\ln(U)}{\mu_i}$.

AN $t+x \geq \text{TSIM TOTE}$

$W(i) \leftarrow W(i) + (TSIM - t)$ και πήγαινε στο (ε),

ΑΛΛΙΩΣ

$W(i) \leftarrow W(i) + x$,

$t \leftarrow t + x$,

Βρες την επόμενη κατάσταση j χρησιμοποιώντας γεννήτρια διακριτών τ.μ. με

πιθανότητες $P_j = \frac{\lambda_{ij}}{\mu_i}$.

(δ) Επόμενη κατάσταση $i:=j$. Πήγαινε στο (γ).

(ε) Εκτίμησε τις πιθανότητες καταστάσεων $k=1, \dots, n$

$$P(s=k|s(0)=s_0) = \frac{W(k)}{\text{TSIM}}.$$