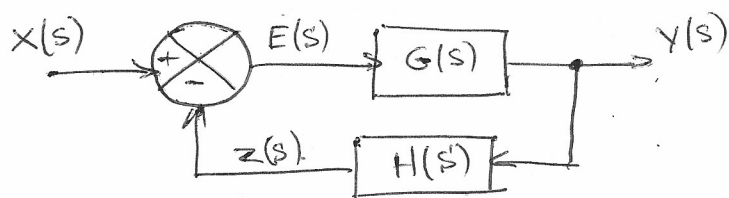


ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΣΤΗ ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

-1-



$$F(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Για το σήμα $E(s)$ ισχύει: $E(s) = X(s) - H(s)Y(s)$

Το πηλίκον $\frac{E(s)}{X(s)}$ ονομάζεται συνάρτηση μεταφοράς σφάλματος και είναι:

$$\begin{aligned} \frac{E(s)}{X(s)} &= 1 - H(s) \frac{Y(s)}{X(s)} \Rightarrow \frac{E(s)}{X(s)} = 1 - H(s) \left[\frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \right] = 1 - \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)} \\ &= \frac{1 + G(s)H(s) - G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)} \\ &= \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \end{aligned}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς σφάλματος

$$\boxed{\frac{E(s)}{X(s)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}} \quad \text{και} \quad \boxed{H(s) = 1} \Rightarrow \boxed{\frac{E(s)}{X(s)} = \frac{1}{1 + G(s)}}$$

Το σφάλμα $e(t)$ θα έχει μ τιμή.

$$\boxed{e(t) = x(t) - y(t)}$$

Για $H(s) \neq 1$ το σφάλμα έχει μ τιμή.

$$e(t) = x(t) - z(t)$$

Το σφάλμα στη μόνιμη κατάσταση συμβολίζεται με $e_{ss}(t)$, ή $e_{\mu\sigma\nu}(t)$, και είναι:

$$e_{ss}(t) = e_{\mu\sigma\nu}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{X(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (3.7)$$

Η σχέση (3.7) ισχύει με την προϋπόθεση ότι $sE(s)$ έχει τους πόλους της στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο.

Θα δώσουμε τους τύπους υπολογισμού του βγαλματος:

i) για διεξέρση της μορφής

$$x(t) = Au(t), \quad \dot{x}(t) = At \quad \text{και} \quad x(t) = \frac{1}{2}At^2$$

(1) Είσοδος Βηματική $x(t) = Au(t)$.

Το μόνιμο βγάμμα $e_{ss}(t)$ ονομάζεται βγάμμα θέσης

$$\text{Είναι: } e_{ss}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot \frac{A}{s}}{1 + G(s) \cdot H(s)} = \frac{A}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)} = \frac{A}{1 + K_p} \quad (3.8)$$

$$\text{όπου } K_p = \text{βαθερὰ βγάμματος θέσης} = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)$$

(2) Είσοδος αναρριχητική $x(t) = At$.

$$X(s) = \frac{A}{s^2}$$

Το μόνιμο βγάμμα e_{ss} ονομάζεται βγάμμα ταχύτητας.

$$\text{Είναι: } e_{ss}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sX(s)}{1 + G(s)H(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot \frac{A}{s^2}}{1 + G(s)H(s)} =$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{s(1 + G(s)H(s))} = \frac{A}{\lim_{s \rightarrow 0} s + \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)}$$

$$= \frac{A}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)} = \frac{A}{K_v}$$

$$\text{όπου } K_v = \text{βαθερὰ βγάμματος ταχύτητας} = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)$$

(3) Είσοδος παραβολική $x(t) = \frac{1}{2} A t^2$.

-3-

Το μόνιμο γράφημα e_{ss} ονομάζεται γράφημα επιρράχυνσης

Είναι

$$e_{ss}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sX(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{x(t)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2} A t^2\right\}$$

$$X(s) =$$

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, n = \text{θετικός} \Rightarrow \frac{t^{3-1}}{(3-1)!} = \frac{t^2}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} t^2$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{x(t)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{A \cdot \frac{1}{2} t^2\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{A \cdot \frac{t^{3-1}}{(3-1)!}\right\} \quad n=3$$

$$X(s) = A \frac{1}{s^3}$$

$$e_{ss}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot \frac{A}{s^3}}{1 + G(s)H(s)}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{s^2 [1 + G(s)H(s)]}$$

$$= \frac{A}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 + \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)}$$

$$= \frac{A}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)}$$

$$= \frac{A}{K_a} \quad \text{όπου}$$

$K_a = \text{σταθερά γραφήματος επιρράχυνσης} =$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)$$

ΤΥΠΟΣ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ

-4-

Έστω η συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου $G(s) \cdot H(s)$ του συστήματος του σχήματος 3.1 έχει μορφή:

$$G(s) \cdot H(s) = K \frac{\prod_{i=1}^n (T_i' s + 1)}{s^e \prod_{i=1}^m (T_i s + 1)}$$

Ένα σύστημα ονομάζεται σύστημα τύπου ℓ , όταν η συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου έχει ℓ πόλους στο σημείο $s=0$

A2KH2H

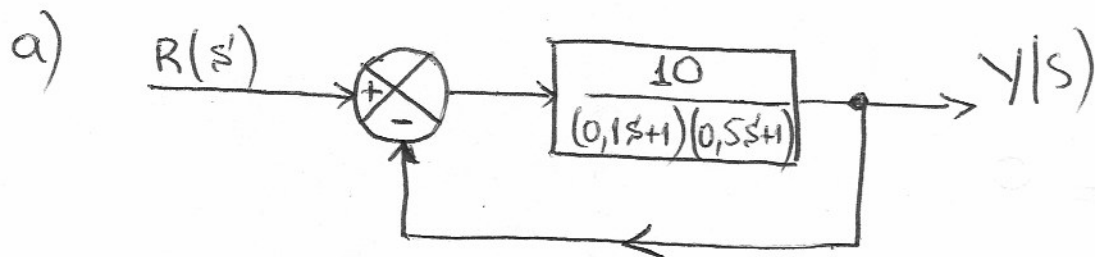
Να βρεθούν οι σταθερές βραχμάτος θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης των συστημάτων ελέγχου μοναδιαίας ανατροφοδότησης, των οποίων δίνονται οι συναρτήσεις μεταφοράς ανοικτού βρόχου. Καθώς και τα βραχμάτα θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης. $[A=1]$

$$a) G(s) = \frac{10}{(0,1s+1)(0,5s+1)}$$

$$β) G(s) = \frac{20}{s(s+2)(s+5)}$$

$$γ) G(s) = \frac{100(s+1)}{s^2(s^2+4s+5)}$$

ΛΥΣΗ



Για $G(s)H(s) = \frac{10}{(0,1s+1)(0,5s+1)}$ οι ζητούμενες σταθερές βραχμάτων θα είναι:

$$\begin{aligned} K_p &= \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10}{(0,1s+1)(0,5s+1)} = \frac{\lim_{s \rightarrow 0} 10}{\left[\lim_{s \rightarrow 0} 0,1s + \lim_{s \rightarrow 0} 1 \right] \left[\lim_{s \rightarrow 0} 0,5s + \lim_{s \rightarrow 0} 1 \right]} \\ &= \frac{10}{(1)(1)} = 10 \end{aligned}$$

$$e_{ss}(t) = \frac{A}{1+K_p} = \frac{1}{1+10} = \frac{1}{11} = 0,09$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{10}{(0,1s+1)(0,5s+1)} = \frac{\lim_{s \rightarrow 0} 10s}{\left[\lim_{s \rightarrow 0} 0,1s + \lim_{s \rightarrow 0} 1 \right] \left[\lim_{s \rightarrow 0} 0,5s + \lim_{s \rightarrow 0} 1 \right]} = \frac{0}{(1) \cdot (1)} = 0.$$

$$e_{ss}(t) = \frac{A}{K_v} = \frac{1}{0} = \infty.$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10s^2}{(0,1s+1)(0,5s+1)} = \frac{\lim_{s \rightarrow 0} 10s^2}{\left[\lim_{s \rightarrow 0} 0,1s + \lim_{s \rightarrow 0} 1 \right] \left[\lim_{s \rightarrow 0} 0,5s + \lim_{s \rightarrow 0} 1 \right]} = \frac{0}{(1)(1)} = 0.$$

$$= \frac{0}{(1)(1)} = 0.$$

$$e_{ss}(t) = \frac{A}{K_a} = \frac{1}{0} = \infty$$

B) Tra $G(s)H(s) = \frac{20}{s(s+2)(s+5)}$ exo 10 :

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{20}{s(s+2)(s+5)} = \frac{\lim_{s \rightarrow 0} 20}{\lim_{s \rightarrow 0} s \left[\lim_{s \rightarrow 0} (s+2) \right] \left[\lim_{s \rightarrow 0} (s+5) \right]}$$

$$= \frac{20}{(0)(2)(5)} = \frac{20}{0} = \infty.$$

$$e_{ss}(t) = \frac{A}{1+K_p} = \frac{1}{1+\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{20s}{s(s+2)(s+5)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{20}{(s+2)(s+5)} = \frac{\lim_{s \rightarrow 0} 20}{\left[\lim_{s \rightarrow 0} (s+2) \right] \left[\lim_{s \rightarrow 0} (s+5) \right]} = \frac{20}{(2)(5)} = \frac{20}{10} = 2$$

$$e_{ss}(t) = \frac{A}{K_v} = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{20s^2}{s(s+2)(s+5)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{20s}{(s+2)(s+5)} \quad -4-$$

$$= \frac{\lim_{s \rightarrow 0} 20s}{\left[\lim_{s \rightarrow 0} s + \lim_{s \rightarrow 0} 2 \right] \left[\lim_{s \rightarrow 0} s + \lim_{s \rightarrow 0} 5 \right]} = \frac{0}{(2)(5)} = \frac{0}{10} = 0$$

$$e_{ss}(t) = \frac{A}{K_a} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$8) \text{ Type } G(s) H(s) = \frac{100(s+1)}{s^2(s^2+4s+5)} \quad \text{exemple:}$$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(100s+100)}{s^2(s^2+4s+5)} =$$

$$= \frac{\lim_{s \rightarrow 0} 100s + \lim_{s \rightarrow 0} 100}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 \left[\lim_{s \rightarrow 0} s^2 + \lim_{s \rightarrow 0} 4s + \lim_{s \rightarrow 0} 5 \right]} = \frac{100}{(0)(5)} = \infty$$

$$e_{ss}(t) = \frac{A}{1+K_p} = \frac{1}{1+\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$K_V = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{100s'(s+1)}{s'^2(s'^2+4s'+5)} =$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{100s' + 100}{s'(s'^2 + 4s' + 1)} = \frac{\lim_{s \rightarrow 0} 100s' + \lim_{s \rightarrow 0} 100}{\lim_{s \rightarrow 0} s' \left[\lim_{s \rightarrow 0} s'^2 + \lim_{s \rightarrow 0} 4s' + \lim_{s \rightarrow 0} 5 \right]} =$$

$$= \frac{100}{(0) \cdot (5)} = \frac{100}{0} = \infty$$

$$e_{ss}(t) = \frac{A}{K_V} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{100s'^2(s'+1)}{s'^2(s'^2+4s'+5)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(100s' + 100)}{s'^2 + 4s' + 5} =$$

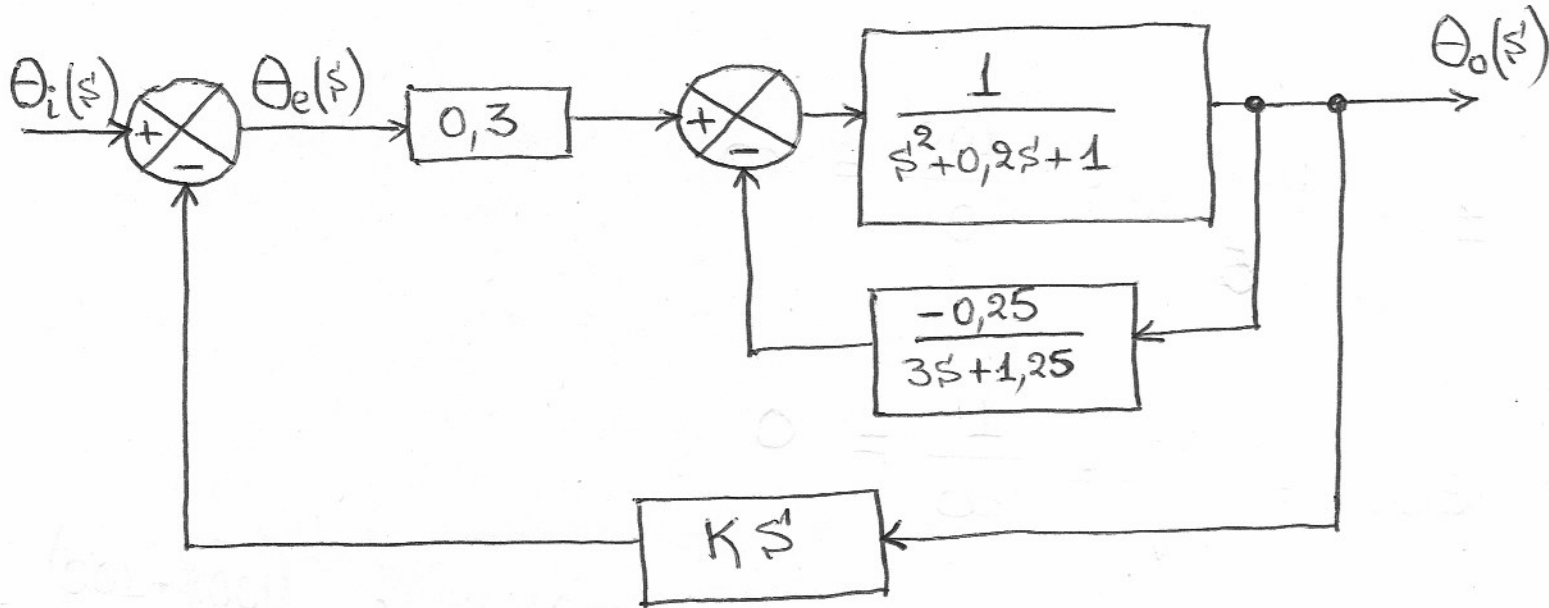
$$= \frac{\lim_{s \rightarrow 0} 100s' + \lim_{s \rightarrow 0} 100}{\lim_{s \rightarrow 0} s'^2 + \lim_{s \rightarrow 0} 4s' + \lim_{s \rightarrow 0} 5} = \frac{100}{5} = 20$$

$$e_{ss}(t) = \frac{A}{K_a} = \frac{1}{20} = 0,05$$

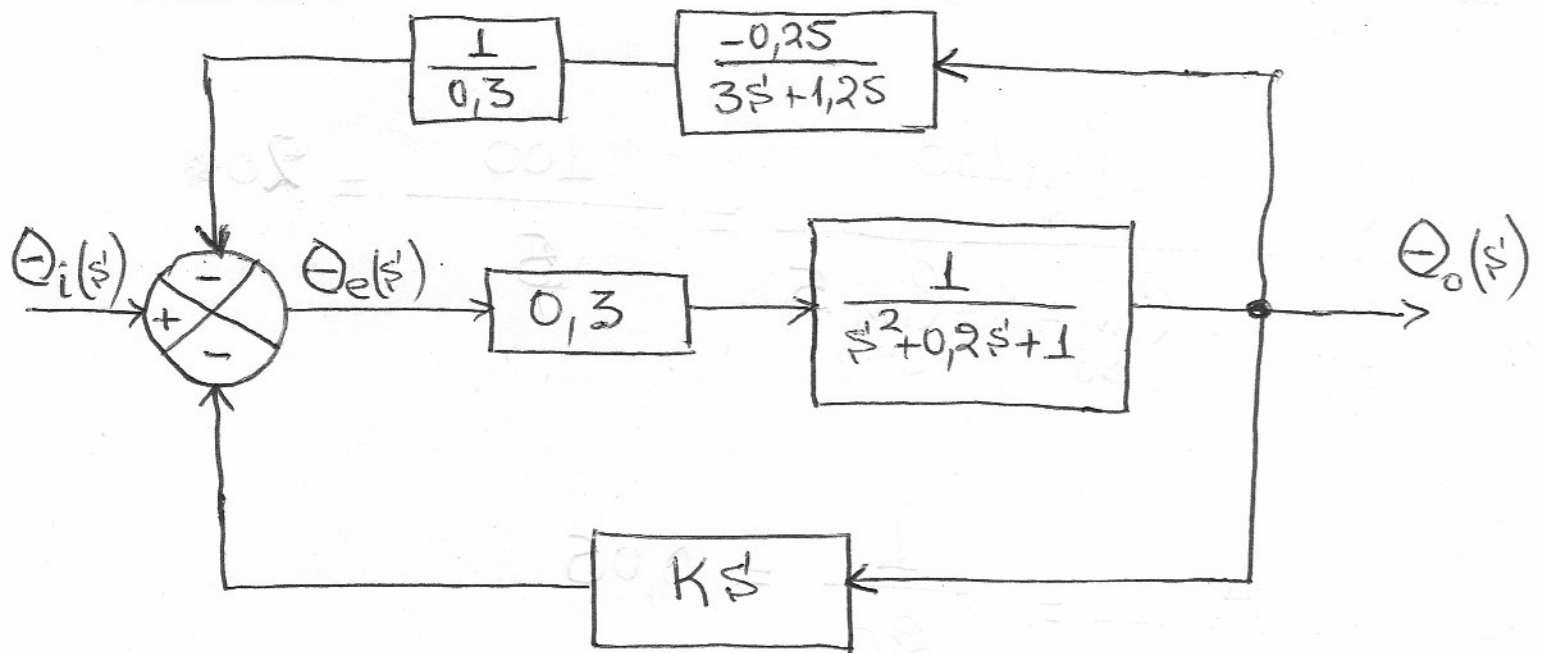
Στο Σχ.1 σχεδιάζεται το διάγραμμα βαθμίδων συστήματος ελέγχου κίνησης αεροκράδους.

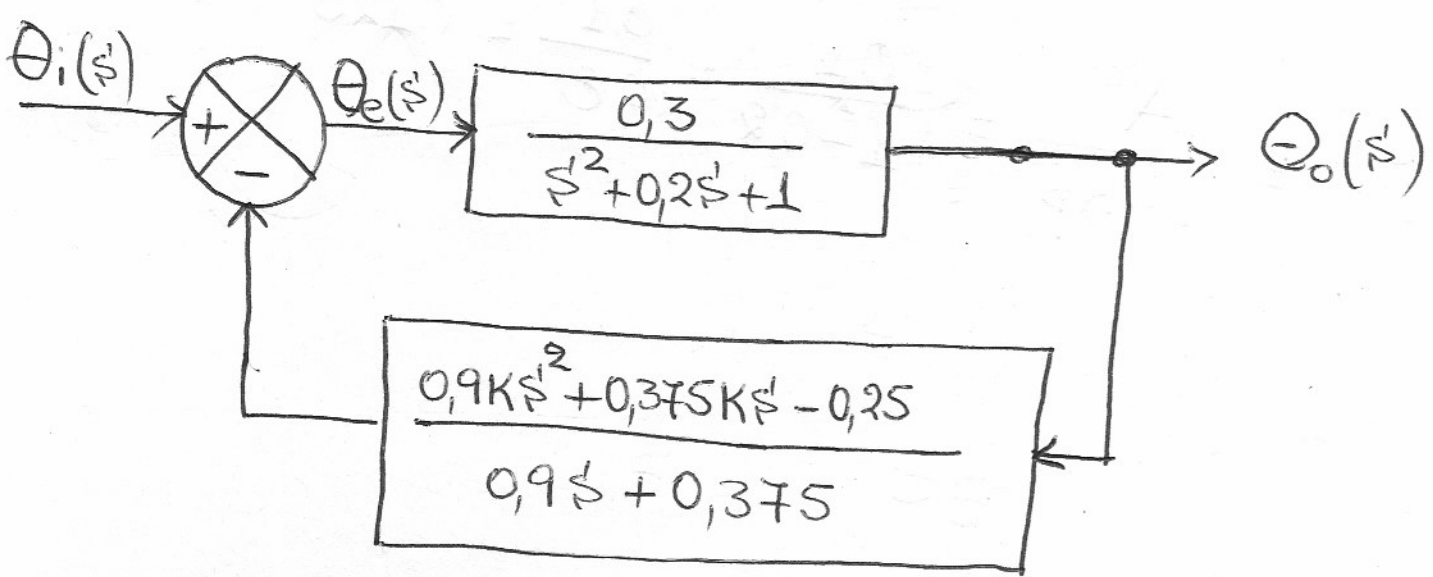
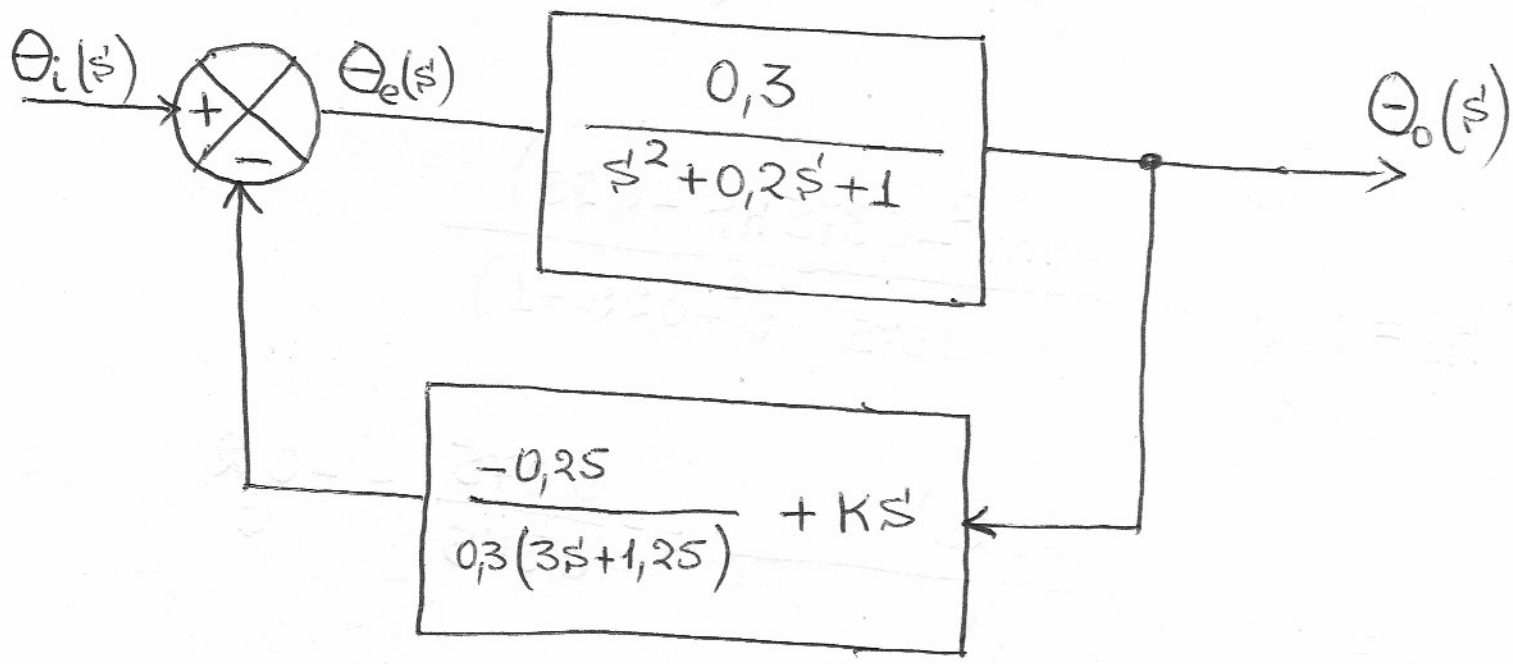
Να βρεθεί το άραγμα μόνιμης κατάστασης για βηματική είσοδο $\theta_i(t) = 0,1 \text{ rad/sec}$.

Σχ. 1.



ΛΥΣΗ.





$$G(s)H(s) = \frac{0,3(0,9Ks^2 + 0,375Ks - 0,25)}{(0,9s + 0,375)(s^2 + 0,2s + 1)}$$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{0,3(0,9Ks^2 + 0,375Ks - 0,25)}{(0,9s + 0,375)(s^2 + 0,2s + 1)}$$

$$= \frac{(0,3)(-0,25)}{(0,375)(1)} = -\frac{0,075}{0,375} = -0,2.$$

$$e_{ss}(t) = \frac{A}{1+K_p} = \frac{0,1}{1-0,2} = \frac{0,1}{0,8} = 0,125$$