

$$\Gamma \rightarrow 2000 - (1732 + 46) = 2000 - 1838 = 162 \text{ στολές.}$$

Άσκηση 7

Από έναν πληθυσμό ο οποίος ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο μ και διασπορά 81, παίρνουμε τυχαίο δείγμα 36 παρατηρήσεων το οποίο έχει αριθμητικό μέσο $\bar{x} = 35$. Να βρεθεί το διάστημα εμπιστοσύνης μέσο στο οποίο βρίσκεται η μέση τιμή του πληθυσμού με πιθανότητα 95% και 99%.

Λύση:

$$\bullet \bar{x} - Z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + Z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 35 - 1,96 \cdot \frac{9}{6} < \mu < 35 + 1,96 \cdot \frac{9}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 32,06 < \mu < 37,94$$

$$P(32,06 < \mu < 37,94) = 95\%$$

$$\bullet \bar{x} - Z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + Z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

$$35 - 2,58 \cdot \frac{9}{6} < \mu < 35 + 2,58 \cdot \frac{9}{6} \Rightarrow$$

$$31,13 < \mu < 38,87$$

$$P(31,13 < \mu < 38,87) = 99\%$$

Άσκηση 8

Η μέτρηση του ύψους σε ένα δείγμα 20 ατόμων από έναν πληθυσμό έδωσε παρακάτω αποτελέσματα σε εκατοστά:

173 166 162 166 169 160 173 170 170 176
166 161 166 170 168 158 173 166 165 165

Αν είναι γνωστό ότι τα ύψη ακολουθούν κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ με τυπική απόκλιση $\sigma = 5$ εκ, να κατασκευασθεί ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το μέσο ύψος μ του πληθυσμού.

β) Να απαντήσετε στο ερώτημα (α), αν είναι γνωστό ότι τα ύψη ακολουθούν κανονική κατανομή με άγνωστη διασπορά $\sigma^2 > 0$.

Λύση:

α) Το Δ.Ε. είναι $\bar{x} \pm Z_{0,025} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

όμως, $\bar{x} = \frac{173+166+\dots+165}{20} = 167,6$

Άρα, $167,6 \pm 1,96 \frac{5}{\sqrt{20}}$

$$167,6 \pm 1,96 \frac{5}{4,47}$$

$$167,6 \pm 2,19$$

Άρα: $(165,41, 169,75)$
 $P(165,41 < \mu < 169,75) = 95\%$

β) Πρέπει να υπολογίσουμε το S' ,

$$S'^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{(173-167,6)^2 + (166-167,6)^2 + \dots + (165-167,6)^2}{19}$$
$$= 15,83$$

Άρα,

Τοις Αντικείμεν Σειγματος.

$$S' = \sqrt{15,83} = 3,97$$

οτιοτε,

Δ.Ε είναι :

$$\bar{x} \pm t_{0,025}^{19} \frac{S'}{\sqrt{n}}$$

$$167,6 \pm 2,093 \frac{3,97}{4,47}$$

$$167,6 \pm 1,85$$

$$(165,75, 169,40)$$

$$P(165,75 < \mu < 169,40) = 95\%$$

Με πιθανότητα 95% το άγνωστο ύψος είναι ανάμεσα σε αυτές τις τιμές.

Άσκηση 9

Για να εκτιμηθεί η μέση βαθμολογία των φοιτητών στις εξετάσεις κάποιας μαθήματος, παίρνουμε ένα δείγμα 16 φοιτητών και καταγράφουμε την βαθμολογία τους:

10 3 5 4 7 8 9 9 8 5 5 8 6 6 9 16

Να εκτιμηθεί το μ :

i) Τηλεκτικά

ii) με διάστημα εμπιστοσύνης 90%.

Υποθέστε στην βαθμολογία στις εξετάσεις ακολουθεί κανονική κατανομή.

a) $N \sim (\mu, 4)$ (δίδ $\sigma^2 = 4$ γνωστό)

Λύση:

i) Τηλεκτικά εκτίμηση του μ είναι το:

$$\bar{x} = \dots = 7$$

ii) Δ.Ε. α) $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 4)$

β) $X \sim N(\mu, \sigma^2 = \text{άγνωστο})$

Επομένως,

$$\alpha) \bar{x} \pm Z_{0,05} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$7 \pm 1,65 \frac{2}{4}$$

$$7 \pm 0,825$$

$$(6,175, 7,825)$$

$$P(6,175 < \mu < 7,825) = 90\%$$

$$b) S'^2 = \frac{(10-7)^2 + (3-7)^2 + \dots + (10-7)^2}{n-1}$$

$$S'^2 = \frac{72}{15}$$

$$S'^2 = 4,8$$

$$S' = \sqrt{4,8}$$

$$S' = 2,19$$

$$\text{Apa, to A.E. Given } \bar{x} \pm t_{0,05} \frac{S'}{\sqrt{n}}$$

$$7 \pm 1,753 \frac{2,19}{4}$$

$$7 \pm 0,95$$

$$(6,05, 7,95)$$

$$P(6,05 < \mu < 7,95) = 90\%$$

Άσκηση 10

Από την παραγωγή μιας βιομηχανίας πήραμε δείγμα 144 κονσερβών από, οποίο υπολογίστηκε ότι το μέσο βάρος κάθε κονσερβας είναι 500 gr και τυπική απόκλιση 120 gr. Να προσδιορισθεί ένα 99% διάστημα εμπιστοσύνης για το μέσο βάρος του συνόλου των κονσερβών που παράγει η βιομηχανία.

Λύση:

Επειδή η κατανομή του βάρους δεν είναι κανονική και το $n > 30$, τότε το CI είναι:

$$\left(\bar{x} \pm Z_{0,005} \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\left(\bar{x} \pm 2,58 \frac{120}{\sqrt{144}} \right)$$

$$\left(500 \pm 2,58 \frac{120}{12} \right)$$

$$(500 \pm 2,58 \cdot 10)$$

$$(500 \pm 25,8)$$

$$(474,2, 525,8)$$

$$P(474,2 < \mu < 525,8) = 99\%$$

Η πιθανότητα ^{το βάρος της} ~~η~~ κονσερβας να είναι ανάμεσα σε αυτά είναι 99%.

Άσκηση 11

Σε 9 παρατηρήσεις $x_1, x_2, \dots, x_9$ σε ισάριθμους φοιτητές για τη διάρκεια μελέτης ενός προβλήματος βρέθηκε $\bar{x} = 35,22$ (ώρες), $\sum_{i=1}^9 (x_i - \bar{x})^2 = 195,59$.
Να βρεθεί 95% Δ.ε. για τα μ (υποθέτουμε ότι τα δεδομένα ακολουθούν κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$).

Λύση:

Εφόσον η κατανομή του χρόνου μελέτης είναι κανονική και $n > 30$ τότε Δ είναι:

$$(\bar{x} \pm t_{0,025}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}})$$

$$(35,22 \pm 2,306 \frac{4,94}{\sqrt{9}})$$

$$(35,22 \pm 2,306 \frac{4,94}{3})$$

$$(35,22 \pm 2,306 \cdot 1,64)$$

$$(35,22 \pm 3,79)$$

$$(31,42, 39,01)$$

$$P(31,42 < \mu < 39,01) = 95\%$$

Η πιθανότητα ο μέσος χρόνος μελέτης να είναι μέσα σε αυτές τις δύο αξίες είναι 95%.

Άσκηση 12

Από 100 τυχαίους ψηφοφόρους που ρωτήθηκαν σε μια συγκεκριμένη περιοχή 55 είναι οι θα ψηφίσουν ένα ορισμένο υποψήφιο. Υπολογίστηκε ένα 95% για την αναλογία ψήφων ^(P) που θα πάρει ο υποψήφιος αυτός κατά τις εκλογές όλης της περιοχής.

Λύση:

Αφού $n > 30$ τότε το $\hat{P}$ του υποψηφίου ~~είναι~~ ^{για} Δ.Ε. του είναι:

$$\hat{P} \pm Z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})}}{\sqrt{n}}$$

$$(0,55 \pm 1,96 \frac{\sqrt{0,55 \cdot 0,45}}{\sqrt{100}})$$

$$(0,55 \pm 1,96 \frac{0,49}{10})$$

$$(0,55 \pm 1,96 \cdot 0,049)$$

$$(0,55 \pm 0,09)$$

$$(0,46, 0,64)$$

$$P(0,46 < p < 0,64) = 95\%$$

Άσκηση (13)

Έγινε η εξής έρευνα σε 800 φοιτητές << Αγοράσατε τουλάχιστον ένα ζευγάρι παπούτσια στο χρονικό διάστημα των μηνών Σεπτεμβρίου - Ιουνίου >>. Ο αριθμός των θετικών απαντήσεων ήταν 100.

α) Βρείτε 95% Δ.Ε. για το ποσοστό των φοιτητών που αγόρασαν τουλάχιστον ένα ζευγάρι παπούτσια το παραπάνω χρονικό διάστημα.

β) Υποθέτουμε ότι στους φοιτητές, παράλληλα με την προηγούμενη έρευνα, ετύχισε και η τιμή κάθε ζευγαριού παπουτσιών που αγόρασαν. Βρέθηκε ότι $\bar{x} = 37,21 \text{ €}$ και $s = 11,32 \text{ €}$.

Βρείτε το 95% Δ.Ε. για την μέση τιμή αγοράς παπουτσιών από όλους τους φοιτητές.

Λύση:

$$\text{α) } \left(\hat{p} \pm Z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}} \right)$$
$$\left(0,125 \pm 1,96 \frac{\sqrt{0,125 \cdot 0,875}}{\sqrt{800}} \right)$$

$$\left(0,125 \pm 1,96 \cdot 0,01 \right)$$

$$\left(0,125 \pm 0,0196 \right)$$

$$\left(0,1054, 0,1446 \right) \text{ ή } \left(10,54\%, 14,46\% \right)$$

$$\text{Prob} \left(10,54\% < \hat{p} < 14,46\% \right) = 95\%$$

Η πιθανότητα το άγνωστο ποσοστό να είναι ανάμεσα σε αυτές τις τιμές είναι 95%.

<u>Δεδομένα</u>
ποσοστό δείγματος $s = \frac{100}{800} = 0,125$
$\hat{p} = 0,125$
$1-\hat{p} = 1-0,125 = 0,875$
$n = 800$
95% $\Rightarrow Z_{0,025} = 1,96$

β)

Επειδή, η αλυσή των παρατηρήσεων δεν ακολουθεί την κανονική κατανομή

$\sigma^2 = \text{αγνωστο}$

$n = 100 > 30$

Οπότε, το Δ.Ε. είναι:

$$\left(\bar{x} \pm Z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\left(37,21 \pm Z_{0,025} \frac{11,32}{\sqrt{100}} \right)$$

$$\left(37,21 \pm 1,96 \frac{11,32}{10} \right)$$

$$\left(37,21 \pm 2,21 \right)$$

$$\left(35,21, 39,42 \right)$$

$$\left(35,21, 39,42 \right)$$

$$P(35,21 < \mu < 39,42) = 95\%$$