

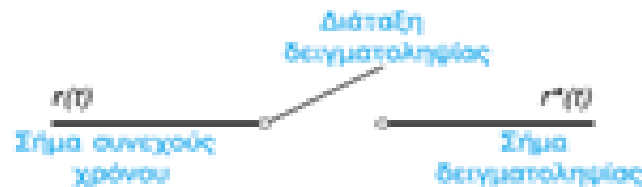
Σχεδίαση-Υλοποίηση Ψηφιακών Συστημάτων Ελέγχου

(Design-realization digital control systems)

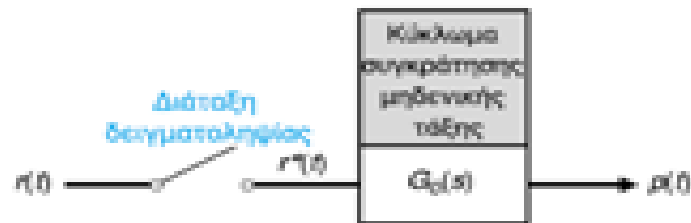
Ψηφιακό Σύστημα Αυτομάτου Ελέγχου



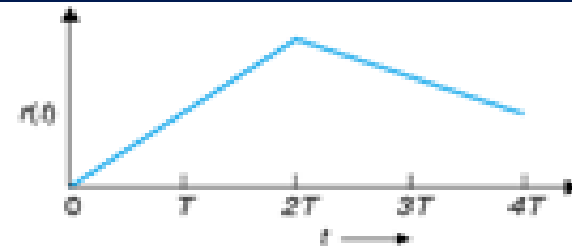
Μετασχηματισμός Z



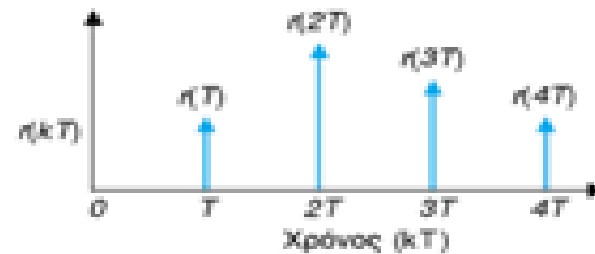
Σχήμα 1 Ιδανική διάταξη δειγματοληψίας με είσοδο $r(t)$.



Σχήμα 3 Κύκλωμα συγκράτησης μηδενικής τάξης και διάταξη δειγματοληψίας.



(α)



(β)

Σχήμα 2 (α) Ένα αναλογικό σήμα εισόδου $r(t)$. (β) Σήμα δειγματοληψίας

$r^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT) \delta(t - kT)$. Τα έγχρωμα κατακόρυφα βέλη παριστάνουν κρουστικούς παλμούς.

$$L\{r^*(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT)e^{-kTs}$$

για... $z = e^{sT}$...έχουμε... $Z\{r(t)\} = Z\{r^*(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT)z^{-k}$

Μετασχηματισμός Z

Πίνακας 1 Μετασχηματισμοί-z

$x(t)$	$X(s)$	$X(z)$
$\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0, \\ 0 & t = kT, k \neq 0 \end{cases}$	1	1
$\delta(t - kT) = \begin{cases} 1 & t = kT, \\ 0 & t \neq kT \end{cases}$	e^{-kTs}	z^{-k}
$u(t)$, Μοναδιαία Βηματική συνάρτηση	$1/s$	$\frac{z}{z-1}$
t	$1/s^2$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{(ze^{-aT} \sin \omega T)}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{z^2 - ze^{-aT} \cos \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$

Πίνακας 2 Ιδιότητες των Μετασχηματισμών-z

	$x(t)$	$X(z)$
1.	$kx(t)$	$kX(z)$
2.	$x_1(t) + x_2(t)$	$X_1(z) + X_2(z)$
3.	$x(t+T)$	$zX(z) - zx(0)$
4.	$tx(t)$	$-Tz \frac{dX(z)}{dz}$
5.	$e^{-at}x(t)$	$X(ze^{aT})$
6.	$x(0)$, αρχική τιμή	$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$ αν υπάρχει το όριο
7.	$x(\infty)$ τελική τιμή	$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$ αν υπάρχει όριο και το σύστημα είναι ευσταθές, δηλαδή αν όλοι οι πόλοι της παράστασης $(z-1)X(z)$ βρίσκονται μέσα στο μοναδιαίο κύκλο $ z =1$ στο επίπεδο- z

Παράδειγμα - Δεδομένα

ΣΜ Ελεγχόμενος συνδυασμός $G_p(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}$
 ΣΜ εκτελεστής διατάξεως μοναδιαίας ταχύτητας $G_0(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s}$

$$G(s) = G_0(s)G_p(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s^2(s+1)} = (1-e^{-sT}) \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} \right)$$

$$G(z) = \mathcal{Z}\{G(s)\} = (1-z^{-1}) \mathcal{Z}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right)$$

$$G(z) = (1-z^{-1}) \left[\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-T}} \right] = \frac{(ze^{-T} - z + Tz) + (1-e^{-T} - Te^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

για $T=1$
 χρόνος διαγροφής $G(z) = \frac{ze^{-1} + 1 - 2e^{-1}}{(z-1)(z-e^{-1})} = \frac{0,3678z + 0,2644}{(z-1)(z-0,3678)} = \frac{0,3678z + 0,2644}{z^2 - 1,3678z + 0,3678}$

$\Sigma.A.B$ $Y(z) = G(z)R(z)$ ($R(z)=1$ μοναδιαία κρουστική διέγερση)
 $Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)z^{-k} = 0,3678z^{-1} + 0,7675z^{-2} + 0,9145z^{-3} + \dots$

$\Sigma.L.B.$ $\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{0,3678z + 0,2644}{z^2 - z + 0,6322}$

για $R(z) = \frac{z}{z-1}$ (μοναδιαία διακριτή είσοδος) $Y(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} \cdot \frac{z}{z-1}$

$$Y(z) = \frac{z(0,3678z + 0,2644)}{(z-1)(z^2 - z + 0,6322)} = 0,3678z^{-1} + z^{-2} + 1,4z^{-3} + 1,4z^{-4} + 1,147z^{-5} + \dots$$

Παράδειγμα

ΕΥΕΤΑΘΗ ΑΣ.Κ.Β. αν $G_p(s) = \frac{k}{s(s+1)} \Rightarrow G(z) = \frac{k(\alpha z + b)}{z^2 - (1+d)z + \alpha}$ $a=0,3678$
 $b=0,2644$

$$q(z) = 1 + G(z) = z^2 - (1+\alpha)z + \alpha + k\alpha z + kb = 0$$

για $k=1$ έχουμε $q(z) = z^2 - z + 0,6322 = (z - 0,50 + j0,6182)(z - 0,50 - j0,6182)$

$k=10$ $q(z) = z^2 + 2,310z + 3,012 = (z + 1,155 + j1,295)(z + 1,155 - j1,295)$

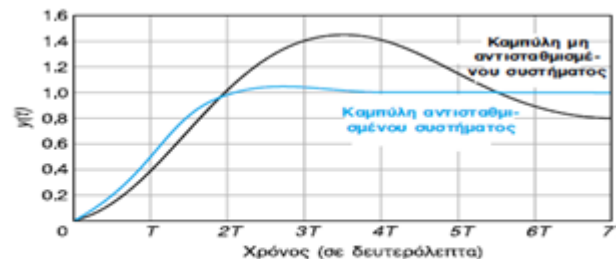
ΕΥΕΤΑΘΕΣ $0 < k < 2,39$

Σ.Κ.Β. ψηφιακά διακριτού $\frac{Y(z)}{R(z)} = T(z) = \frac{G(z) D(z)}{1 + G(z) D(z)}$

Επιλέγοντας $D(z) = \frac{k(z - 0,3678)}{z + 0,240}$ (Εξουδετερώνουμε τον πόλο της $G(z)$)

τότε της $G(z) = \frac{0,3678(z + 0,7189)}{(z-1)(z-0,3678)}$ στο βήμα $z=0,3678$

για $k=1,359$ έχουμε $P.O. = 4\%$ (αντί 45% του ψηφιακά διακριτού) και ταύτιση της εξόδου με την είσοδο από $\omega 4T$ και μετά.



Σχήμα Η βηματική απόκριση ενός διακριτού συστήματος δεύτερης τάξης.

MPZ (matched pole-zero) μέθοδος

- Αντιστοίχιση πόλων και μηδενικών με την σχέση: $z = e^{st}$
- Εάν ο αριθμητής είναι βαθμού μικρότερου του παρονομαστή, πρόσθεση $z+1$, μέχρι να γίνει ίσου βαθμού.
- Εξίσωση του DC κέρδους του $D(z)$ με του DC κέρδους του $G_c(s)$.

$$G_c(s) = K_c \frac{s+a}{s+b}$$

$$D(z) = K_d \frac{z - e^{-aT}}{z - e^{-bT}}$$

Με χρήση του θεωρήματος τελικής τιμής έχουμε:

$$K_c \frac{a}{b} = K_d \frac{1 - e^{-aT}}{1 - e^{-bT}} \Rightarrow K_d = K_c \frac{a}{b} \frac{1 - e^{-bT}}{1 - e^{-aT}}$$

Παράδειγμα για ΜΡΖ-Αποτελέσματα

Σ.Μ. ελεγχόμενου συστήματος $G_p(s) = \frac{1740}{s(0,25s+1)}$

Να βρεθεί ελεγκτής $G_c(s)$, ώστε να έχουμε περιθώριο φάσης 45° με συχνότητα διαδιαρμής $\omega_c = 125 \text{ rad/sec}$.

Έστω ελεγκτής της μορφής $G_c(s) = \frac{k(s+z)}{s+p}$

Κάνοντας χρήση της μεθόδου σχεδιασμού κυκλωμάτων προήγουσ φάσης με χρήση διαγραμμάτων Bode (Dorf §10.4) και γνωρίζοντας ότι $\omega_c = 125 \text{ rad/sec}$ βρίσκουμε $\alpha = \frac{p}{z} = 425$.

Επίσης γνωρίζουμε $\omega_c = \omega_m = \sqrt{zp} = 125 \Rightarrow z = 50 \text{ ή } p = 312$

Αρα $G_c(s) = \frac{k(s+50)}{s+312}$. Από την οχτίδα $|G(s)G_c(s)| = 1$ για $\omega = \omega_c$ προκύπτει $k = 5,6$. Οπότε από την ΜΡΖ ψάχνουμε για $T = 0,001 \text{ sec}$ προκύπτει $D(z) = \frac{4,85(z-0,95)}{z-0,73}$.

Γενικά ισχύει $T \approx \frac{1}{(10 \div 20) f_B}$ όπου $f_B = \frac{\omega_B}{2\pi}$ για $\omega_B = 180^\circ$

για $\omega_B = 10$ και $f_B = 28,6 \text{ Hz} \Rightarrow T = 0,003$

για $\omega_B = 20 \Rightarrow T = 0,0015$