



ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΩΝ ΑΝΤΙΡΡΥΠΑΝΣΗΣ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου

Κοζάνη 2014

ΜΑΣΤΟΡΑΣ ΙΩΑΝΝΗΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

Πρόλογος

Οι σημειώσεις αυτές ασχολούνται με τον κλασικό αυτόματο έλεγχο γραμμικών συστημάτων μη χρονικά μεταβαλλόμενων. Κλασσικές μέθοδοι ανάλυσης παρουσιάζονται σε σχέση με την χρήση τους στην σχεδίαση. Επομένως, δίνεται ιδιαίτερη σημασία στην ερμηνεία και στους τρόπος χρήσης των διαφόρων τεχνικών ελέγχου παρά στις κατασκευαστικές ή μαθηματικές τους λεπτομέρειες. Οι σημειώσεις επικεντρώνονται στη μελέτη και σχεδίαση συστημάτων πρώτου και δευτέρου βαθμού λόγω της σπουδαιότητας των συστημάτων αυτών στην πράξη. Έννοιες και τεχνικές δεν αναλύονται με λεπτομέρειες αλλά ο σπουδαστής παραπέμπεται στα αντίστοιχα κεφάλαια της βιβλιογραφίας για περισσότερες λεπτομέρειες και εμβάθυνση.

Σκοπός των σημειώσεων σε συνδυασμό με το εργαστήριο του μαθήματος είναι να μπορεί ο φοιτητής στο τέλος της διδασκαλίας να αντιμετωπίσει ένα κλασσικό πρόβλημα σχεδίασης ελέγχου.

Κεφάλαιο 1^ο

- ❖ Ορισμός Συστημάτων Αυτόματου Ελέγχου
- ❖ Βασικά Εξαρτήματα των Συστημάτων Ελέγχου
- ❖ Παραδείγματα Συστημάτων Αυτόματου Ελέγχου
- ❖ Κατηγορίες Συστημάτων Αυτόματου Ελέγχου
- ❖ Κίνητρα για τη χρήση ανατροφοδότησης
- ❖ Μετασχηματισμός Laplace
- ❖ Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace
- ❖ Μιγαδικοί αριθμοί
- ❖ Βασικές συναρτήσεις διέγερσης Συστημάτων

Κεφάλαιο 1

1.1 Ορισμός Συστήματος Αυτόματου Ελέγχου	4
1.2 Βασικά εξαρτήματα των Συστημάτων Ελέγχου	4
1.3 Παραδείγματα Συστημάτων Αυτόματου Ελέγχου	6
1.4 Κατηγορίες Συστημάτων Αυτόματου Ελέγχου	6
<i>1.4.1 Ανάλογα με τη φύση του μέσου ελέγχου</i>	<i>7</i>
<i>1.4.2 Ανάλογα με το εάν χρησιμοποιείται ή όχι ανατροφοδότηση</i>	<i>9</i>
<i>1.4.3 Ανάλογα με την τεχνική επεξεργασία των σημάτων έλεγχου</i>	<i>10</i>
<i>1.4.4 Ανάλογα με των τύπο των εξαρτημάτων</i>	<i>11</i>
<i>1.4.5 Ανάλογα με την εφαρμογή τους</i>	<i>11</i>
1.5 Κίνητρα για την χρήση ανατροφοδότησης	12
1.6 Μετασχηματισμός Laplace	12
1.7 Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace	13
1.8 Μιγαδικοί Αριθμοί	13
1.9 Βασικές Συναρτήσεις Διέγερσης Συστημάτων	13

1.1 Ορισμός Συστήματος Αυτόματου Ελέγχου(Σ.Α.Ε)

Σύστημα αυτομάτου ελέγχου ονομάζεται ένα σύνολο (τεχνητό ή φυσικό) στοιχείων και εξαρτημάτων, κατάλληλα συνδεδεμένα μεταξύ τους, που μπορεί να ελέγχει μια διεργασία ή ορισμένα μεταβλητά μεγέθη όπως:

- ❖ θέση (x, y, z)
- ❖ ταχύτητα
- ❖ πίεση
- ❖ ηλεκτρική τάση
- ❖ θερμοκρασία κ.λ.π.

1.2 Βασικά εξαρτήματα των Συστημάτων Ελέγχου(Σ.Α.Ε.)

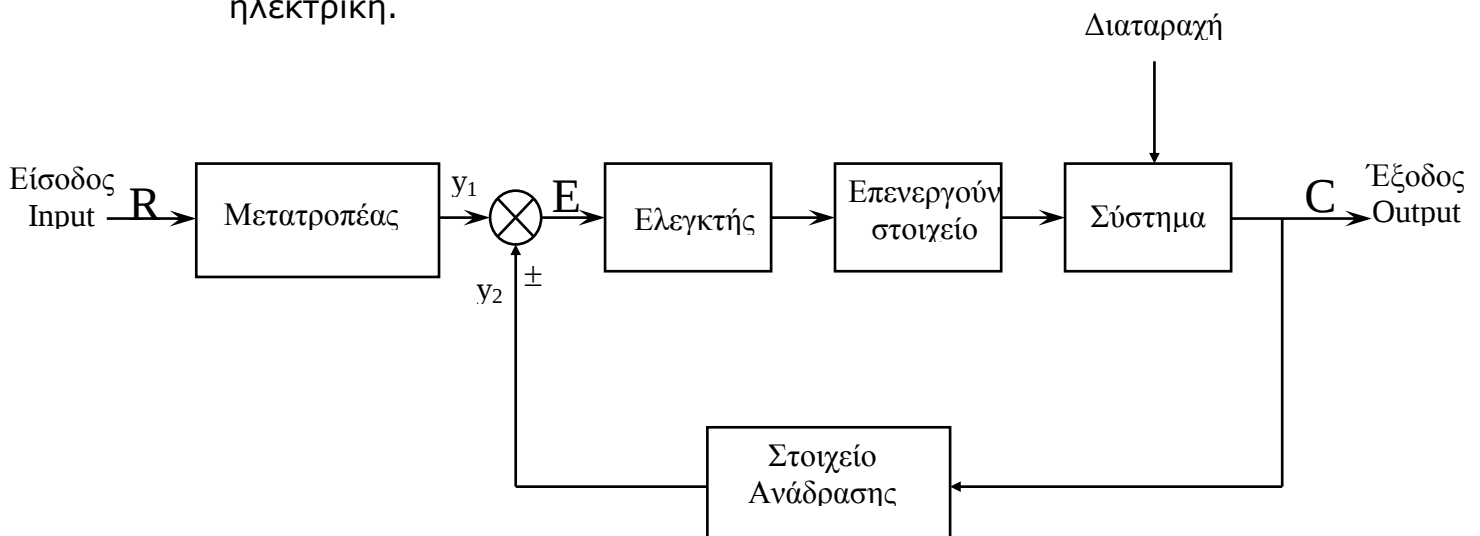
Τα βασικά εξαρτήματα των Συστημάτων Αυτόματου Ελέγχου είναι:

❖ **Είσοδος (input)**

Μια διέγερση που εφαρμόζεται στο σύστημα από εξωτερική πηγή.

❖ **Μετατροπέας (transducer)**

Μετατρέπει μια μορφή ενέργειας σε μια άλλη π.χ. μηχανική σε ηλεκτρική.



Σχήμα 1.1 Βασική δομή ενός συστήματος ελέγχου κλειστού βρόγχου

❖ **Αθροιστής**

Είναι συσκευή που αθροίζει αλγεβρικά τα εισερχόμενα σήματα για να παράγει ένα σήμα εξόδου. Συνήθως αναφέρεται και σαν συγκριτής ή ανιχνευτής σφάλματος.

❖ **Ελεγκτής (Controller)**

Σε όλα σχεδόν τα συστήματα ελέγχου η είσοδος του ελεγκτή είναι το σφάλμα που παράγεται από τον **αθροιστή** στα συστήματα ελέγχου κλειστού βρόγχου ή την ίδια την **είσοδο** στα συστήματα ελέγχου ανοικτού βρόγχου. Είναι μηχανισμός ελέγχου που παράγει μια έξοδο που οδηγεί την ελεγχόμενη διεργασία με σκοπό τον μηδενισμό του σφάλματος και γενικά την βελτιστοποίηση των χαρακτηριστικών του συστήματος.

❖ **Ελεγχόμενη διεργασία**

Κάθε φυσική ποσότητα όπως θερμοκρασία, πίεση, ή στάθμη υγρού μπορεί να ελεγχθεί μέσω διεργασίας που περιλαμβάνει κάθε τι που επηρεάζει τις φυσικές μεταβλητές. Μ' άλλα λόγια, η ελεγχόμενη διεργασία περιλαμβάνει κάθε τι που απαιτείται για τον έλεγχο της φυσικής ποσότητας.

❖ **Ελεγχόμενη μεταβλητή[c(t)]**

Η ελεγχόμενη μεταβλητή είναι μία φυσική ποσότητα όπως θερμοκρασία, πίεση κ.λ.π. που πρέπει να ελεγχθεί από το σύστημα. Συνήθως αναφέρεται σαν **έξοδος**. Το σύστημα διεγειρόμενο από την είσοδο παράγει ένα **σήμα εξόδου** σαν απόκριση.

❖ **Επενεργούν στοιχείο (Actuator)**

Το Επενεργούν Στοιχείο είναι η συσκευή που αποδίδει την απαιτούμενη ενέργεια (π.χ. κινητική) στην διεργασία (π.χ. η συσκευή που αναγκάζει την διεργασία να εξασφαλίσει την έξοδο).

❖ **Σύστημα (plant)**

- Σύστημα τύπου **follow-up**: Τα συστήματα των οποίων η έξοδος θα πρέπει να μεταβάλλεται σε συνάρτηση των μεταβολών του σήματος εισόδου (π.χ. σύστημα ελέγχου θερμοκρασίας χώρου).
- Σύστημα τύπου **regulator**: Τα συστήματα των οποίων η έξοδος θα πρέπει να παραμένει σταθερή ακόμα και όταν υπάρχουν μεταβολές του σήματος εισόδου (π.χ. σταθεροποιητής τάσεως DC).

❖ **Διαταραχή (disturbance)**

Διαταραχή είναι κάθε μη επιθυμητό σήμα που επηρεάζει την **έξοδο**.

❖ **Ανάδραση (feedback)**

Ένα σύστημα χρησιμοποιεί ανάδραση εάν η **έξοδος** ή μέρος της **εξόδου** επιστρέφει μέσω του κλάδου ανατροφοδότησης (ανάδρασης) στον αθροιστή, έτσι που να μπορεί να συγκριθεί με

την **είσοδο**. Η χρήση της ανάδρασης συνήθως επιφέρει ευστάθεια και ακρίβεια στο σύστημα. Ένα σύστημα μπορεί να χρησιμοποιεί πολλές **αναδράσεις**. Πάντως πρωτεύουσα ανάδραση είναι εκείνη όπου το σήμα εξόδου επιστρέφει και συγκρίνεται με την **είσοδο**. Αν δεν υπάρχει καμία επικοινωνία μεταξύ εισόδου και εξόδου έχουμε **σύστημα ανοιχτού βρόγχου**, ενώ αν κάθε φορά παίρνουμε την έξοδο την ελέγχουμε και την οδηγούμε σε μια είσοδο αναφοράς έχουμε **σύστημα κλειστού βρόγχου**. Ο κλάδος (δρόμος) που οδηγεί την έξοδο στην είσοδο λέγεται κλάδος **ανάδρασης**. Αν το σήμα εξόδου προστίθεται στην είσοδο έχουμε **θετική ανάδραση** και αν αφαιρείται **αρνητική ανάδραση**.

❖ **Κύκλωμα αντιστάθμισης**

Κύκλωμα που χρησιμοποιείται για να τροποποιήσει την συνάρτηση μεταφοράς και κατ' επέκταση την έξοδο του συστήματος έτσι που να είναι η επιθυμητή. Τα πλέον συνηθισμένα είναι: **προπορείας, υστέρησης, προπορείας - υστέρησης** κ.λ.π.

❖ **Σφάλμα** κλειστού Σ.Α.Ε. είναι η διαφορά της εισόδου και της εξόδου.

❖ **Απ' ευθείας δρόμος** (forward path) είναι ο δρόμος από το σημείο άθροισης μέχρι την έξοδο .

1.3 Παραδείγματα Συστημάτων Αυτόματου Ελέγχου(Σ.Α.Ε.)

Μερικά παραδείγματα Συστημάτων Αυτόματου Ελέγχου είναι:

- ❖ Αυτόματος πιλότος αεροσκαφών
- ❖ Έλεγχος θέσης ανάγνωσης κεφαλής σκληρού δίσκου
- ❖ Σύστημα Ελέγχου Ρομποτικού βραχίονα
- ❖ Αυτόματο Σύστημα Ελέγχου ταχύτητας οχημάτων (cruise control system)

1.4 Κατηγορίες Συστημάτων Αυτόματου Ελέγχου(Σ.Α.Ε.)

Τα Σ.Α.Ε. μπορούμε να τα κατατάξουμε σε κατηγορίες ως εξής:

- ❖ Ανάλογα με τη φύση του μέσου ελέγχου
- ❖ Ανάλογα με το αν χρησιμοποιείται ή όχι ανάδραση (ανατροφοδότηση)
- ❖ Ανάλογα με την τεχνική επεξεργασία των σημάτων ελέγχου.
- ❖ Ανάλογα με τον τύπο των εξαρτημάτων
- ❖ Ανάλογα με την εφαρμογή τους

1.4.1 Ανάλογα με τη φύση του μέσου ελέγχου

❖ Ηλεκτρικά – ηλεκτρονικά συστήματα

Το μέσο ελέγχου είναι ένα ηλεκτρικό σήμα, που μπορεί να ενισχυθεί κατάλληλα με ηλεκτρικούς ενισχυτές και να διεγείρει κάποιον ηλεκτρικό κινητήρα, που με την σειρά του θα κάνει ανάλογη διόρθωση στον μηχανισμό με τον οποίο είναι συνδεδεμένος.

Πλεονεκτήματα

1. Έχουν μεγάλο βαθμό απόδοσης.
2. Δεν χρειάζονται αεροσυμπιεστές, αντλίες.
3. Είναι καθαρά συστήματα και τυχόν διαρροές δεν προκαλούν βλάβες σε διπλανές συσκευές.

Μειονεκτήματα

1. Μικρή συγκέντρωση ισχύος (δηλαδή $\frac{\text{ωφέλιμος ισχύς}}{\text{βάρος εγκατάστασης}}$ λόγος μικρός)
2. Προκαλούν σπινθήρες και δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε εύφλεκτο περιβάλλον.
3. Η συντήρησή τους είναι πολύπλοκη.
4. Συνοδεύονται με ακριβές ηλεκτρονικές μονάδες.

❖ Πνευματικά συστήματα

Το μέσο ελέγχου είναι αέρας με πίεση που προέρχεται από κάποιο συμπιεστή (compressor) και διεγείρει κάποια βαλβίδα που μέσω κυλίνδρου με έμβολο κάνει την αναγκαία διόρθωση.

Πλεονεκτήματα

1. Είναι πολύ απλά στην κατασκευή και τη λειτουργία τους.
2. Χρησιμοποιούν αέρα που είναι ελεύθερος στην φύση και δεν εγκυμονεί κινδύνους πυρκαγιάς. (Η τυχόν διαρροή αέρα δεν προκαλεί βλάβες σε διπλανά συστήματα).
3. Οι μεταβολές της θερμοκρασίας του περιβάλλοντος δεν έχουν επίδραση στο ιξώδες του μέσου λειτουργίας.
4. Η συντήρησή τους είναι εύκολη και γίνεται σε αραιά χρονικά διαστήματα.
5. Αποθηκεύεται ποσότητα αέρα στις αεροφιάλες και έτσι λειτουργούν για λίγο, και μετά την διακοπή του αεροσυμπιεστή.

Μειονεκτήματα

1. Είναι αναγκαία η ύπαρξη τουλάχιστον δύο αεροσυμπιεστών, πολλών αεροφιαλών και κατάλληλου δικτύου σωλήνων.
2. Παρουσιάζουν δυσκολία στην λίπανση των κινούμενων μερών.

3. Λόγω της συμπιεστικότητας του αέρα δεν έχουμε ταχεία ανάπτυξη δύναμης στην έξοδο του συστήματος ούτε ακρίβεια εξόδου.

❖ **Υδραυλικά συστήματα**

Το μέσο ελέγχου είναι συνήθως λάδι που έρχεται από κάποια αντλία, ελέγχεται από βαλβίδα και κινεί υδραυλικό κινητήρα ή έμβολο κυλίνδρου.

Πλεονεκτήματα

1. Υψηλή απόδοση ακόμα και σε μεγάλη ισχύ και ταχύτητα.
2. Μπορούμε να επιτύχουμε μεγάλη ισχύ εξόδου.
3. Το λάδι είναι ασυμπίεστο και έχουμε ταχύτητα απόκρισης.
4. Αυτολίπανση με το κυκλοφορούν λάδι.
5. Σε περίπτωση ανωμαλίας ο επενεργητής (υδραυλικός κινητήρας ή κύλινδρος με έμβολο) παραμένει στην θέση του, γιατί υπάρχουν ειδικές ανεπίστροφες βαλβίδες στις γραμμές παροχής και επιστροφής.

Μειονεκτήματα

1. Συχνή συντήρηση των δικτύων υψηλής πίεσης για να μην υπάρχουν διαρροές.
2. Η τυχόν διαρροή λαδιού εγκυμονεί κινδύνους βλάβης των διπλανών συσκευών.
3. Με την αύξηση της θερμοκρασίας μεταβάλλεται το ιξώδες του λαδιού και φυσικά η απόδοση του συστήματος.
4. Η ύπαρξη λαδιού δημιουργεί ένα επιπλέον κόστος στην συντήρηση.
5. Αν στο υδραυλικό δίκτυο υπάρχει θυλάκιο αέρα δεν έχουμε ακρίβεια στην έξοδο (φαινόμενο αερισμού).

❖ **Ηλεκτροϋδραυλικά συστήματα**

Η βασική διαφορά τους με τα προηγούμενα είναι ότι η ρυθμιστική βαλβίδα δεν είναι μηχανική αλλά ηλεκτρική δηλαδή λειτουργεί ανάλογα με κάποιο ηλεκτρικό σήμα που θα της στείλουμε από μακριά και καθορίζει έτσι το μέγεθος και τη φορά της ροής λαδιού προς τον υδραυλικό κινητήρα (ή έμβολο).

❖ **Ηλεκτροπνευματικά συστήματα**

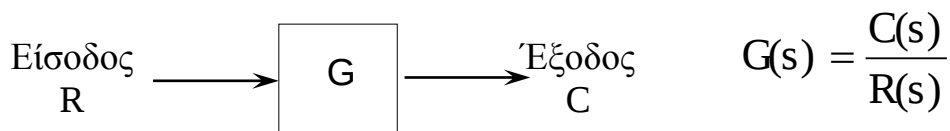
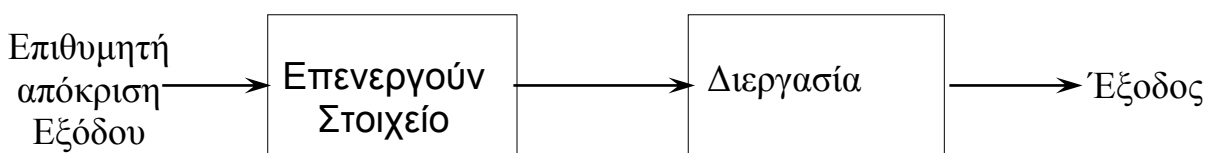
Η βασική διαφορά τους με τα πνευματικά συστήματα είναι στο ότι διαθέτουν ηλεκτροπνευματική βαλβίδα που μπορεί να ρυθμιστεί από μακριά με κάποιο ηλεκτρικό σήμα.

1.4.2 Ανάλογα με το εάν χρησιμοποιείται ή όχι ανατροφοδότηση

❖ **Συστήματα ανοιχτού βρόγχου**

Ένα σύστημα ανοιχτού βρόγχου χρησιμοποιεί μία ενεργό συσκευή (που παράγει το σήμα εισόδου) για να ελέγξει απευθείας την διεργασία χωρίς την χρήση ανατροφοδότησης.

1. Είναι πολύ απλής κατασκευής.
2. Η ακρίβεια εξαρτάται από τη ρύθμιση διαφόρων στοιχείων.
3. Δεν παρουσιάζουν συνήθως προβλήματα αστάθειας.

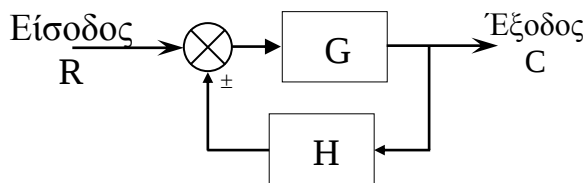
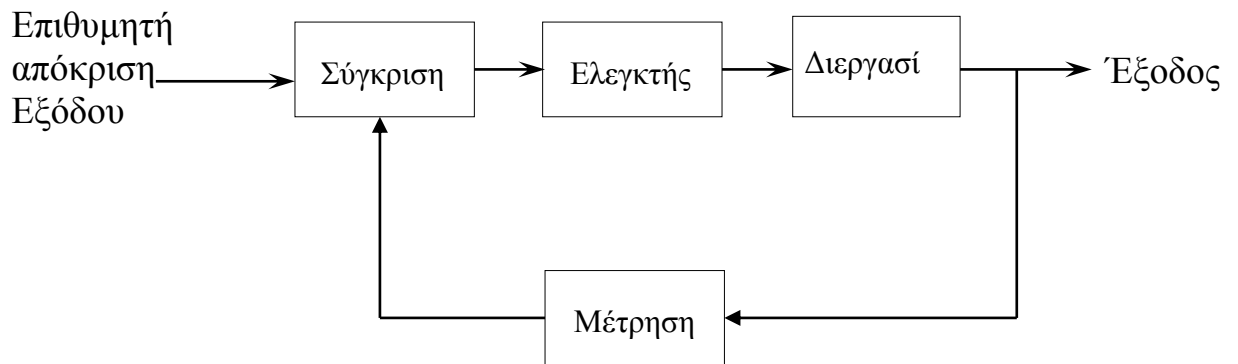


Σχήμα 1.2 Δομικό διάγραμμα συστήματος ελέγχου ανοιχτού βρόγχου

❖ **Συστήματα Ελέγχου Κλειστού Βρόγχου**

Ένα σύστημα κλειστού βρόγχου χρησιμοποιεί τη μέτρηση του σήματος εξόδου και την ανατροφοδοτεί για να συγκριθεί με το σήμα αναφοράς (είσοδος – επιθυμητή έξοδος).

1. Μεγάλη ακρίβεια.
2. Πολυπλοκότερα συστήματα.
3. Παρουσιάζουν προβλήματα αστάθειας.
4. Έχουν εύρος λειτουργίας.



$$G_{ολ}(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 \mp G(s)H(s)}$$

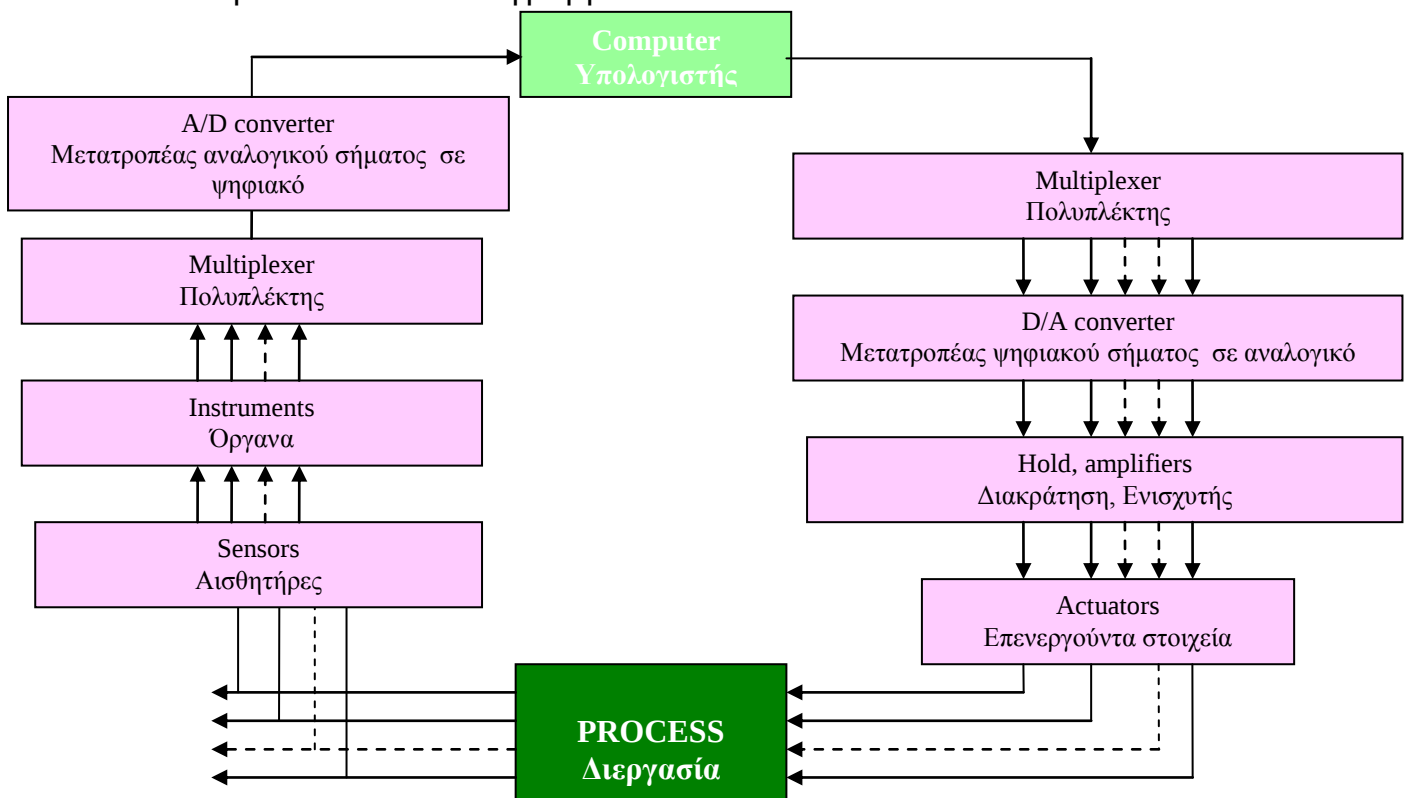
Σχήμα 1.3 Δομικό διάγραμμα συστήματος ελέγχου κλειστού βρόγχου

1.4.3 Ανάλογα με την τεχνική επεξεργασία των σημάτων έλεγχου

❖ **Αναλογικά**

❖ **Ψηφιακά**

Το ψηφιακό σύστημα ελέγχου περιλαμβάνει τα εξαρτήματα που φαίνονται στο διάγραμμα που ακολουθεί.



1.4.4 Ανάλογα με των τύπο των εξαρτημάτων

❖ Γραμμικά

Ένα σύστημα θεωρείται γραμμικό όταν ακολουθεί την αρχή της επαλληλίας.

Π.χ.

Αν όλες οι αρχικές συνθήκες ενός συστήματος είναι μηδενικές, δηλαδή αν το σύστημα είναι σε ηρεμία, τότε το σύστημα είναι γραμμικό αν έχει την ακόλουθη ιδιότητα: Αν

(α) μία είσοδος $u_1(t)$ παράγει μια έξοδο $y_1(t)$, και

(β) μία είσοδος $u_2(t)$ παράγει μια έξοδο $y_2(t)$, τότε,

(γ) η είσοδος $c_1u_1(t) + c_2u_2(t)$ παράγει μια έξοδο $c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$, για οποιοδήποτε ζευγάρι εισόδων $u_1(t)$ και $u_2(t)$ και σταθερές c_1 και c_2 .

Τα γραμμικά συστήματα μπορούν συχνά να παρασταθούν με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και γραμμικές εξισώσεις διαφοράς.

❖ Μη γραμμικά

Όλα τα υπόλοιπα είναι μη γραμμικά

Π.χ.

Οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις $(dy/dt)^2 + y = 0$ και $d^2y/d^2t + \cos y = 0$ είναι μη – γραμμικές διότι ο όρος της πρώτης εξίσωσης είναι $(dy/dt)^2$ είναι δευτέρου βαθμού, και ο όρος $\cos y$ στην δεύτερη εξίσωση δεν είναι πρώτου βαθμού πράγμα που ισχύει για όλες τις υπερβατικές συναρτήσεις.

1.4.5 Ανάλογα με την εφαρμογή τους

❖ Σερβομηχανισμοί

Είναι εκείνα τα συστήματα ελέγχου των οποίων η έξοδος ή ελεγχόμενη μεταβλητή είναι μηχανική θέση ή ρυθμός μεταβολής της μηχανικής θέσης (ταχύτητα ή επιτάχυνση). Συστήματα ελέγχου ταχύτητας περιστροφής άξονα κινητήρα DC και ελέγχου θέσεως βηματικού κινητήρα είναι χαρακτηριστικά παραδείγματα σερβομηχανισμών.

❖ Αριθμητικά συστήματα ελέγχου

Είναι εκείνα τα συστήματα που ενεργούν επί αριθμητικών δεδομένων που είναι αποθηκευμένα σε κάποιο αποθηκευτικό μέσο ηλεκτρονικής ή άλλης φύσεως.

Τα CNC είναι χαρακτηριστικό παράδειγμα αριθμητικού συστήματος ελέγχου.

❖ Ακολουθιακά συστήματα Ελέγχου

Είναι τα συστήματα που η λειτουργία τους είναι προδιαγεγραμμένη και προσδιορισμένης χρονικής διάρκειας.

❖ **Συστήματα πολύπλοκων διεργασιών (Βιομηχανικά συστήματα)**

Παραδείγματα τέτοιων συστημάτων θα μπορούσαν να είναι: Μονάδες παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας, Μονάδες συναρμολόγησης οχημάτων, Μονάδες κλωστοϋφαντουργίας, Διυλιστήρια, Μονάδες βιολογικού καθαρισμού, κ.λ.π.

Διευκρίνιση: Θα πρέπει να τονιστεί ότι η κατάταξη ενός συστήματος σε μια από τις παραπάνω κατηγορίες δεν είναι πάντα δυνατή και αυτό διότι ένα σύστημα μπορεί να εμπεριέχει χαρακτηριστικά που θα επέτρεπαν την κατάταξή του σε περισσότερες από μια από τις παραπάνω κατηγορίες. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τη μελέτη των συστημάτων ανοικτού και κλειστού βρόγχου (όποιας φύσεως και αν είναι αυτά) που ίσως είναι και η κατηγορία που έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον διότι εμπεριέχει την έννοια της αυτοματοποίησης όπως αυτή εννοείται όταν δεν παρεμβαίνει ο άνθρωπος (συστήματα κλειστού βρόγχου).

1.5 Κίνητρα για την χρήση ανατροφοδότησης

Οι κυριότεροι λόγοι για την χρήση ανατροφοδότησης είναι οι παρακάτω:

- ❖ Μείωση της ευαισθησίας σε μεταβολές των παραμέτρων του συστήματος και των ατελειών του μοντέλου που χρησιμοποιήθηκε στον σχεδιασμό.
- ❖ Μείωση των επιδράσεων των εξωτερικών διαταραχών και του θορύβου των αισθητήρων.

Η ανατροφοδότηση μπορεί επίσης

- ❖ Να βελτιώσει τα χαρακτηριστικά της μεταβατικής απόκρισης.
- ❖ Να μειώσει το μόνιμο σφάλμα.

1.6 Μετασχηματισμός Laplace

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$$L[f(t)] = F(s)$$

$$L^{-1}[F(s)] = f(t)$$

Οι ιδιότητες του μετασχηματισμού LAPLACE παρουσιάζονται στο Παράρτημα 2. Επίσης στο Παράρτημα 2 παρουσιάζονται οι Μετασχηματισμοί Laplace των βασικών συναρτήσεων.

1.7 Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace, η περίπτωση διακεκριμένων πόλων αλλά και η περίπτωση πολλαπλών πόλων, παρουσιάζονται στο Παράρτημα 3.

1.8 Μιγαδικοί Αριθμοί

Μια θεωρητική προσέγγιση των μιγαδικών αριθμών καθώς και τις ιδιότητές τους μπορείτε να τις βρείτε στο Παράρτημα 1.

1.9 Βασικές Συναρτήσεις Διέγερσης Συστημάτων

Οι βασικές συναρτήσεις διέγερσης συστημάτων παρουσιάζονται στο Παράρτημα 5.

Κεφάλαιο 2

- ❖ Περιγραφή Συστημάτων
- ❖ Βασικά Χαρακτηριστικά
- ❖ Τύποι Συστημάτων και Σταθερές Σφαλμάτων
- ❖ Χρονική Απόκριση Συστημάτων 1^{ης} και 2^{ης} τάξης
- ❖ Ευστάθεια
- ❖ Γεωμετρικός Τόπος Ριζών
- ❖ Κριτήριο Routh

Κεφάλαιο 2

2.1 Περιγραφή Συστημάτων	16
2.2 Βασικά χαρακτηριστικά Σ.Α.Ε.	17
2.3 Τύποι Συστημάτων και Σταθερές Σφαλμάτων	18
2.4 Χρονική απόκριση Συστημάτων 1^{ης} & 2^{ης} τάξης	20
2.4.1 Εισαγωγικές έννοιες και ορισμοί	20
2.4.2 Συστήματα 1^{ης} τάξης	21
2.4.2.1 Απόκριση συστήματος 1^{ης} τάξης σε διέγερση μοναδιαίας βαθμίδας	21
2.4.2.2 Απόκριση συστήματος 1^{ης} τάξης σε διέγερση μοναδιαίας αναρρίχησης	22
2.4.2.3 Κρουστική απόκριση συστήματος 1^{ης} τάξης	23
2.4.3 Συστήματα 2^{ης} τάξης	23
2.4.3.1 Απόκριση μοναδιαίας βαθμίδας	24
2.4.3.2 Χαρακτηριστικά μεγέθη χρονικής απόκρισης ευσταθούς συστήματος που διεγείρεται με σήμα μοναδιαίας βαθμωτής συνάρτησης	26
2.4.3.3 Σχέση μεταξύ της θέσης των πόλων και των μηδενικών στο πεδίο-s και την αντίστοιχη απόκριση στο πεδίο του χρόνου	27
2.5 Ευστάθεια	30
2.6 Γεωμετρικός Τόπος Ριζών (Γ.Τ.Ρ.)	31
2.7 Κριτήριο Routh	31

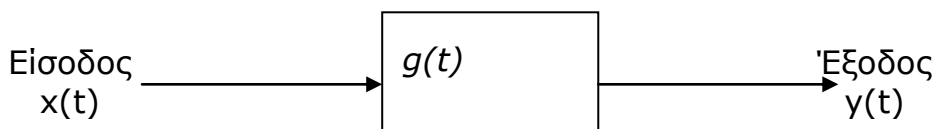
2.1 Περιγραφή Συστημάτων

Εκτός από το δομικό διάγραμμα που είναι μια εποπτική περιγραφή ενός συστήματος ελέγχου όπως και τα διαγράμματα ροής, ένα σύστημα ελέγχου θα πρέπει να περιγραφεί και με μια μαθηματική παράσταση που θα περιγράφει τη σχέση μεταξύ εισόδου και εξόδου του συστήματος. Έχουν μέχρι τώρα προταθεί διάφορα μαθηματικά μοντέλα για την περιγραφή συστημάτων. Τα επικρατέστερα από αυτά είναι:

1. Οι ολοκληρωδιαφορικές εξισώσεις.
2. Η συνάρτηση μεταφοράς.
3. Η κρουστική απόκριση.
4. Οι εξισώσεις κατάστασης.

Ο κύριος λόγος για τον οποίο προτείνεται η μελέτη και των τεσσάρων παραπάνω μαθηματικών μοντέλων είναι γιατί το κάθε ένα από τα μοντέλα αυτά παρουσιάζει πλεονεκτήματα αλλά και μειονεκτήματα έναντι των άλλων. Η γνώση, επομένως, και των τεσσάρων αυτών μοντέλων μας δίνει την ευελιξία να χρησιμοποιούμε το πιο κατάλληλο από αυτά για ένα ορισμένο σύστημα ή μία ορισμένη εφαρμογή.

Έστω ότι ένα γραμμικό μη χρονικά μεταβαλλόμενο σύστημα μιας εισόδου μιας εξόδου όπως αυτό του σχήματος 4 με είσοδο $x(t)$ και έξοδο $y(t)$ περιγράφεται από την παρακάτω διαφορική εξίσωση ($n \geq m$).



Σχήμα 2.1

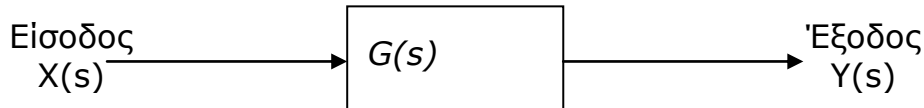
$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x(t)$$

Η **συνάρτηση μεταφοράς** του Σ.Α.Ε. που περιγράφεται από την παραπάνω διαφορική εξίσωση είναι ο πηλίκο της μετασχηματισμένης εξόδου δια την μετασχηματισμένη είσοδο με μηδενικές αρχικές συνθήκες. Χρησιμοποιώντας τον πίνακα 1.1 και 1.2 και κάνοντας τις πράξεις προκύπτει.

$$G(s) = \frac{\text{Μετασχηματισμένη} - \text{Έξοδος}}{\text{Μετασχηματισμένη} - \text{Είσοδος}}$$

ή

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$



Σχήμα 2.2

Ο υπολογισμός της συνάρτησης μεταφοράς συστήματος ελέγχου που δίνεται στη μορφή δομικού διαγράμματος (που συνήθως ονομάζεται και λειτουργικό διάγραμμα ή διάγραμμα βαθμίδων) γίνεται αφού προηγουμένως απλοποιήσουμε το διάγραμμα εφαρμόζοντας τους κανόνες του πίνακα 2.1 για να το φέρουμε στη μια από τις μορφές του σχήματος 1.2 και 1.3 .

Εάν στο διάγραμμα του σχήματος 1.3 η $H(s)=1$ τότε έχουμε σύστημα μοναδιαίας ανάδρασης. Στο συγκριτή μπορούμε να έχουμε θετική ή αρνητική ανάδραση. Με βάση τους κανόνες του πίνακα 2.1 προκύπτει ότι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος κλειστού βρόγχου με είσοδο $R(s)$ συνάρτηση κλάδου δράσης $G(s)$ συνάρτηση κλάδου ανάδρασης $H(s)$ και έξοδο $C(s)$ είναι:

$$G_{ολ}(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 \pm G(s)H(s)}$$

Ο συμβολισμός $G_{ολ}(s)$ αναφέρεται στη ολική συνάρτηση μεταφοράς συστήματος κλειστού βρόγχου.

Οι κανόνες απλοποίησης δομικών διαγραμμάτων παρουσιάζονται στο Παράρτημα 4.

2.2 Βασικά Χαρακτηριστικά Συστημάτων Ελέγχου (Σ.Α.Ε.)

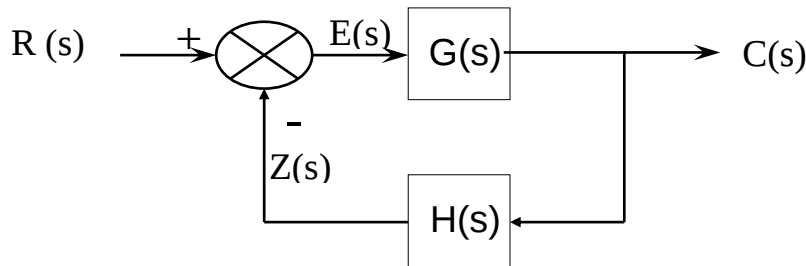
Τα βασικά χαρακτηριστικά που πρέπει να ικανοποιεί ένα σύστημα ελέγχου είναι:

- ❖ **Ευστάθεια:** Ένα σύστημα είναι ευσταθές, αν για φραγμένη είσοδο η έξοδος είναι φραγμένη.
- ❖ **Ακρίβεια:** Η απόκλιση μεταξύ επιθυμητής και της πραγματικής τιμής να είναι εάν είναι δυνατόν μηδενική.
- ❖ **Ταχύτητα απόκρισης:** Ένα σύστημα θα πρέπει να ανταποκρίνεται με ικανοποιητική ταχύτητα στις μεταβολές του σήματος εισόδου και να οδηγεί την έξοδο σε μια σταθερή τελική τιμή σε εύλογο χρονικό διάστημα.

- ❖ **Ευαισθησία:** Η ευαισθησία είναι η μέτρηση του πόσο εύκολα μεταβάλλεται η έξοδος ενός συστήματος σε μεταβολές των παραμέτρων του ίδιου του συστήματος όπως και σε πιθανές εξωτερικές διαταραχές.

2.3 Τύποι Συστημάτων και Σταθερές Σφαλμάτων

Το σύστημα ελέγχου κλειστού βρόγχου του σχήματος που ακολουθεί έχει συνάρτηση μεταφοράς: $G_{ολ}(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$



Η συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόγχου είναι :

$$G(s)H(s) = \frac{\prod_{i=1}^m |s + z_i|}{s^r \prod_{j=1}^n |s + p_j|}$$

όπου r , ο αριθμός των μηδενικών ριζών του πολυωνύμου του παρονομαστή της συνάρτησης.

Ένα σύστημα ονομάζεται **τύπου r** , αν έχει r πόλους στο σημείο $s=0$.

Ο **ορισμός του σφάλματος** δίνεται από τη σχέση:

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Το σφάλμα στη μόνιμη κατάσταση ορίζεται από τη σχέση:

$$e_{ss} = e_{\mu\omicron\nu} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

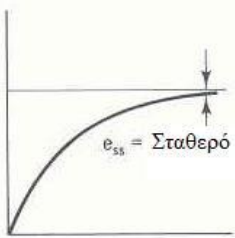
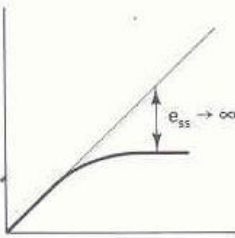
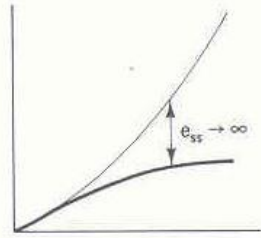
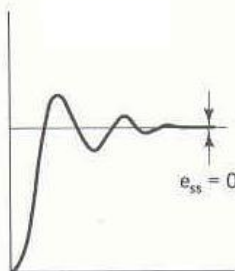
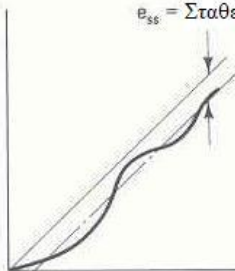
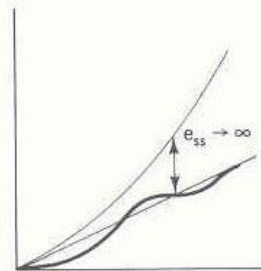
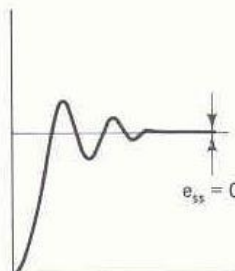
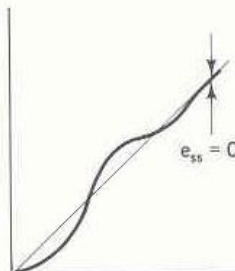
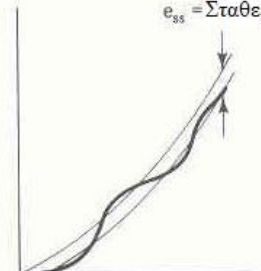
Ορίζουμε:

Σταθερά σφάλματος θέσης την τιμή: $K_P = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)$

Σταθερά σφάλματος ταχύτητας την τιμή: $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)$

Σταθερά σφάλματος επιτάχυνσης την τιμή: $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)$

Επιλέγοντας την είσοδο $R(s)$ του συστήματος και χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις, μπορούμε να καταστρώσουμε τον παρακάτω πίνακα, όπου φαίνεται το σφάλμα ανάλογα με την είσοδο και τον τύπο του συστήματος.

ΤΥΠΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ	ΕΙΣΟΔΟΣ		
	Step	Ramp	Parabolic
0			
1			
2			

Σχήμα 2.3 Γραφική αναπαράσταση μονίμου σφάλματος συστήματος ελέγχου, για συγκεκριμένες συναρτήσεις εισόδου και τύπους συστημάτων.

Οι τιμές των σφαλμάτων για τις περιπτώσεις της κύριας διαγωνίου της παραπάνω γραφικής απεικόνισης που δίνεται σε μορφή πίνακα 3Χ3 είναι οι εξής:

1. Είσοδος $R(s) = \frac{P}{s}$ και σύστημα τύπου 0

$$e_{ss} = e_{\mu\omicron\nu} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{P}{s}}{1 + G(s)H(s)} = \frac{P}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)} = \frac{P}{1 + K_p}$$

2. Είσοδος $R(s) = \frac{V}{s^2}$ και σύστημα τύπου 1

$$e_{ss} = e_{\mu\sigma\nu} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{V}{s^2}}{1 + G(s)H(s)} = \frac{V}{\lim_{s \rightarrow 0} (s + sG(s)H(s))} = \frac{V}{K_v}$$

3. Είσοδος $R(s) = \frac{A}{s^3}$ και σύστημα τύπου 2

$$e_{ss} = e_{\mu\sigma\nu} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{A}{s^3}}{1 + G(s)H(s)} = \frac{A}{\lim_{s \rightarrow 0} (s^2 + s^2G(s)H(s))} = \frac{A}{K_a}$$

2.4 Χρονική απόκριση Συστημάτων 1ης & 2ης τάξης

2.4.1 Εισαγωγικές έννοιες και ορισμοί

Με τον όρο χρονική απόκριση ενός συστήματος, εννοούμε τη συμπεριφορά του συστήματος συναρτήσει του χρόνου όταν διεγείρεται από μία συγκεκριμένη είσοδο. Η χρονική απόκριση ενός συστήματος ελέγχου αποτελείται από δύο μέρη:

α) Τη μεταβατική απόκριση (**transient response**) και

β) Την απόκριση μόνιμης κατάστασης (**steady state response**).

Αν $C(t)$ ονομάσουμε την απόκριση του συστήματος (έξοδος), τότε έχουμε: $c(t) = c_t(t) + c_{ss}(t)$

όπου:

$c_t(t)$ = απόκριση μεταβατικής κατάστασης.

$c_{ss}(t)$ = απόκριση μόνιμης κατάστασης.

Με τον όρο «**μεταβατική**», εννοούμε την απόκριση του συστήματος αμέσως μετά τη διέγερσή του και πριν την σταθεροποίησή της.

Με τον όρο «**μόνιμη κατάσταση**» εννοούμε το μέρος της απόκρισης που ακολουθεί τη μεταβατική απόκριση και ισχύει:

$$c_{ss}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} c(t)$$

Τα συνηθέστερα σήματα διέγερσης είναι: η συνάρτηση βαθμίδας (step function), η συνάρτηση αναρρίχησης (ramp function), η

κρουστική συνάρτηση (dirac function), η συνάρτηση παραβολής (parabola function), η ημιτονοειδής συνάρτηση (sinusoidal function)

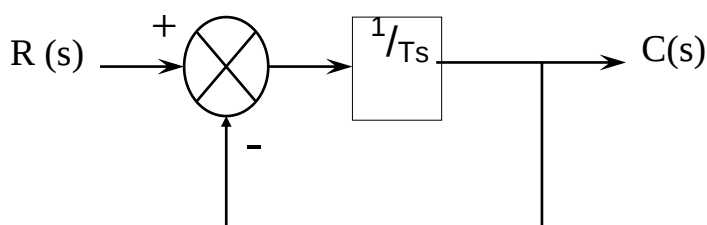
2.4.2 Συστήματα 1^{ης} τάξης

Ας θεωρήσουμε το δομικό διάγραμμα του συστήματος 1ης τάξης του σχήματος 2.4.

Η συνάρτηση μεταφοράς θα είναι της μορφής

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$

όπου T είναι η σταθερά χρόνου του συστήματος.



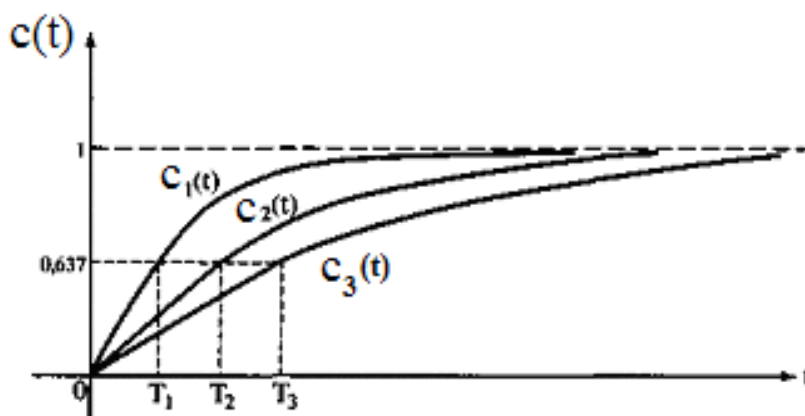
Σχήμα 2.4

2.4.2.1 Απόκριση συστήματος πρώτης τάξης σε διέγερση μοναδιαίας βαθμίδας

Η απόκριση του συστήματος για είσοδο της μορφής $r(t) = u(t)$ ή $R(s) = \frac{1}{s}$ θα είναι:

$$C(t) = L^{-1}\{C(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s}\right\} = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$$

Στο σχήμα 2.5 απεικονίζεται η καμπύλη της απόκρισης $c(t)$, για σταθερές χρόνου $T_1 < T_2 < T_3$.



Σχήμα 2.5

Ο χρόνος που χρειάζεται ώστε να φθάσει η $C(t)$ το 63,78% της τελικής της τιμής, ονομάζεται περίοδος T και προκύπτει αν στη σχέση $C(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$ θέσουμε $t = T$: $C(t) = 1 - e^{-1} = 0.6378$

2.4.2.2 Απόκριση συστήματος πρώτης τάξης σε διέγερση μοναδιαίας αναρρίχησης

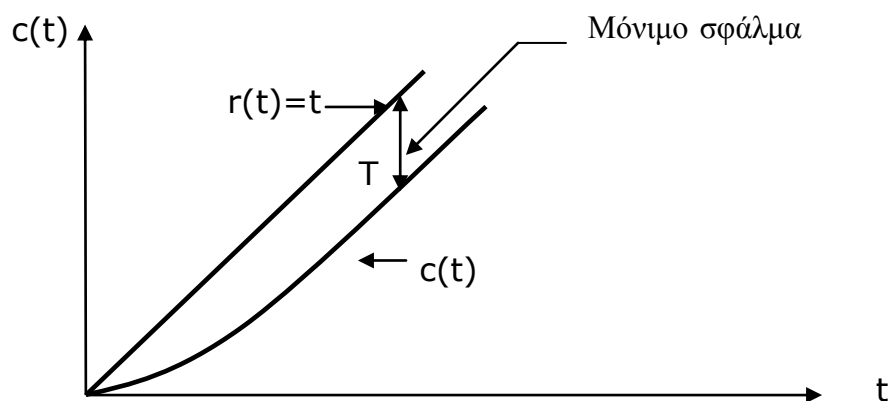
Η απόκριση του συστήματος για είσοδο της μορφής $r(t) = t$ ή $R(s) = \frac{1}{s^2}$ θα είναι:

$$C(t) = L^{-1}\{C(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{Ts+1} \bullet \frac{1}{s^2}\right\} = t - T + Te^{-\frac{t}{T}}, t \geq 0$$

Η αντίστοιχη γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα 2.6.

Το σήμα σφάλματος $e(t)$ είναι: $e(t) = r(t) - c(t) = T(1 - e^{-t/T})$, $t > 0$

Το σφάλμα μόνιμης κατάστασης ισούται με $e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = T$



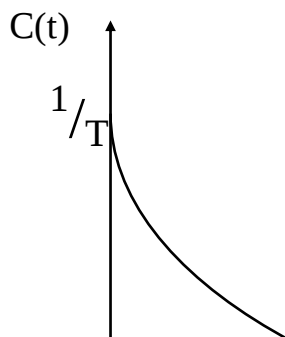
Σχήμα 2.6

2.4.2.3 Κρουστική απόκριση συστήματος πρώτης τάξης

Η απόκριση του συστήματος για είσοδο της μορφής $r(t) = \delta(t)$ θα είναι:

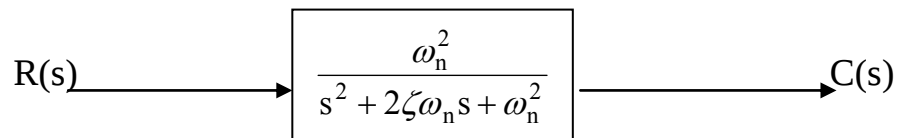
$$C(t) = L^{-1}\{C(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{Ts+1} \bullet 1\right\} = \frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}$$

Η καμπύλη κρουστικής απόκρισης απεικονίζεται στο σχήμα 2.7.



2.4.3 Συστήματα δεύτερης τάξης

Ας θεωρήσουμε το δομικό διάγραμμα του συστήματος 2ης τάξης του σχήματος 2.7



Σχήμα 2.7

Η συνάρτηση μεταφοράς είναι της μορφής:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος είναι:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

Οι πόλοι της $G(s)$ είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης δηλαδή:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad \text{ή}$$

$$\text{Υπό-απόσβεση} \quad 0 < \zeta < 1 \quad s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\beta$$

$$\text{Χωρίς απόσβεση} \quad \zeta = 0 \quad s_{1,2} = \pm j\omega_n$$

$$\text{Κρίσιμη απόσβεση} \quad \zeta = 1 \quad s_{1,2} = -\omega_n$$

$$\text{Υπέρ-απόσβεση} \quad \zeta > 1 \quad s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\alpha$$

$$\text{όπου} \quad \beta = \sqrt{1 - \zeta^2} \quad \text{και} \quad \alpha = \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Ο συντελεστής ζ ονομάζεται **συντελεστής απόσβεσης** του συστήματος (damping ratio) και το ω_n **κυκλική ιδιοσυχνότητα** (natural frequency) **χωρίς απόσβεση**.

2.4.3.1 Απόκριση μοναδιαίας βαθμίδας

❖ Υπό-απόσβεση ($0 < \zeta < 1$)

Στην περίπτωση όπου $0 < \zeta < 1$ η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δυο ρίζες συζυγείς μιγαδικές.

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\beta$$

Η χρονική απόκριση είναι της μορφής:

$$c(t) = L^{-1}\{C(s)\} = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\beta} \sin(\omega_d t + \varphi)$$

όπου:

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{\beta}{\zeta} \quad \text{ή} \quad \varphi = \cos^{-1} \zeta \quad \text{και} \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = \omega_n \beta$$

Ο συντελεστής ω_d ονομάζεται **κυκλική ιδιοσυχνότητα** του συστήματος **με απόσβεση**. (damped natural frequency).

❖ Κρίσιμη απόσβεση ($\zeta = 1$)

Στην περίπτωση που $\zeta=1$ η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές ίδιες με τιμή:

$$s_1 = s_2 = -\omega_n$$

Η χρονική απόκριση είναι της μορφής:

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t)$$

❖ Υπέρ-απόσβεση ($\zeta > 1$)

Στην περίπτωση όπου $\zeta > 1$ η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές με τιμές:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Η χρονική απόκριση είναι της μορφής:

$$c(t) = 1 - e^{\zeta \omega_n t} \left[\cosh(\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \cdot t) + \sinh(\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \cdot t) \right]$$

❖ Μηδενική απόσβεση ($\zeta = 0$)

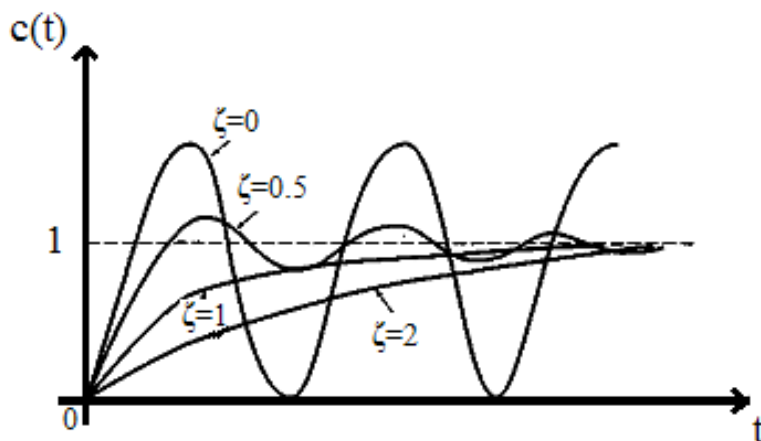
Στην περίπτωση όπου $\zeta = 0$ η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο ρίζες συζυγείς φανταστικές:

$$s_{1,2} = \pm j \omega_n$$

Η χρονική απόκριση είναι της μορφής:

$$c(t) = 1 - \cos \omega_n t$$

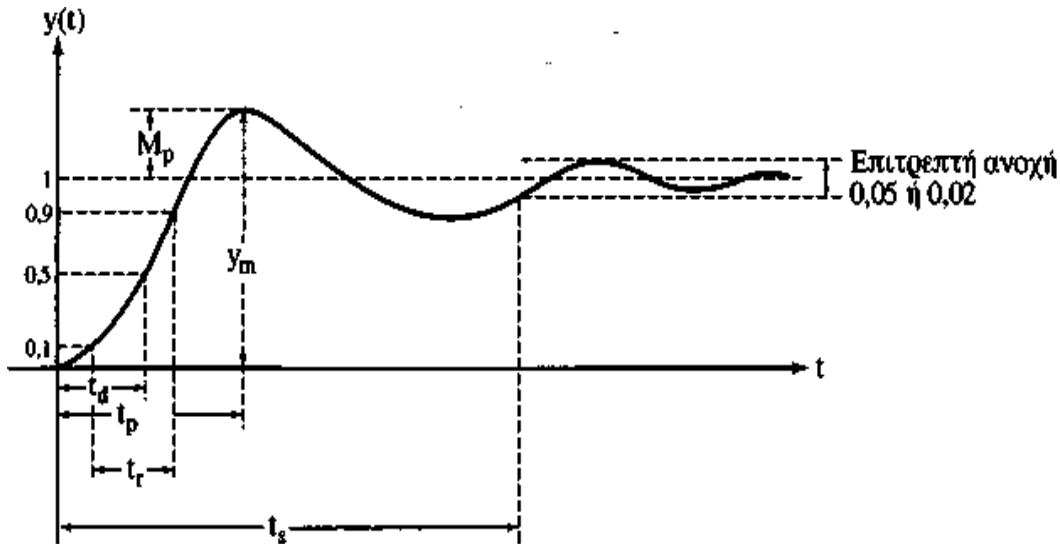
Στο σχήμα 2.8 σχεδιάζεται η απόκριση συστήματος δεύτερης τάξης με διέγερση τη μοναδιαία βηματική συνάρτηση και διάφορες τιμές του συντελεστή απόσβεσης ζ .



Σχήμα 2.8

2.4.3.2 Χαρακτηριστικά μεγέθη χρονικής απόκρισης ευσταθούς συστήματος που διεγείρεται με σήμα μοναδιαίας βαθμωτής συνάρτησης

Στα πρακτικά συστήματα ελέγχου η μεταβατική απόκριση εμφανίζει αποσβενόμενες ταλαντώσεις, προτού φθάσει στη μόνιμη κατάσταση (σχήμα 2.9).



Σχήμα 2.9

Στο σχήμα 2.9 παρατηρούμε ότι έχουν παρασταθεί οι ποσότητες t_d , t_r , t_p , t_s , y_m και M_p των οποίων οι ορισμοί και οι σχέσεις δίνονται παρακάτω:

- ❖ **Χρόνος καθυστέρησης t_d (delay time):** Ο χρόνος που χρειάζεται για να φθάσει η απόκριση, για πρώτη φορά, το 50% της τελικής της τιμής.
- ❖ **Χρόνος ανύψωσης t_r (rise time):** Ο χρόνος που χρειάζεται για να ανέλθει η απόκριση από το 10% στο 90% της τελικής της τιμής και δίνεται από τη σχέση:

$$t_r = \frac{1}{\omega_d} \tan^{-1} \left(\frac{\beta}{\zeta} \right)$$

- ❖ **Χρόνος κορυφής t_p (peak time):** Ο χρόνος που χρειάζεται για να φθάσει η απόκριση στην πρώτη κορυφή της καμπύλης και είναι:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

- ❖ **Χρόνος αποκατάστασης t_s (settling time):** Ο χρόνος που χρειάζεται για να φθάσει και να παραμείνει η καμπύλη απόκρισης ανάμεσα στο $\pm 2\%$ ή $\pm 5\%$ της τελικής τιμής.

Με κριτήριο ζώνης το 2% είναι: $t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$

Με κριτήριο ζώνης το 5% είναι: $t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n}$

❖ **Μέγιστη υπερύψωση M_p** (maximum percent overshoot):

Η διαφορά της μέγιστης τιμής c_m και της τελικής τιμής έστω c_f της $c(t)$. Το ποσοστό υπερύψωσης ορίζεται:

$$M_p = \frac{c_m - c_f}{c_f} \cdot 100\%$$

όπου:

$$c_f = \lim_{t \rightarrow \infty} c(t)$$

❖ **Μέγιστη τιμή της απόκρισης c_m** : Η τιμή της απόκρισης στην πρώτη κορυφή της καμπύλης. Είναι:

$$c_m = 1 + e^{-\frac{\zeta\pi}{\beta}}$$

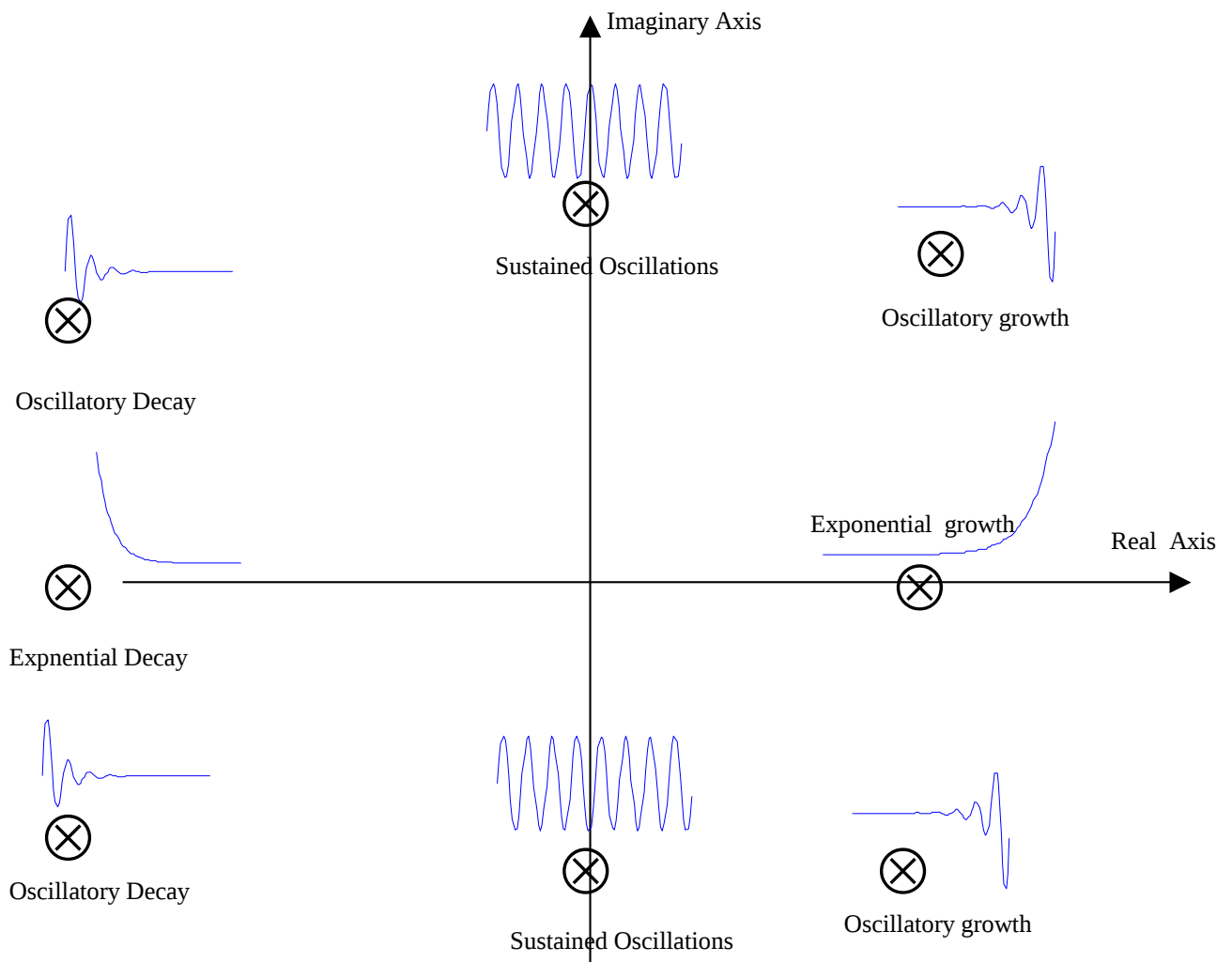
Από το συνδυασμό των σχέσεων $M_p = \frac{c_m - c_f}{c_f} \cdot 100\%$ και

$c_m = 1 + e^{-\frac{\zeta\pi}{\beta}}$ προκύπτει για το ποσοστό υπερύψωσης:

$$M_p = 100 \cdot e^{-\frac{\zeta\pi}{\beta}}$$

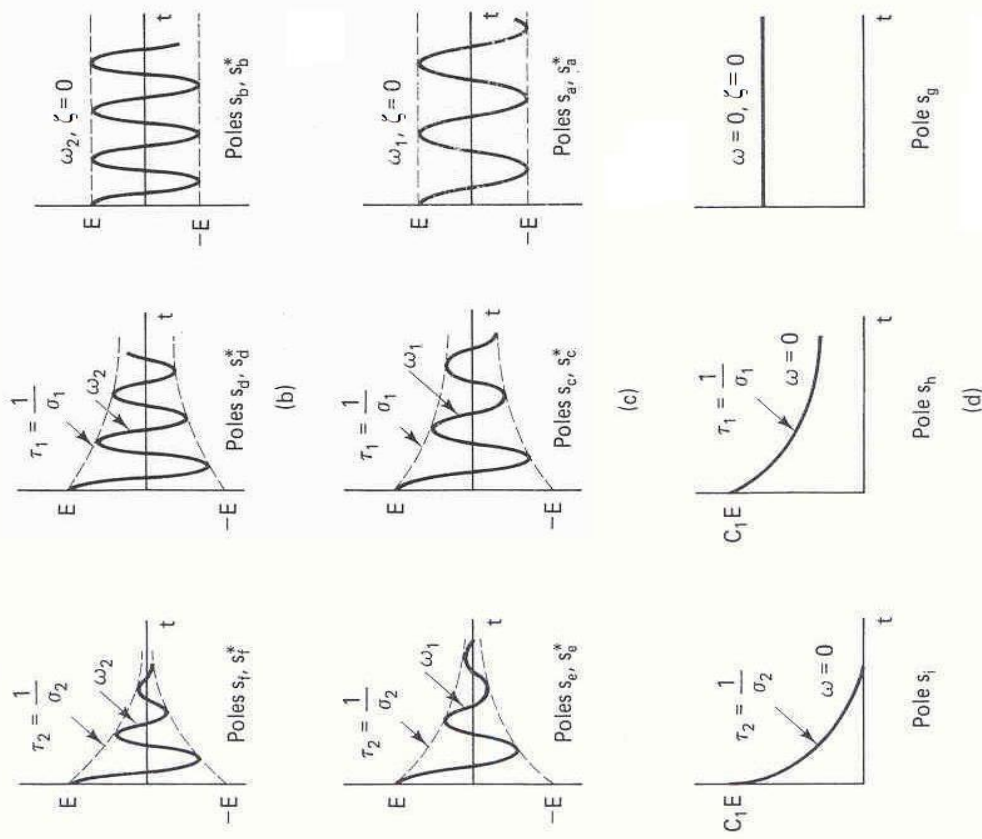
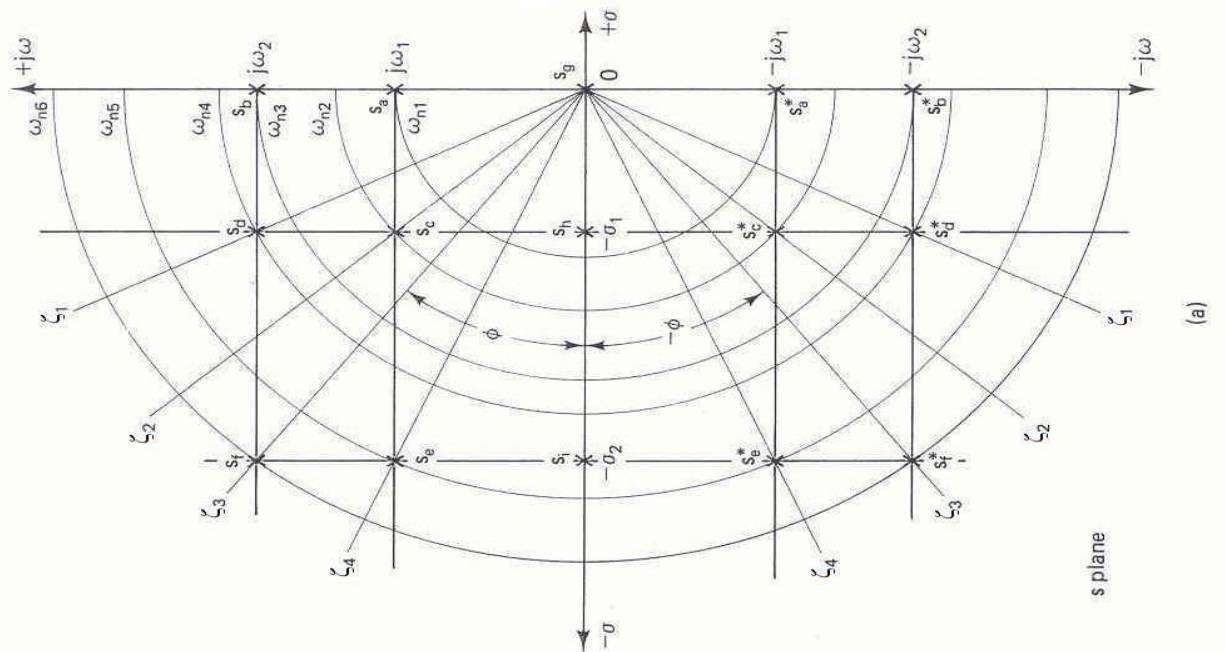
2.4.3.3 Σχέση μεταξύ της θέσης των πόλων και των μηδενικών στο πεδίο-s και την αντίστοιχη απόκριση στο πεδίο του χρόνου.

Στο σχήμα 2.10 μπορούμε να δούμε την απόκριση του συστήματος με πόλους στο δεξιό ημιεπίπεδο.



Σχήμα 2.10

Η θέση των πόλων στο μιγαδικό επίπεδο σχετίζεται άμεσα με τη χρονική απόκριση του συστήματος. Στο 2.11a φαίνεται η θέση των πόλων των μιγαδικό επίπεδο, στο 2.11b φαίνεται η χρονική απόκριση κατά μήκος του άξονα $j\omega_2$ του μιγαδικού επιπέδου, στο 2.11 c φαίνεται η χρονική απόκριση κατά μήκος του άξονα $j\omega_1$ και στο 2.11d φαίνεται η χρονική απόκριση του συστήματος του οποίου οι πόλοι βρίσκονται πάνω στον αρνητικό ημιάξονα.



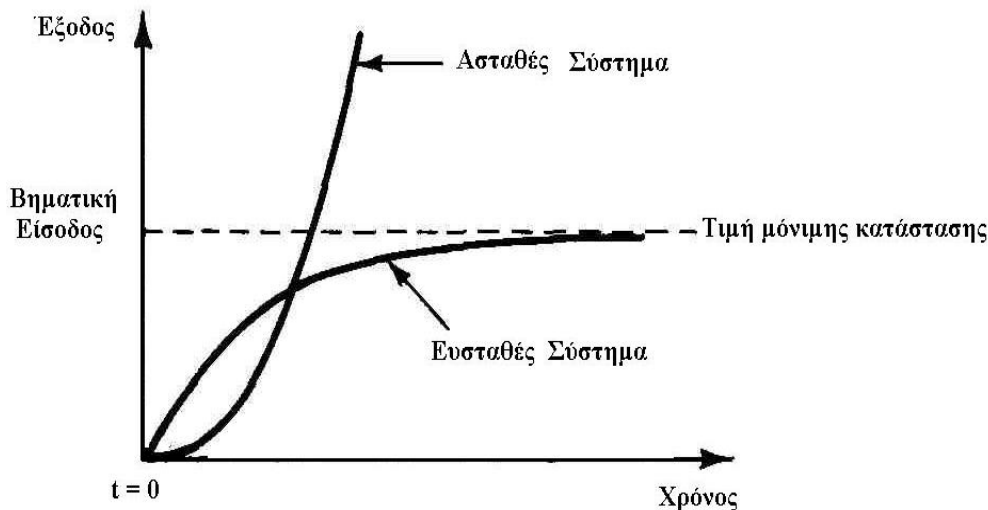
$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \zeta_1 \omega_{n1} = \zeta_1 \omega_{n4} \\ \sigma_2 &= \zeta_2 \omega_{n2} = \zeta_2 \omega_{n5} \\ \omega_1 &= \omega_{n1} \sqrt{1 - \zeta_1^2} = \omega_{n2} \sqrt{1 - \zeta_2^2} = \omega_{n3} \\ \omega_2 &= \omega_{n2} \sqrt{1 - \zeta_2^2} = \omega_{n3} \sqrt{1 - \zeta_3^2} = \omega_{n4} \sqrt{1 - \zeta_4^2} = \omega_{n5} \end{aligned}$$

Σχήμα 2.11

2.5 Ευστάθεια

Ένα από τα βασικά πρακτικά προβλήματα της επιστήμης των συστημάτων αυτομάτου ελέγχου είναι η σχεδίαση ενός συστήματος τέτοιου ώστε η έξοδος του να "ακολουθεί" την είσοδο του, όσο γίνεται πιο πιστά. Τα ασταθή συστήματα δεν μπορούν να μας εξασφαλίσουν μία τέτοια συμπεριφορά και επομένως δεν είναι χρήσιμα. Γι' αυτό, κατά τη σχεδίαση ενός συστήματος αυτομάτου ελέγχου, επιδιώκεται πρώτα και πάνω απ' όλα η εξασφάλιση της ευστάθειας του συστήματος. Μετά την εξασφάλιση της ευστάθειας επιδιώκεται η ικανοποίηση άλλων απαιτήσεων σχεδίασης, όπως η ταχύτητα και η ακρίβεια απόκρισης, το εύρος ζώνης, το σφάλμα στη μόνιμη κατάσταση, κ.λ.π.

Ένα σύστημα είναι ευσταθές, αν για φραγμένη είσοδο, η έξοδος του είναι φραγμένη. Η έξοδος ενός ευσταθούς συστήματος βρίσκεται μέσα σε επιτρεπτά όρια (σχήμα 2.12) ενώ η έξοδος ενός ασταθούς συστήματος αυξάνει θεωρητικά προς το άπειρο.



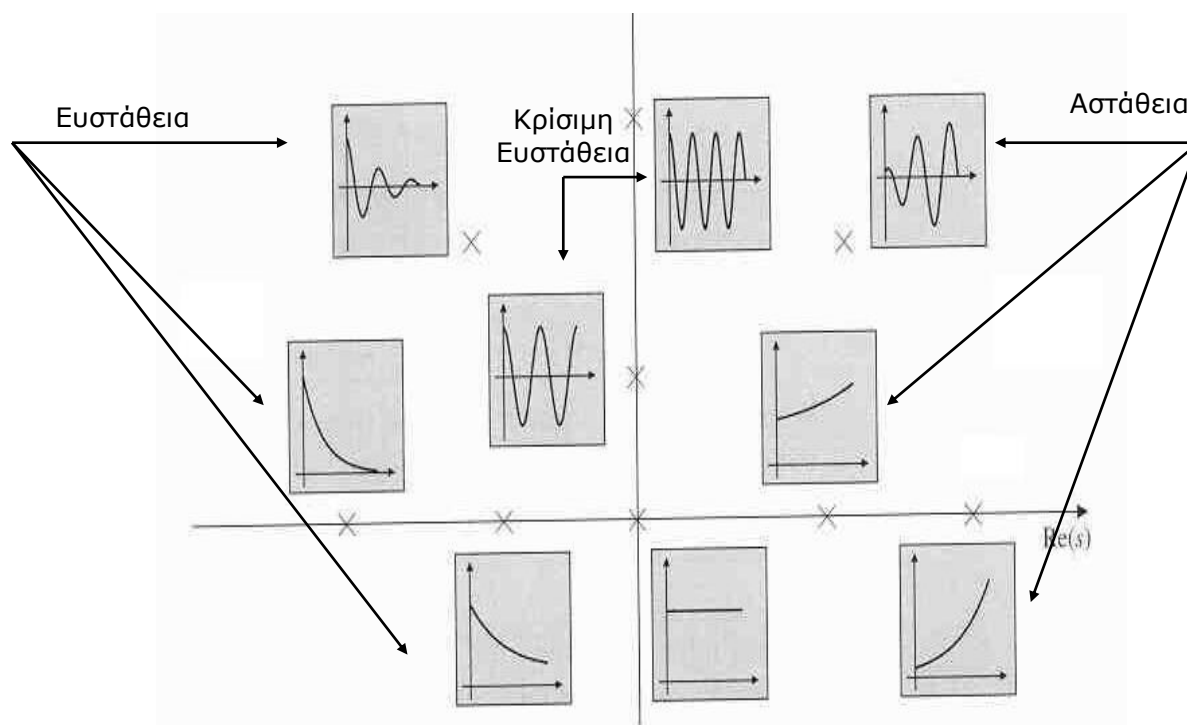
Σχήμα 2.12

Ευστάθεια είναι η ικανότητα του συστήματος να παρακολουθεί τις εντολές εισόδου.

Από θεωρητικής πλευράς, η έννοια της ευστάθειας έχει μελετηθεί σε βάθος και έχουν προταθεί διάφοροι ορισμοί και κριτήρια ευστάθειας. Π.χ. για την κατηγορία των γραμμικών μη χρονικά μεταβαλλόμενων συστημάτων, ισχύει το πολύ γνωστό γεγονός, ότι η ευστάθεια συνδέεται με τη θέση των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης στο μιγαδικό επίπεδο. Στην περίπτωση αυτή, ένα σύστημα είναι ευσταθές αν όλες οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Αν έστω και μια ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου βρίσκεται στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο, το σύστημα είναι ασταθές.

Τα ασταθή συστήματα δεν μας ενδιαφέρουν στην τεχνολογία των Σ.Α.Ε. , γιατί οδηγούν τον μηχανικό εξοπλισμό σε καταστροφή.

Τα περισσότερα συστήματα καθίστανται ευσταθή αν οι παράμετροι του συστήματος δηλαδή οι διάφορες σταθερές χρόνου και οι συντελεστές ενίσχυσης, λαμβάνουν κατάλληλες τιμές.



Σχήμα 2.13

Υπάρχουν κριτήρια ευστάθειας που μας βοηθούν να διαπιστώσουμε για ποιες τιμές των παραμέτρων έχουμε ευστάθεια. Τα γνωστότερα κριτήρια είναι: Routh, γεωμετρικού τόπου ριζών, Bode, Nyquist, κ.λ.π..

2.6 Γεωμετρικός Τόπος Ριζών (Γ.Τ.Ρ.)

Ο προσδιορισμός της έννοιας του γεωμετρικού τόπου ριζών και οι κανόνες προσεγγιστικής χάραξής του παρουσιάζονται στο Παράρτημα 12.

2.7 Κριτήριο Routh

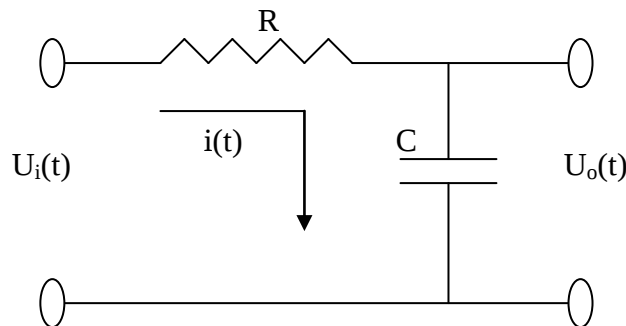
Η παρουσίαση του κριτηρίου ευστάθειας Routh και ένα παράδειγμα προσδιορισμού του γεωμετρικού τόπου ενός συστήματος αυτομάτου ελέγχου (κάνοντας χρήση του κριτηρίου Routh) δίνονται στο Παράρτημα 13.

Πείραμα 1^ο: Κυκλώματα RC και CR	102
1.1 Εύρεση Συνάρτησης Μεταφοράς Δικτυώματος RC(Απόκριση Συχνότητας)	102
.1.2 Υπολογισμός μέτρου και φάσης του παρακάτω κυκλώματος)	104
.1.3 Μέθοδος υπολογισμού με τα σχήματα Lissajous	107

1 Υπολογισμός Συνάρτησης Μεταφοράς

Πείραμα 1ο: Κυκλώματα RC και CR

1.1 Εύρεση Συνάρτησης Μεταφοράς Δικτυώματος RC(Απόκριση Συχνότητας)



Εφαρμόζοντας βασικούς κανόνες ανάλυσης κυκλωμάτων (π.χ. Kirchhoff κ.λ.π), μπορούμε να προσδιορίσουμε το μαθηματικό μοντέλο του συστήματος, από το οποίο μπορεί να προκύψει η συνάρτηση μεταφοράς.

Παράδειγμα περιγραφής του παραπάνω συστήματος με:

❖ Ολοκληρωδιαφορικές εξισώσεις:

Εφαρμόζουμε τον 2^ο κανόνα του Kirchhoff μπορούμε να γράψουμε:

$$U_i(t) = U_R(t) + U_o(t) \Rightarrow U_i(t) = i(t) \cdot R + U_o(t) \quad (1)$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} \xrightarrow{Q=CU} i(t) = C \frac{dU}{dt} = C \frac{dU_o(t) - 0}{dt} \Rightarrow i(t) = C \frac{dU_o(t)}{dt} \quad (2)$$

$$(1) \xrightarrow{(2)} U_i(t) = RC \frac{dU_o(t)}{dt} + U_o(t) \Rightarrow \frac{dU_o(t)}{dt} + \frac{1}{RC} U_o(t) = \frac{1}{RC} U_i(t)$$

❖ Συνάρτηση μεταφοράς:

Συνάρτηση Μεταφοράς ορίζεται ο λόγος της μετασχηματισμένης (κατά Laplace) συνάρτησης εξόδου του συστήματος, ως προς την μετασχηματισμένη συνάρτηση εισόδου.

$$G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)}.$$

Ο μετασχηματισμός Laplace μετασχηματίζει την συνάρτηση του χρόνου $f(t)$ σε συνάρτηση του Laplace $F(s)$.
όπου $s = \sigma + j\omega$ είναι μιγαδική μεταβλητή.

Βήματα υπολογισμού της ΣΜ (συνάρτησης μεταφοράς):

- α. Γράφω τις μαθηματικές εξισώσεις που περιγράφουν το σύστημα στηριζόμενος στους νόμους και τους κανόνες που διέπουν τη συμπεριφορά του συστήματος.
- β. Μετασχηματίζω τις παραπάνω εξισώσεις εφαρμόζοντας τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace.
- γ. Βρίσκω το λόγο της μετασχηματισμένης συνάρτησης εξόδου ως προς την μετασχηματισμένη συνάρτηση εισόδου, (Συνάρτηση Μεταφοράς).

1^{ος} Τρόπος

Γνωρίζω ότι:

$$i(t) = C \frac{dU_o(t)}{dt} \Rightarrow i(t)dt = CdU_o(t) \Rightarrow dU_o(t) = \frac{1}{C} i(t)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int dU_o(t) = \int \frac{1}{C} i(t)dt \Rightarrow U_o(t) = \frac{1}{C} \int i(t)dt$$

Εφαρμόζουμε τον 2^ο **κανόνα του Kirchhoff**.

$$U_i(t) = U_R(t) + U_o(t) \Rightarrow U_i(t) = i(t) \cdot R + U_o(t)$$

$$\begin{cases} U_i(t) = i(t) \cdot R + U_o(t) \\ U_o(t) = \frac{1}{C} \int i(t)dt \end{cases} \xrightarrow{\text{εφαρμόζουμε Laplace}} \begin{cases} L\{U_i(t)\} = L\{i(t) \cdot R\} + L\{U_o(t)\} \\ L\{U_o(t)\} = L\left\{\frac{1}{C} \int i(t)dt\right\} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U_i(s) = I(s) \cdot R + U_o(s) \\ U_o(s) = \frac{1}{C} \frac{I(s)}{s} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_i(s) = I(s) \cdot R + U_o(s) \\ I(s) = sCU_o(s) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U_i(s) = RCsU_o(s) + U_o(s) \\ I(s) = sCU_o(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_i(s) = (RCs + 1)U_o(s) \\ I(s) = sCU_o(s) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1} = G(s)$$

2ος Τρόπος

Εφαρμόζουμε **Kirchhoff**

$$\begin{cases} U_o(t) = i(t) \cdot X_C \\ U_i(t) = i(t) \cdot (R + X_C) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_o(t) = i(t) \cdot \frac{1}{j\omega C} \\ U_i(t) = i(t) \cdot \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) \end{cases} \xrightarrow{\text{εφαρμόζουμε Laplace}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L\{U_o(t)\} = L\left\{i(t) \cdot \frac{1}{j\omega C}\right\} \\ L\{U_i(t)\} = L\left\{i(t) \cdot \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)\right\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_o(s) = I(s) \cdot \frac{1}{sC} \\ U_i(s) = I(s) \cdot \left(R + \frac{1}{sC}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U_o(s) = I(s) \cdot \frac{1}{sC} \\ U_i(s) = I(s) \cdot \left(\frac{sRC + 1}{sC} \right) \end{cases} \xrightarrow{\text{Διαιρώ κατά μέλη}} \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{\frac{sRC + 1}{sC}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1} = G(s)$$

3ος Τρόπος

Διαιρέτης τάσης

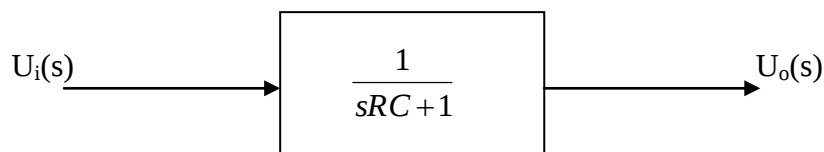
$$U_o(t) = \frac{X_C}{R + X_C} U_i(t) \Rightarrow U_o(t) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} U_i(t) \Rightarrow U_o(t) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{j\omega RC + 1}{j\omega C}} U_i(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_o(t) = \frac{1}{j\omega RC + 1} U_i(t) \xrightarrow{\text{εφαρμόζουμε Laplace}} U_o(s) = \frac{1}{sRC + 1} U_i(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1} = G(s)$$

1.1.1 Υπολογισμός μέτρου και φάσης του παρακάτω κυκλώματος

Δίνεται το παρακάτω διάγραμμα βαθμίδων



Όπου:

$$U_i(t) = 10V_{p-p}$$

$$f: 18 \sim 22.000\text{Hz}$$

$$R = 1K\Omega$$

$$C = 0,1\mu F$$

Να βρεθεί η $U_o(t)$.

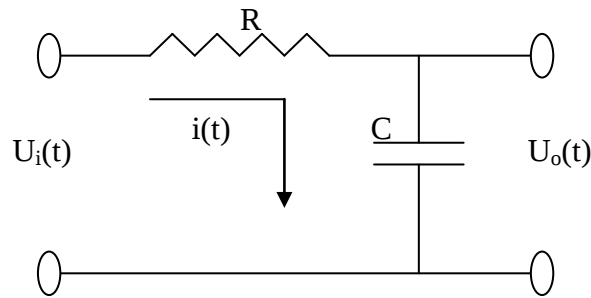
$$G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1} \Rightarrow G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{\frac{sRC + 1}{sC}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} \xrightarrow[\text{αντίσ. Laplace}]{\text{Εφαρμόζουμε}}$$

$$L^{-1}\{G(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{U_o(s)}{U_i(s)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(t) = \frac{U_o(t)}{U_i(t)} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \Rightarrow g(t) = \frac{U_o(t)}{U_i(t)} = \frac{X_c}{R + X_c}$$

Η συνάρτηση προσδιορίζει το κύκλωμα:



$$g(t) = \frac{U_o(t)}{U_i(t)} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \Rightarrow g(t) = \frac{U_o(t)}{U_i(t)} = \frac{\frac{j}{j^2\omega C}}{R + \frac{j}{j^2\omega C}} \Rightarrow$$

$$g(t) = \frac{U_o(t)}{U_i(t)} = \frac{\frac{-j}{\omega C}}{R - \frac{j}{\omega C}} \Rightarrow g(t) = \frac{U_o(t)}{U_i(t)} = \frac{-jX_c}{R - jX_c} \quad (1)$$

Η παραπάνω συνάρτηση είναι ένας μιγαδικός αριθμός. Σ' ένα μιγαδικό αριθμό θα πρέπει να προσδιορίσουμε το μέτρο και το όρισμα.

Π.χ. Έστω $z = \alpha + j\beta \Rightarrow |z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad \text{και} \quad \phi = \text{τοξεφ} \frac{\beta}{\alpha}$

Θέλουμε να προσδιορίσουμε το μέτρο και το όρισμα της σχέσης (1).

$$g(t) = \frac{U_o(t)}{U_i(t)} = \frac{-jX_c}{R - jX_c} \Rightarrow g(t) = \frac{U_o(t)}{U_i(t)} = \frac{-jX_c(R + jX_c)}{(R - jX_c) \cdot (R + jX_c)} \Rightarrow$$

$$g(t) = \frac{U_o(t)}{U_i(t)} = \frac{-jX_c R - j^2 X_c^2}{R^2 + X_c^2} \Rightarrow g(t) = \frac{U_o(t)}{U_i(t)} = \frac{-jX_c R + X_c^2}{R^2 + X_c^2} \Rightarrow$$

$$g(t) = \frac{U_o(t)}{U_i(t)} = \frac{X_c^2}{R^2 + X_c^2} - j \frac{X_c R}{R^2 + X_c^2}$$

Οπότε

$$|g(t)| = \sqrt{\left(\frac{X_c^2}{R^2 + X_c^2}\right)^2 + \left(\frac{X_c R}{R^2 + X_c^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{X_c^4}{(R^2 + X_c^2)^2} + \frac{X_c^2 R^2}{(R^2 + X_c^2)^2}} \Rightarrow$$

$$|g(t)| = \sqrt{\frac{X_c^2 (R^2 + X_c^2)}{(R^2 + X_c^2)^2}} = \sqrt{\frac{X_c^2}{R^2 + X_c^2}} \Rightarrow |g(t)| = \frac{X_c}{\sqrt{R^2 + X_c^2}}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{-\frac{X_c R}{R^2 + X_c^2}}{\frac{X_c^2}{R^2 + X_c^2}} = \tan^{-1} \frac{-R}{X_c} \Rightarrow -\phi = \tan^{-1} \frac{R}{X_c} \Rightarrow -\phi = \tan^{-1} \frac{R}{2\pi f C} \Rightarrow -\phi = \tan^{-1} (2\pi f RC)$$

το (-) δηλώνει ότι η έξοδος υστερεί της εισόδου κατά γωνία φ.

- ❖ Στις χαμηλές συχνότητες το X_c ($X_c = \frac{1}{2\pi f C}$) είναι κατά πολύ μεγαλύτερο από το R ($X_c \gg R$).

$$|g(t)| = \frac{X_c}{\sqrt{X_c^2}} = \frac{X_c}{X_c} = 1 \Rightarrow U_o \cong U_i$$

αυτό μας δείχνει ότι το σήμα εισόδου και το σήμα εξόδου είναι περίπου ίσα.

$$-\phi = \tan^{-1} \frac{R}{X_c} = \tan^{-1} 0 \Rightarrow -\phi = 0^\circ$$

Άρα η έξοδος και η είσοδος είναι συμφασικά μεγέθη.

- ❖ Υπάρχει μία και μόνο συχνότητα όπου $X_c = R$ η συχνότητα αυτή ονομάζεται οριακή (for).

$$|g(t)| = \frac{X_c}{\sqrt{R^2 + X_c^2}} = \frac{X_c}{\sqrt{X_c^2 + X_c^2}} = \frac{X_c}{\sqrt{2} X_c} = \frac{X_c}{\sqrt{2} X_c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow U_o = 0,707 U_i$$

- ❖ Στις υψηλές συχνότητες το X_c ($X_c = \frac{1}{2\pi f C}$) είναι πολύ μικρό ($X_c \approx 0$).

$$|g(t)| = \frac{X_c}{\sqrt{R^2 + X_c^2}} = \frac{0}{\sqrt{R^2}} = 0 \Rightarrow U_o \cong 0$$

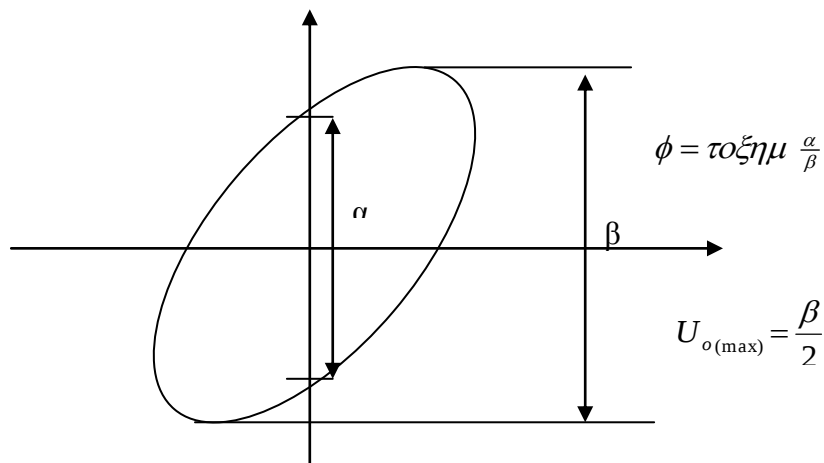
Αυτό σημαίνει ότι η έξοδος είναι μηδενική για οποιαδήποτε είσοδο.

$$-\phi = \tan^{-1} \frac{R}{X_c} = \tan^{-1} \infty \Rightarrow -\phi = 90^\circ$$

Η μελέτη του συστήματος μας δείχνει ότι το σύστημα επιτρέπει τη διέλευση των χαμηλών συχνοτήτων οπότε το σύστημα (φίλτρο) ονομάζεται βαθυπερατό.

1.1.2 Μέθοδος υπολογισμού με τα σχήματα Lissajous

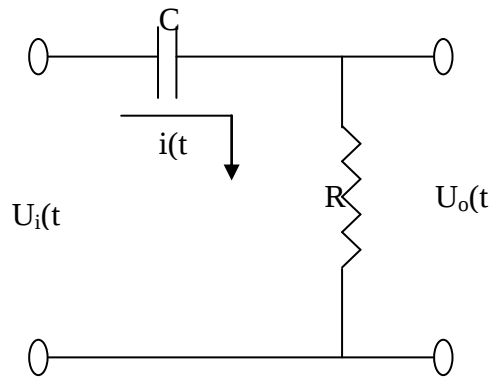
Επεξήγηση Lissajous



Άσκηση: Να δώσετε διάφορες τιμές στην συχνότητα για να δείτε αν το θεωρητικό αποτέλεσμα που προκύπτει συμπίπτει με την πρακτική επαλήθευση του πειράματος.

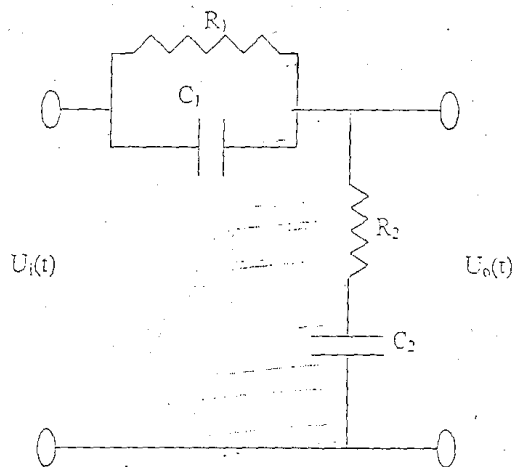
f(Hz)	100	200	500	1.000	2.000	3.000	5.000	10.000	15.000	20.000
U_o(Up-p)										
$\frac{\alpha}{\beta}$										
$\phi = \text{τοξημ } \frac{\alpha}{\beta}$										

Πραγματοποίηση του συστήματος CR πραγματοποίηση των μετρήσεων σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα και θεωρητική επαλήθευση αυτών σαν άσκηση για το σπίτι.



f(Hz)	100	200	500	1.000	2.000	3.000	5.000	10.000	15.000	20.000
U_o(Up-p)										
$\frac{\alpha}{\beta}$										
$\phi = \text{τοξημ } \frac{\alpha}{\beta}$										

Επίσης θα πρέπει να προσδιοριστεί και η συνάρτηση μεταφοράς του παρακάτω κυκλώματος.



Για τις παραπάνω συνδεσμολογίες να προσδιορίσετε την γωνία ϕ (το όρισμα).

Συνδεσμολογία RC

f/Hz	100	500	1.000	2.000	5.000	10.000
$\frac{\alpha}{\beta}$						
$\phi = \text{τοξημ} \frac{\alpha}{\beta}$						

Συνδεσμολογία CR

f/Hz	100	500	1.000	2.000	5.000	10.000
$\frac{\alpha}{\beta}$						
$\phi = \text{τοξημ} \frac{\alpha}{\beta}$						

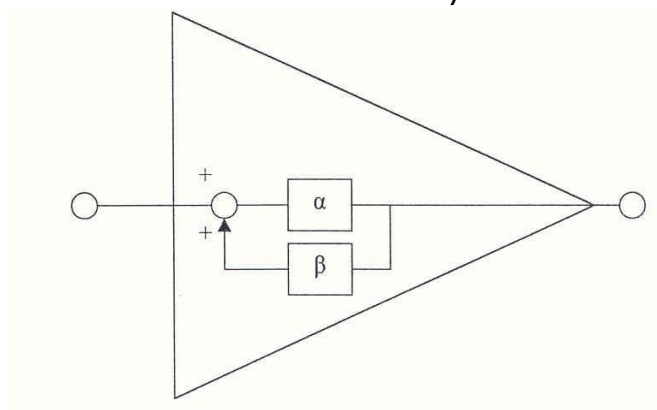
Κεφάλαιο 3

- ❖ Τελεστικοί Ενισχυτές
- ❖ Σχεδίαση με Ελεγκτές PID

3.1 Τελεστικοί Ενισχυτές

Είναι ένα ηλεκτρονικό εξάρτημα (στοιχείο) που σε συνδυασμό με άλλα παθητικά ή ενεργά εξαρτήματα (αντιστάσεις, πυκνωτές, τρανζίστορ, διόδους) και κατάλληλη συνδεσμολογία μας επιτρέπει να δημιουργήσουμε κυκλώματα που κάνουν ορισμένες μαθηματικές πράξεις και όχι μόνο. Η ενίσχυση που μπορεί να κάνει σ' ένα σήμα είναι της τάξης του 10^3 μέχρι 10^8 και συνήθως γίνεται με θετική ανατροφοδότηση (β) όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Ο

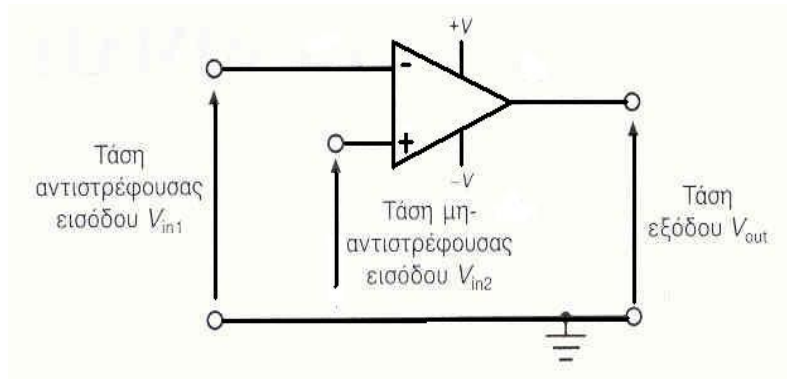
συντελεστής ενίσχυσης θα είναι: $A = \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta}$



Σχήμα 3.8

Με μεταβολή της ανάδρασης β μπορούμε να πετύχουμε μεταβλητό κέρδος A . Αν $ab \rightarrow 1 \Rightarrow A \rightarrow \infty$ (πρακτικά αδύνατο).

Στα ηλεκτρονικά σχήματα ο ενισχυτής συμβολίζεται όπως στο σχήμα 3.9.



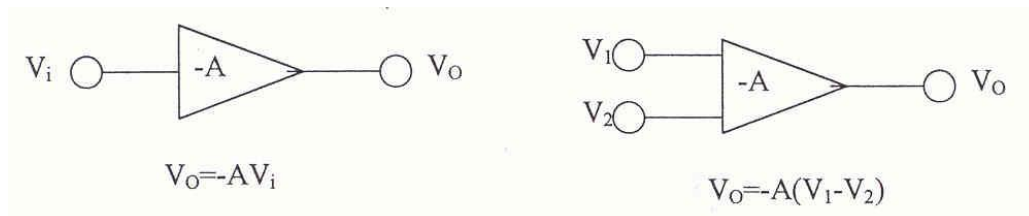
Σχήμα 3.9

$$V_{out} = A(V_{in2} - V_{in1})$$

V_{out} = τάση εξόδου

A = είναι η απολαβή (κέρδος) ανοικτού βρόγχου του ενισχυτή.

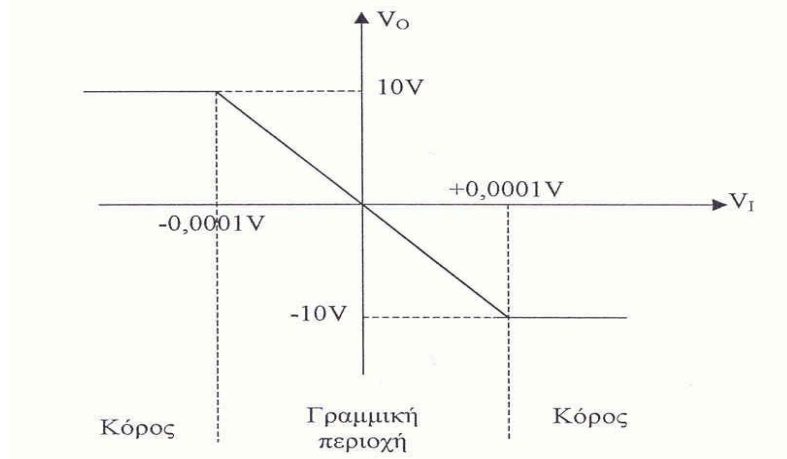
Άλλοι πιθανοί συμβολισμοί είναι οι παρακάτω:



Σχήμα 3.10

3.4.1 Χαρακτηριστική Εισόδου – Εξόδου

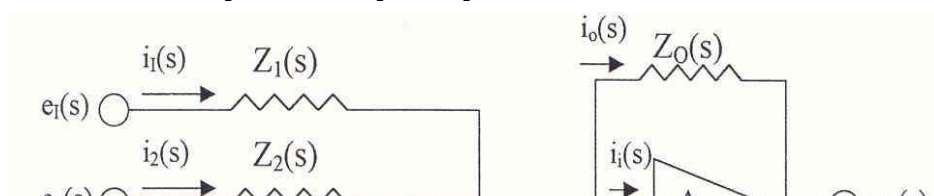
Στο σχήμα 3.11 φαίνεται η χαρακτηριστική εισόδου – εξόδου τελεστικού ενισχυτή με κέρδος $A = 100000$ και τάση κόρου ± 10 V. Η γραμμική περιοχή είναι το διάστημα $-0,0001$ V ÷ $0,0001$ V.



Σχήμα 3.11

Η αντίσταση εισόδου του τελεστικού ενισχυτή είναι πολύ μεγάλη, το ρεύμα εισόδου πολύ μικρό, πρακτικά μηδενικό και η αντίσταση εξόδου πολύ μικρή, πρακτικά μηδενική.

3.4.2 Βασικό κύκλωμα τελεστικού ενισχυτή πολλαπλών εισόδων με ανάδραση



Σχήμα 3.12

Προηγουμένως κάναμε την παραδοχή ότι το ρεύμα εισόδου στον τελεστικό ενισχυτή είναι αμελητέο (πρακτικά μηδέν) έτσι θα έχουμε

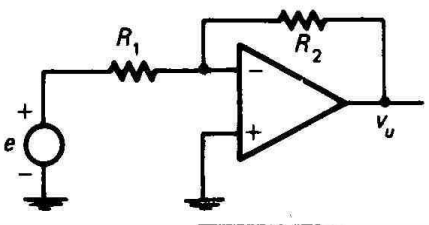
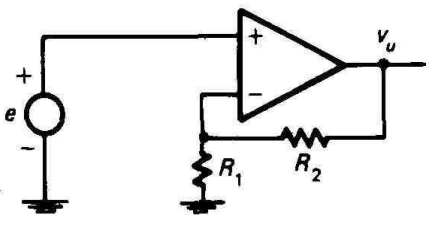
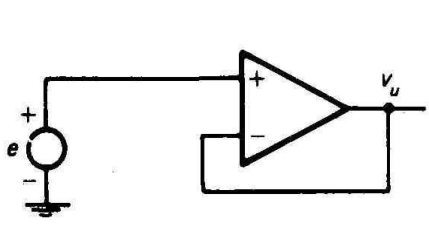
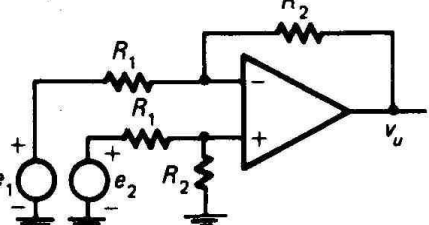
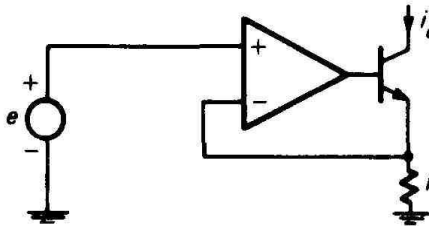
$$i_1(s) + i_2(s) + \dots + i_n(s) = i_0(s)$$

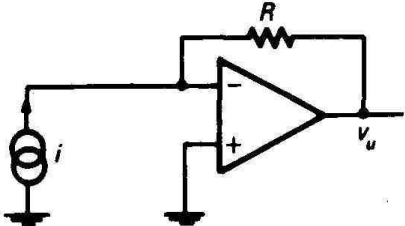
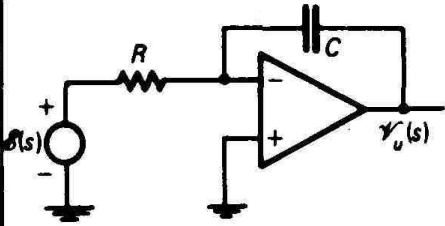
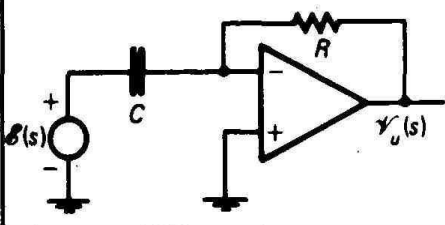
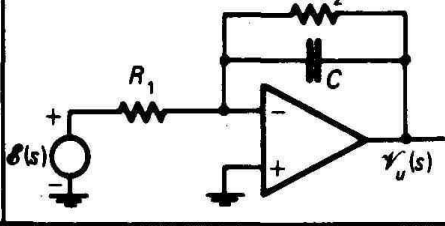
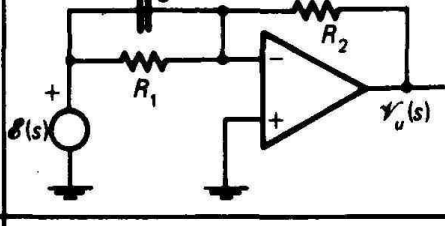
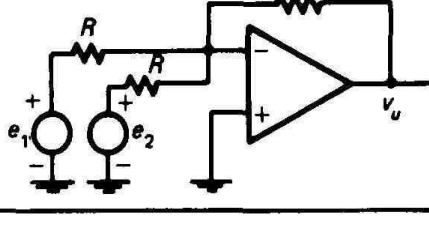
$$\frac{e_1(s) - e(s)}{Z_1(s)} + \frac{e_2(s) - e(s)}{Z_2(s)} + \dots + \frac{e_n(s) - e(s)}{Z_n(s)} = \frac{e(s) - e_0(s)}{Z_0(s)}$$

$$e_0 = -\frac{Z_0(s)}{Z_1(s)}e_1(s) - \frac{Z_0(s)}{Z_2(s)}e_2(s) - \dots - \frac{Z_0(s)}{Z_n(s)}e_n(s)$$

Η τάση $e(s)$ είναι τόσο μικρή που πρακτικά τείνει στο μηδέν. Αυτό μας επιτρέπει να θεωρούμε το σημείο που αυτή εμφανίζεται σαν ιδανική γείωση.

Ο ΤΕΛΕΣΤΙΚΟΣ ΕΝΙΣΧΥΤΗΣ ΣΕ ΒΑΣΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΜΕ ΑΝΑΔΡΑΣΗ

ΟΝΟΜΑΣΙΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ	ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΚΥΚΛΩΜΑ	ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΕΙΣΟΔΟΥ ΕΞΟΔΟΥ
1) ΕΝΙΣΧΥΤΗΣ ΤΑΣΕΩΣ ΜΕ ΑΝΑΣΤΡΟΦΗ		$\frac{v_u}{e} = -\frac{R_2}{R_1}$
2) ΕΝΙΣΧΥΤΗΣ ΤΑΣΕΩΣ ΧΩΡΙΣ ΑΝΑΣΤΡΟΦΗ ΣΗΜΑΤΟΣ		$\frac{v_u}{e} = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$
3) ΚΥΚΛΩΜΑ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ ΤΑΣΕΩΣ (BUFFER)		$\frac{v_u}{e} = 1$
4) ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΕΝΙΣΧΥΤΗΣ		$v_u = \frac{R_2}{R_1} (e_2 - e_1)$
5) ΓΕΝΝΗΤΡΙΑ ΡΕΥΜΑΤΟΣ ΜΕ ΕΛΕΓΧΟ ΤΑΣΕΩΣ		$\frac{i_u}{e} = \frac{1}{R}$ (Το κέρδος έντασης α μεταξύ εκπομπού και συλλέκτη εκλαμβάνεται ίσο με τη μονάδα.)

6)	ΓΕΝΝΗΤΡΙΑ ΤΑΣΕΩΣ ΜΕ ΕΛΕΓΧΟ ΕΝΤΑΣΕΩΣ		$\frac{v_u}{i} = -R$
7)	ΚΑΘΑΡΟΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΗΣ		$\frac{y_u(s)}{u(s)} = -\frac{1}{sRC}$
8)	ΚΑΘΑΡΟΣ ΔΙΑΦΟΡΙΣΤΗΣ		$\frac{y_u(s)}{u(s)} = -sRC$
9)	ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΗΣ		$\frac{y_u(s)}{u(s)} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1+sR_2C}$
10)	ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΣ ΔΙΑΦΟΡΙΣΤΗΣ		$\frac{y_u(s)}{u(s)} = -\frac{R_2}{R_1} (1+sR_1C)$
11)	ΑΘΡΟΙΣΤΗΣ ΜΕ ΑΝΑΣΤΡΟΦΗ		$v_u = -(e_1 + e_2)$

3.2 Σχεδίαση με ελεγκτές PID

3.5.1 Εισαγωγή

Ο έλεγχος με ελεγκτές PID (ή ελεγκτές τριών όρων) είναι η πιο διαδεδομένη μέθοδος ελέγχου στα πρακτικά συστήματα. Χρησιμοποιείται σχεδόν σε κάθε βιομηχανική εφαρμογή του αυτομάτου ελέγχου. Επίσης χρησιμοποιείται για τον αυτόματο έλεγχο συστημάτων παραγωγής και διανομής ενέργειας, στα μέσα μεταφοράς (πλοία, ελικόπτερα, αεροπλάνα), στους πυρηνικούς αντιδραστήρες, τα ρομπότ και αλλού. Η ευρεία αυτή διάδοση των ελεγκτών PID οφείλεται στην απλή δομή τους και στα πολύ καλά αποτελέσματα που δίνουν. Τα βασικά χαρακτηριστικά τους είναι η εύκολη ελαχιστοποίηση των αποκλίσεων, η βελτίωση της ταχύτητας απόκρισης και η ακρίβεια. Η ρύθμιση (tuning) των ελεγκτών τριών όρων, δηλαδή η επιλογή των παραμέτρων τους, είναι ένα θέμα το οποίο έχει απασχολήσει κατά πολύ τους μηχανικούς που τους χρησιμοποιούν. Έχουν αναπτυχθεί πολλές μέθοδοι ρύθμισης, από απλούς εμπειρικούς κανόνες έως μεθόδους ελαχιστοποίησης κάποιων κριτηρίων κόστους. Ένα χαρακτηριστικό που κάνει τους PID ελεγκτές δημοφιλείς, είναι η εύκολη υλοποίηση τους σε υπολογιστή, γεγονός που μειώνει το κόστος τους σε πολύ χαμηλά επίπεδα. Τα τελευταία χρόνια έχουν παρουσιαστεί μονάδες PID ελεγκτών οι οποίες έχουν την δυνατότητα να αυτορυθμίζονται, είτε με χρήση τεχνικών προσαρμοστικού ελέγχου, όπου οι παράμετροι του ελεγκτή ρυθμίζονται συνεχώς κατά τη διάρκεια της λειτουργίας, είτε με μεθόδους όπου η ρύθμιση γίνεται όταν το ζητήσει ο χειριστής.

Σκοπός του παραρτήματος αυτού είναι να περιγραφούν μερικές από τις βασικότερες μεθόδους σχεδίασης με PID ελεγκτές και να δοθεί μια εποπτική ερμηνεία της επίδρασης τους στη συμπεριφορά του προς έλεγχο συστήματος.

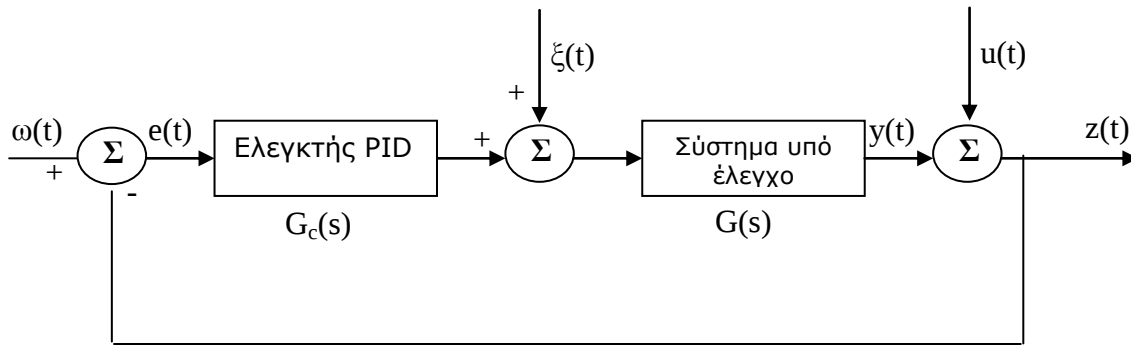
3.5.2 Σύστημα κλειστού βρόχου με PID ελεγκτή

Ο ελεγκτής PID χρησιμοποιείται συνήθως σε συστήματα μοναδιαίας ανατροφοδότησης όπως στο σχήμα 3.13. Από το σχήμα βλέπουμε ότι η είσοδος του ελεγκτή είναι το σήμα του σφάλματος $e(t)$ ενώ η είσοδος του συστήματος είναι η $u(t)$. Το διάγραμμα βαθμίδων του ελεγκτή τριών όρων δίνεται στο σχήμα 3.14 και έχει συνάρτηση μεταφοράς.

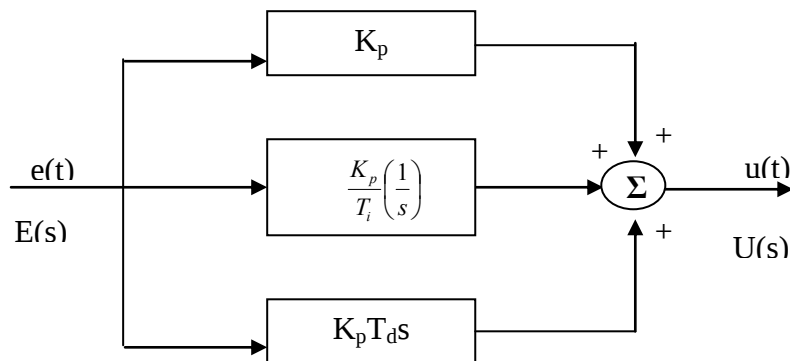
$$G_c(s) = K_p \left[1 + \frac{1}{T_i s} + sT_d \right] \quad (1)$$

Προφανώς, ο ελεγκτής PI έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$G_c(s) = K_p \left[1 + \frac{1}{T_i s} \right] \quad (2)$$



Σχήμα 3.13 Σύστημα αυτομάτου ελέγχου με μοναδιαία ανατροφοδότηση.



Σχήμα 3.14 Το διάγραμμα βαθμίδων του ρυθμιστή PID συνεχούς χρόνου.

$$G_c(s) = K_p [1 + T_d s] \quad (3)$$

Το διάγραμμα βαθμίδων του ελεγκτή PID φαίνεται στο σχήμα 3.14. Οι παράμετροι του ελεγκτή είναι το αναλογικό κέρδος K_p , ο χρόνος ολοκλήρωσης T_i και ο χρόνος διαφορίσης T_d . Με τον όρο ρύθμιση του ελεγκτή PID εννοούμε την επιλογή των τριών αυτών παραμέτρων έτσι ώστε το κλειστό σύστημα να έχει τα επιθυμητά χαρακτηριστικά. Τα σήματα $\xi(t)$ και $\eta(t)$ του σχήματος 3.13 είναι οι διαταραχές στην είσοδο και την έξοδο του προς έλεγχο συστήματος. Αυτά πρέπει να λαμβάνονται υπόψη κατά την σχεδίαση ενός συστήματος ελέγχου διότι στην πράξη υπάρχουν σχεδόν πάντοτε και έχουν σημαντική επίδραση στην συμπεριφορά του κλειστού συστήματος. Μια σχεδίαση θεωρείται επιτυχημένη αν καταφέρνει να ελαχιστοποιήσει την επίδραση των διαταραχών και αν η έξοδος του συστήματος ακολουθεί γρήγορα και με ακρίβεια το σήμα εισόδου $\omega(t)$ του κλειστού συστήματος.

Οι θέσεις των πόλων ενός συστήματος είναι ένα από τα χαρακτηριστικά που επιδρούν αποφασιστικά στην συμπεριφορά του. Με την χρήση του ελεγκτή PID προσπαθούμε να μετακινήσουμε τους πόλους του συστήματος σε κάποιες επιθυμητές περιοχές. Γενικά ο ελεγκτής PID δεν αρκεί για να τοποθετηθούν αυθαίρετα όλοι οι πόλοι ενός συστήματος. Όταν όμως το προς έλεγχο σύστημα είναι πρώτης ή δεύτερης τάξης, μπορούμε να τοποθετήσουμε αυθαίρετα τους

πόλους του κλειστού συστήματος με ρυθμιστή τριών όρων όπως φαίνεται στα δύο παρακάτω παραδείγματα.

Παράδειγμα 1.

Θεωρούμε το προς έλεγχο σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $G_c(s) = K_p \left[1 + \frac{1}{sT_i} \right]$. Ναδειχθεί ότι με χρήση ελεγκτή PI μπορούμε να τοποθετήσουμε αυθαίρετα όλους τους πόλους του κλειστού συστήματος.

Λύση

Η συνάρτηση μεταφοράς $G_c(s)$ του ελεγκτή PI είναι $G_c(s) = K_p \left[1 + \frac{1}{sT_i} \right]$

οπότε η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ του κλειστού συστήματος είναι

$$H(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}$$

και χαρακτηριστική εξίσωση του κλειστού συστήματος είναι

$$s^2 + \left(\frac{1}{T_1} + \frac{KK_p}{T_1} \right) s + \frac{KK_p}{T_i T_1} = 0$$

Βλέπουμε ότι το κλειστό σύστημα είναι δεύτερης τάξης. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι της μορφής

$$s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2 = 0$$

Οι πόλοι του κλειστού συστήματος είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Επομένως οι θέσεις τους ορίζονται από τους συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου. Εξισώνοντας τους συντελεστές των δύο πιο πάνω πολυωνύμων και επιλύοντας ως προς K_p και T_i παίρνουμε:

$$K_p = \frac{2\zeta\omega T_1 - 1}{K} \quad \text{και} \quad T_i = \frac{2\zeta\omega T_1 - 1}{\omega^2 T_1}$$

Καταλήξαμε δηλαδή στο ότι για οποιαδήποτε επιλογή των ζ και ω , υπάρχουν K_p και T_i που μας δίνουν το επιθυμητό χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Από τις εκφράσεις των παραμέτρων του PI ελεγκτή παρατηρούμε ότι:

- ❖ Το αναλογικό κέρδος K_p έχει θετική τιμή όταν $\omega > 2\zeta T_1$
- ❖ Όταν το ω πάρει μεγάλες τιμές, η σταθερά χρόνου ολοκλήρωσης $T_i = \frac{2\zeta}{\omega}$ γίνεται δηλαδή δεν εξαρτάται από την σταθερά χρόνου του προς έλεγχο συστήματος.

Παράδειγμα 2.

Να δειχτεί ότι αν το προς έλεγχο σύστημα έχει συνάρτηση μεταφοράς $G(s) = \frac{K}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$, τότε οι πόλοι του κλειστού συστήματος μπορούν να τοποθετηθούν αυθαίρετα με χρήση ελεγκτή PID.

Λύση

Η συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$ δίνεται από την (B.2.1) και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του κλειστού συστήματος είναι

$$s^3 + s^2 \left[\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{KK_p T_d}{T_1 T_2} \right] + s \left[\frac{1}{T_1 T_2} + \frac{KK_p}{T_1 T_2} \right] + \frac{KK_p}{T_1 T_2 T_i}$$

Το κλειστό σύστημα είναι τρίτης τάξης. Έστω ότι το επιθυμητό χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει τη μορφή

$$(s + \tau\omega)(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2)$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοιοβαθμίων όρων των δύο παραπάνω πολυωνύμων και επιλύοντας το σύστημα που προκύπτει ως προς K_p , T_i , T_d , παίρνουμε

$$K_p = \frac{T_1 T_2 \omega^2 (1 + 2\zeta\tau) - 1}{K}, \quad T_i = \frac{T_1 T_2 \omega^2 (1 + 2\zeta\tau) - 1}{T_1 T_2 \tau \omega^3}, \quad T_d = \frac{T_1 T_2 \omega (\tau + 2\zeta) - T_1 - T_2}{T_1 T_2 \omega (1 + 2\zeta\tau) - 1}$$

Εφόσον το σύστημα έχει πάντοτε λύση, μπορούμε πάντοτε να τοποθετήσουμε αυθαίρετα τους πόλους του κλειστού συστήματος.

3.5.3 Πρακτικές μέθοδοι ρύθμισης ελεγκτών PID

Στο εδάφιο αυτό δίνονται οι βασικές αρχές ορισμένων πρακτικών μεθόδων για την επιλογή των παραμέτρων των ελεγκτών τριών όρων. Οι βασικές απαιτήσεις που πρέπει να ικανοποιεί ένας ελεγκτής PID είναι οι παρακάτω:

- ❖ Ελαχιστοποίηση του σφάλματος λόγω διαταραχών.
- ❖ Μεγιστοποίηση της ταχύτητας επαναφοράς στην επιθυμητή τιμή μετά από την επίδραση μιας διαταραχής,
- ❖ Ελαχιστοποίηση του σφάλματος μόνιμης κατάστασης (αρχικού και οφειλόμενου στις μεταβολές των συνθηκών λειτουργίας).

Γενικά μπορούμε να πούμε τα εξής: Η απαίτηση (iii) ικανοποιείται αν μπορούμε να έχουμε υψηλό κέρδος K σε συνδυασμό με ευστάθεια και γρήγορη απόκριση. Η διαφορική δράση βελτιώνει τα χαρακτηριστικά (i) και (ii) με την εισαγωγή προήγησης φάσης, ενώ η ολοκληρωτική δράση μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν έχουμε μεγάλο σφάλμα μόνιμης κατάστασης.

Οι βασικές μέθοδοι ρύθμισης ελεγκτών PID χωρίζονται στις παρακάτω κατηγορίες:

- i) Δοκιμή και σφάλμα.
- ii) Εμπειρικές μέθοδοι οι οποίες βασίζονται σε απλές μετρήσεις στο προς έλεγχο σύστημα.
- iii) Μέθοδοι που βασίζονται στην απόκριση συχνότητας του προς έλεγχο συστήματος.

Η μέθοδος (i), αν και είναι εύκολη και αρκετά αποδοτική, δεν ενδείκνυται για πραγματικά συστήματα. Αυτό γιατί, αφενός μεν η συλλογή μετρήσεων είναι χρονοβόρα, αφετέρου δε γιατί τα πραγματικά συστήματα υπόκεινται σε διαταραχές οι οποίες επιδρούν σοβαρά στα αποτελέσματα των μετρήσεων.

Οι εμπειρικές μέθοδοι έχουν και αυτές το μειονέκτημα των σφαλμάτων στις μετρήσεις λόγω διαταραχών. Όμως οι τελικές επιλογές των παραμέτρων του ρυθμιστή γίνονται μετά από υπολογισμούς.

Η μέθοδος της απόκρισης συχνότητας φαίνεται ιδεώδης όταν χρησιμοποιείται προσομοίωση του πραγματικού συστήματος. Παρουσιάζει όμως σημαντικές δυσκολίες αν πρόκειται να πάρουμε μετρήσεις από πραγματικά συστήματα.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε μερικές από τις επικρατέστερες τεχνικές ρύθμισης με ελεγκτές PID. Η κάθε μια από αυτές παρουσιάζει πλεονεκτήματα αλλά και μειονεκτήματα έναντι της άλλης. Τελικά επιλέγουμε εκείνη την τεχνική ρύθμισης που ταιριάζει περισσότερο στα δεδομένα και τις απαιτήσεις της συγκεκριμένης εφαρμογής.

3.5.4 Σχεδίαση ρυθμιστών PID με την μέθοδο των ZIEGLER και NICHOLS

Στις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές, ο ρυθμιστής PID ικανοποιεί τις απαιτήσεις του σχεδιασμού, γεγονός που δίκαια τον καθιστά ίσως τον πλέον διαδεδομένο ρυθμιστή στη πράξη. Οι παράμετροι K_p , T_i και T_d του ρυθμιστή PID εκλέγονται σύμφωνα με τις τεχνικές που αναπτύξαμε στα συγγράμματα [5] και [6]. Για ακόμα μεγαλύτερη ευκολία στον προσδιορισμό των παραμέτρων K_p , T_i και T_d και για περιπτώσεις όπου δεν είναι διαθέσιμο κάποιο μαθηματικό μοντέλο για το υπό έλεγχο σύστημα, οι Ziegler και Nichols, έχουν προτείνει τις πιο κάτω δύο μεθόδους:

- I. Η μέθοδος της μεταβατικής απόκρισης. Διεγείρουμε το υπό έλεγχο σύστημα με την μοναδιαία Ρηματική συνάρτηση. Η μεταβατική απόκριση του ανοικτού υπό έλεγχο συστήματος είναι, εν γένει, όπως στο σχήμα 3.15. Εισάγουμε τις παραμέτρους θ και t_d , όπου $\theta = \text{κλίση} = K/t_r = \text{χρόνος αντίδρασης}$ και όπου $t_d = \text{χρόνος καθυστέρησης}$. Με στόχο να πετύχουμε μια σταθερά απόσβεσης περίπου $\zeta=0.2$, οι παράμετροι K_p , T_i και T_d εκλέγονται όπως στο πίνακα 3.16.

II. Η μέθοδος ορίου ευστάθειας. Πρώτα ελέγχουμε το σύστημα μόνο με αναλογικό ρυθμιστή. Αυξάνουμε την παράμετρο K_p σιγά-σιγά έως ότου έχουμε συντηρούμενη ταλάντωση. Στο σημείο αυτό, σημειώνουμε την τιμή της παραμέτρου K_p , που συμβολίζουμε με $\tilde{K}_p$, ως επίσης και την αντίστοιχη περίοδο ταλάντωσης, που συμβολίζουμε με $\tilde{T}$. Τότε, οι παράμετροι K_p , T_i και T_d εκλέγονται όπως στο πίνακα 3.17.

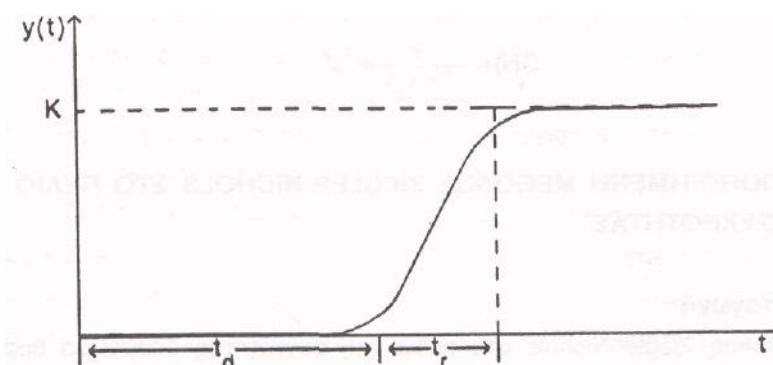
Από τα παραπάνω παρατηρούμε ότι:

- ❖ Όταν έχουμε μόνο αναλογικό έλεγχο, χρησιμοποιούμε περιθώριο κέρδους ίσο με 2.
- ❖ Όταν έχουμε ελεγκτή PI χρησιμοποιούμε μικρότερο αναλογικό κέρδος διότι η παρουσία ολοκληρωτικού ελέγχου εισάγει πρόσθετη καθυστέρηση φάσης σε όλες τις συχνότητες που έχει σαν συνέπεια τάση αποσταθεροποίησης του συστήματος.
- ❖ Ο διαφορικός όρος του ελεγκτή εισάγει προήγηση φάσης με συνέπεια την ισχυρή ευσταθιοποίηση του κλειστού συστήματος. Επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μεγάλο αναλογικό κέρδος χωρίς τον κίνδυνο να φέρουμε το σύστημα σε αστάθεια.

Οι πιο πάνω απλοί κανόνες ισχύουν για συστήματα συνεχούς χρόνου και μπορούν να εφαρμοστούν και στα συστήματα διακριτού χρόνου, αρκεί η δειγματοληψία να είναι πολύ γρήγορη, τουλάχιστο 20 φορές το εύρος ζώνης. Αν η δειγματοληψία δεν είναι τόσο γρήγορη, τότε ο ρυθμιστής PID συνήθως δεν δίνει πολύ καλά αποτελέσματα.

Τέλος σημειώνεται ότι ένα σύστημα με βηματική απόκριση όπως στο σχήμα B.4.1 δίνεται προσεγγιστικά από την συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s) = \frac{K}{1 + t_r s} e^{-t_d s}$$



Σχήμα 3.14. Βηματική απόκριση του υπό έλεγχο συστήματος.

Ρυθμιστής		K_p	T_i	T_d
Αναλογικός	P	$\frac{1}{t_d \theta}$		
Αναλογικός-Ολοκληρωτικός	PI	$0.9/t_d \theta$	$3t_d$	
Αναλογικός-Ολοκληρωτικός-Διαφορικός	PID	$1.2/t_d \theta$	$2t_d$	$0.5t_d$

Πίνακας 3.15. Οι τιμές των παραμέτρων K_p , T_i και T_d των Ziegler και Nichols με τη μέθοδο της μεταβατικής απόκρισης.

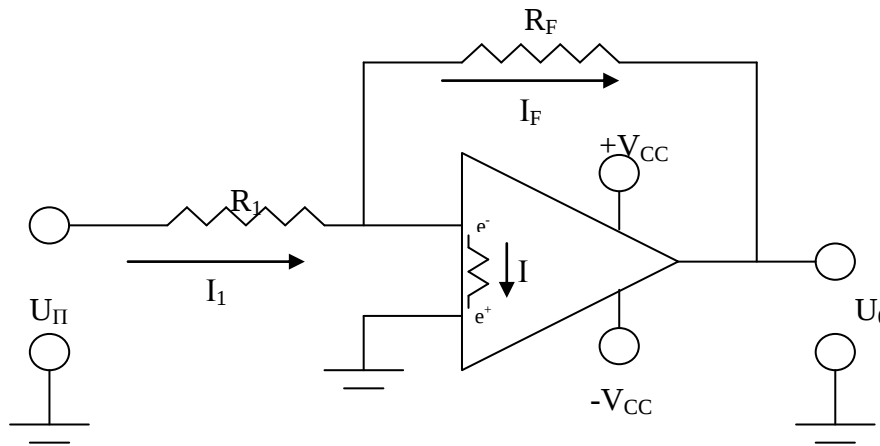
Ρυθμιστής		K_p	T_i	T_d
Αναλογικός	P	$0.5\tilde{K}_p$		
Αναλογικός-Ολοκληρωτικός	PI	$0.45\tilde{K}_p$	$\tilde{T}/1.2$	
Αναλογικός-Ολοκληρωτικός-Διαφορικός	PID	$0.6\tilde{K}_p$	$\tilde{T}/2$	$\tilde{T}/8$

Πίνακας 3.16 Οι τιμές των παραμέτρων K_p , T_i και T_d των Ziegler και Nichols με την μέθοδο του ορίου ευστάθειας

1.2 Κυκλώματα με Τελεστικό Ενισχυτή

Πείραμα 2ο: Αθροιστής, Ενισχυτική βαθμίδα με αναστροφή, Ολοκληρωτής

Βασικό κύκλωμα τελεστικού ενισχυτή με αναστροφή



Ισχύει ότι: $e^- = e^+$
 $e^+ = 0$

Εφαρμόζουμε τον 2^ο **κανόνα του Kirchhoff**

$$I_1 = I_F + I_s \xrightarrow{I_s=0} I_1 = I_F \Rightarrow \frac{U_{\Pi} - e^-}{R_1} = \frac{e^- - U_0}{R_F} \Rightarrow$$

$$\frac{U_{\Pi}}{R_1} = \frac{-U_0}{R_F} \Rightarrow U_0 = -\frac{R_F}{R_1} U_{\Pi}$$

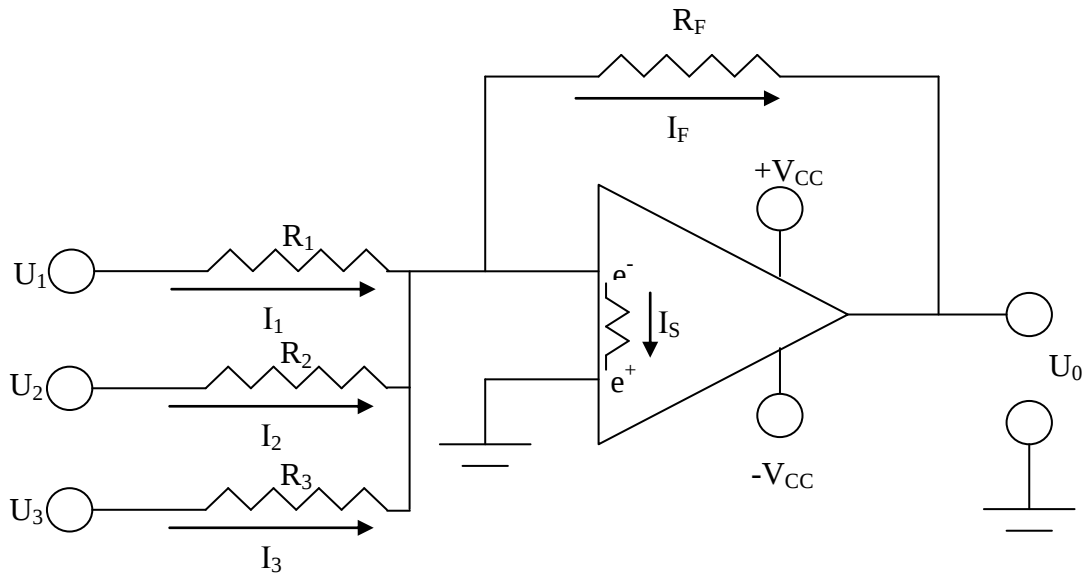
$$\text{αν } R_1 = R_F \Rightarrow U_0 = -U_{\Pi}$$

Ανάλογα λοιπόν με τις τιμές των R_1 και R_F προκύπτει ο συντελεστής

$$\text{ισχύος } \alpha = \frac{R_F}{R_1} .$$

1.2.1 Αθροιστής

Όταν έχουμε παραπάνω από μία διέγερση:



$$I_1 + I_2 + I_3 = I_F + I_s \xrightarrow{I_s=0} I_1 + I_2 + I_3 = I_F \Rightarrow \frac{U_1 - e^-}{R_1} + \frac{U_2 - e^-}{R_2} + \frac{U_3 - e^-}{R_3} = \frac{e^- - U_0}{R_F} \Rightarrow$$

$$\frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} + \frac{U_3}{R_3} = \frac{-U_0}{R_F} \Rightarrow U_0 = -\left(\frac{R_F}{R_1}U_1 + \frac{R_F}{R_2}U_2 + \frac{R_F}{R_3}U_3\right)$$

Άσκηση: Χρησιμοποιούμε ένα κύκλωμα μετρήσεων αθροιστή με τρεις ρυθμιζόμενες τάσης εισόδου U_1 , U_2 , U_3 . Με τα ποτενσιόμετρα P1, P2, P3 επιλέγουμε τις τρεις τάσεις εισόδου μεταξύ $-10V$ και $+10V$ ενώ στην έξοδο εμφανίζεται το άθροισμα U_0 . Επειδή η αντίσταση R είναι ίση με $1M\Omega$ και οι αντιστάσεις εισόδου είναι $R_1=1M\Omega$, $R_2=1M\Omega$, $R_3=100M\Omega$ γι' αυτό και οι συντελεστές είναι $\frac{R}{R_1}=1$, $\frac{R}{R_2}=1$, $\frac{R}{R_3}=10$. Εφαρμόζουμε τις τάσεις U_1 , U_2 , U_3 στις τρεις εισόδους του τελεστικού αθροιστή με συντελεστές εισόδου 1, 1, 10 αντίστοιχα και μετράμε την τάση εξόδου.

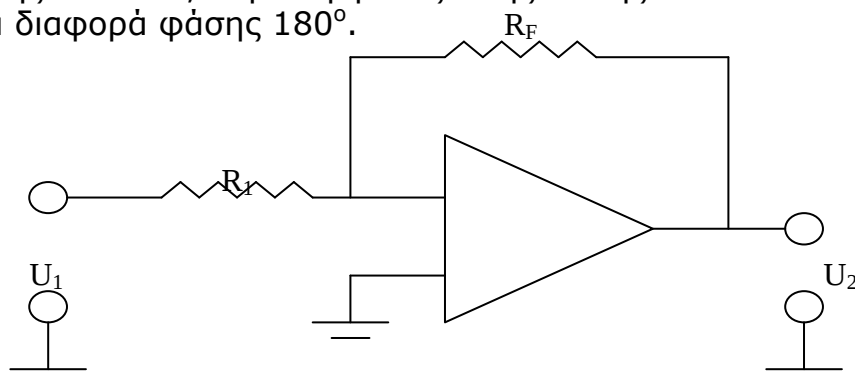
U_1 x 1 (V)	U_2 x 1 (V)	U_3 x 10 (V)	U_0 Μετρούμενη (V)	U_0 Υπολογισμένη (V)
0,6	1,4	0,5		
0,2	1,7	0,5		

1	4	-0,5		
4	1	-0,5		
-2	4	0,1		
-6	4	-0,1		
-2	-2	-0,5		
-9	-4	-0,1		
-4	-2	-0,2		

1.2.2 Ενισχυτική Βαθμίδα με αναστροφή

Όπως είναι γνωστό, η ενίσχυση ενός τελεστικού ενισχυτή με συμπεριφορά P (proportional) – Ρυθμιστή είναι ίση με το λόγο της αντίστασης ανάδρασης προς την αντίσταση εισόδου.

Στο κύκλωμα αυτό του τελεστικού ενισχυτή γίνεται αναστροφή της τάσης εισόδου, δηλαδή μεταξύ της τάσης εισόδου και εξόδου υπάρχει διαφορά φάσης 180° .



Άσκηση:

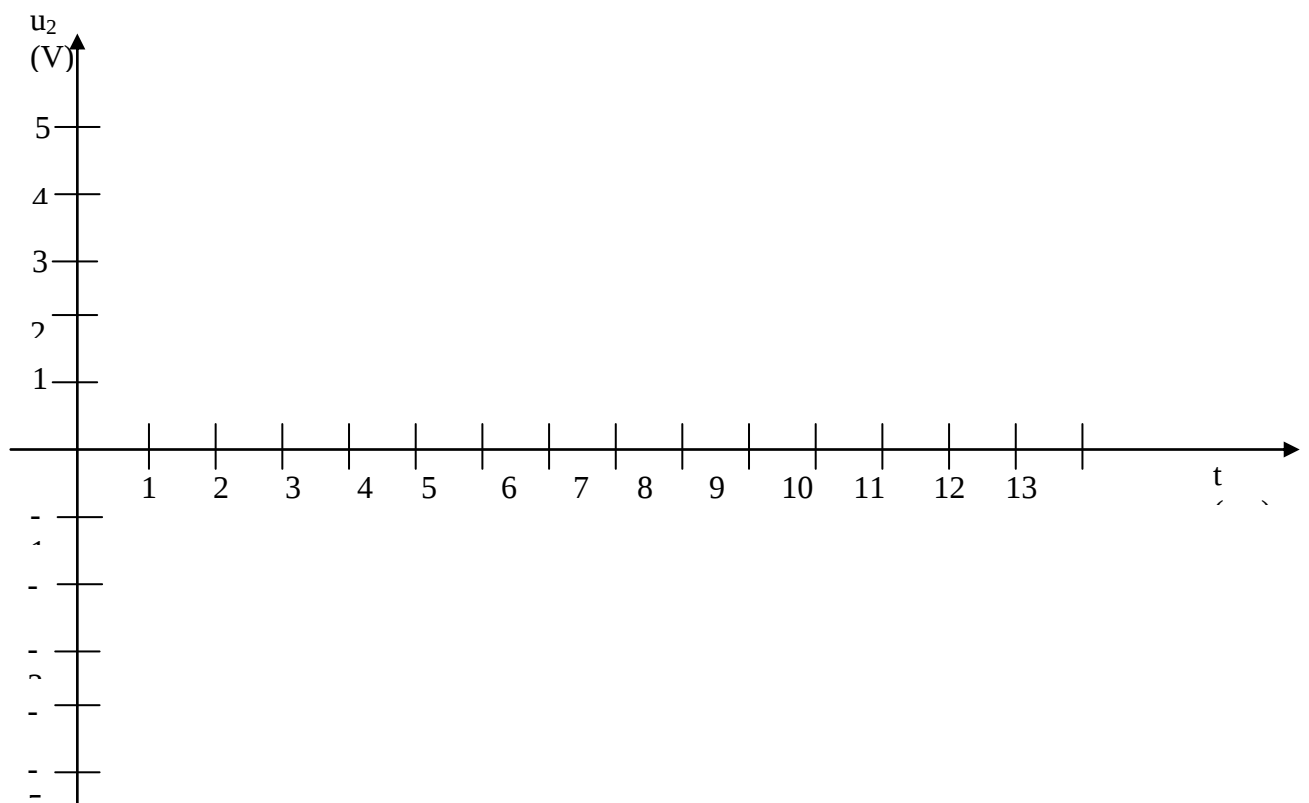
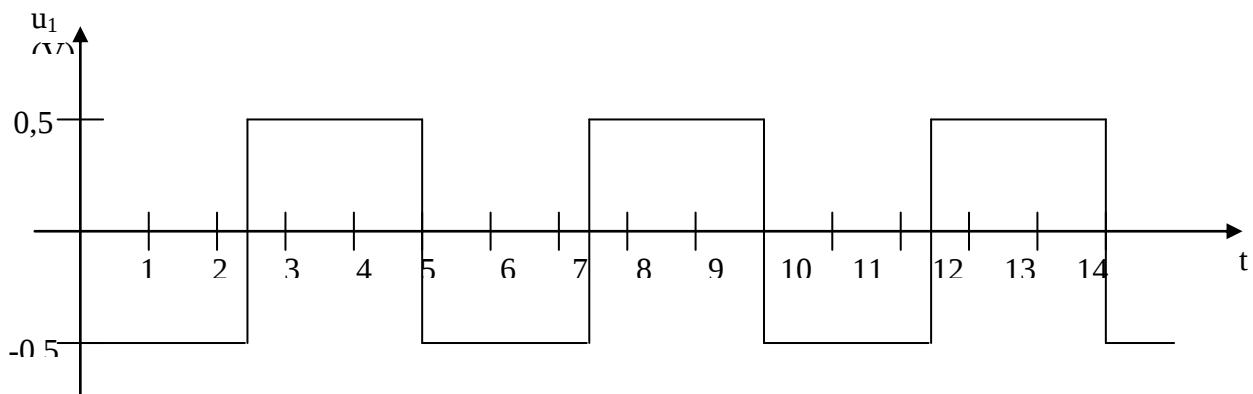
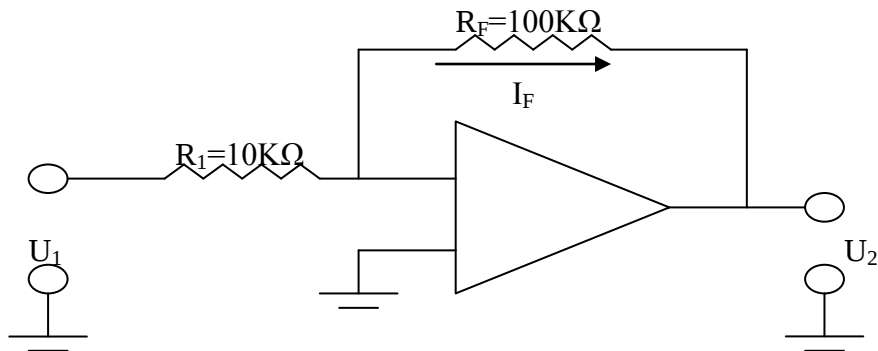
α) Μέτρηση ενίσχυσης

Εφαρμόζουμε στην είσοδο του τελεστικού ενισχυτή ημιτονική τάση $u_1 = U_1 \eta \mu \omega t$ με σταθερό πλάτος $U_{1p-p} = 1V$ και συχνότητας 100 Hz. Καταχωρούμε τις τιμές των τάσεων εισόδου U_{1p-p} και εξόδου U_{2p-p} χρησιμοποιώντας παλμογράφο διπλής δέσμης στις θέσεις που αντιστοιχούν κάθε φορά στο ζευγάρι τιμών των αντιστάσεων R_1 και R_f του παρακάτω πίνακα.

R_1 (ΚΩ)	R_f (ΚΩ)	U_{1p-p} (V)	U_{2p-p} (V)
1	1		
1	10		

β) Χρονική απόκριση

Να μελετηθεί στον παλμογράφο η χρονική απόκριση του αναλογικού ρυθμιστή Ρ με τετραγωνικό παλμό εισόδου u_1 ως προς το μηδέν, πλάτους 1Vp-p και συχνότητας 200Hz.



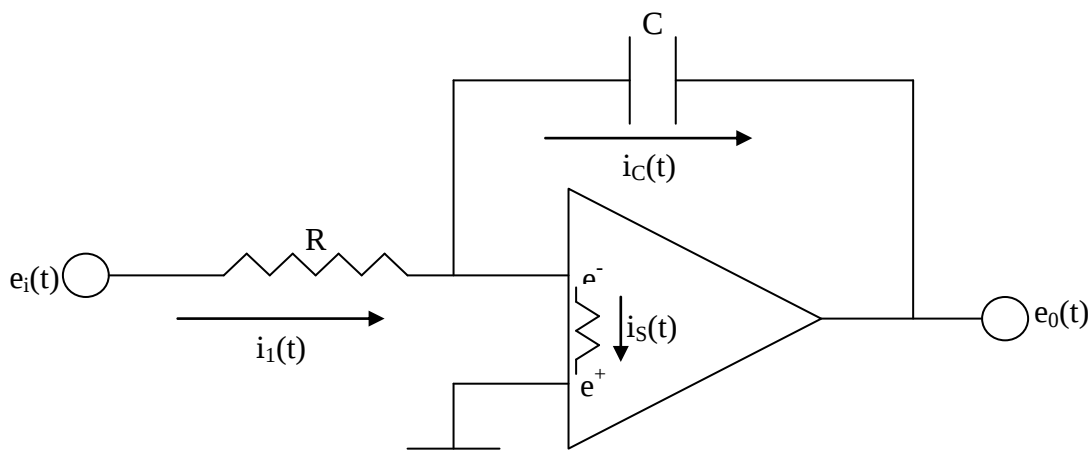
γ) Αρμονική απόκριση

Για την διερεύνηση της αρμονικής συμπεριφοράς του αναλογικού ρυθμιστή P εφαρμόζουμε στην είσοδο του τελεστικού ενισχυτή ημιτονική τάση $u_1 = U_1 \eta \mu \omega t$ με σταθερό πλάτος $U_{1p-p} = 1V$ και συχνότητας από 10Hz έως 10 KHz.

f(Hz)	10	100	1.000	10.000
$U_1(U_{p-p})$				
$U_2(U_{p-p})$				

Να βρείτε εάν το σήμα εξόδου παρουσιάζει παραμόρφωση μετά από κάποια συχνότητα.

1.2.3 Ολοκληρωτής



Θεωρούμε τις αρχικές συνθήκες μηδενικές.

❖ Λύση με ολοκληρωδιαφορική εξίσωση

Εφαρμόζουμε τον 2^ο κανόνα του Kirchhoff

$$i_1(t) = i_C(t) + i_s(t) \xrightarrow{i_s(t)=0} i_1(t) = i_C(t) \quad (1)$$

$$i_1(t) = \frac{e_i(t) - e^-}{R} \Rightarrow i_1(t) = \frac{e_i(t)}{R}$$

$$i_C(t) = \frac{dq}{dt} \xrightarrow{q=CU} i_C(t) = \frac{Cd(e^- - e_o(t))}{dt} \Rightarrow i_C(t) = -\frac{Cde_o(t)}{dt}$$

Η συνάρτηση (1) γίνεται

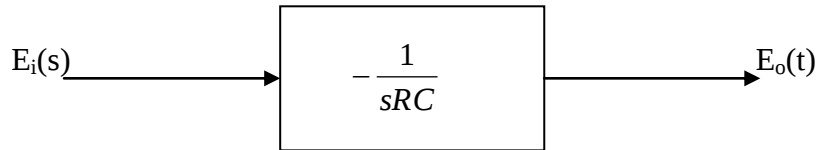
$$\frac{e_i(t)}{R} = -\frac{Cde_o(t)}{dt} \Rightarrow -RCde_o(t) = e_i(t)dt \Rightarrow de_o(t) = -\frac{1}{RC}e_i(t)dt \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{ολοκληρώνουμε}} \int de_o(t) = \int -\frac{1}{RC}e_i(t)dt + E_0 \Rightarrow e_o(t) = -\frac{1}{RC} \int e_i(t)dt + E_0 \Rightarrow$$

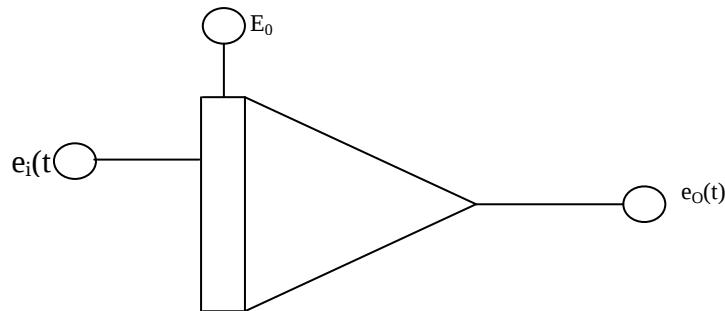
$$\Rightarrow e_o(t) = -\left[\frac{1}{RC} \int e_i(t)dt - E_0 \right]$$

❖ Συνάρτηση μεταφοράς

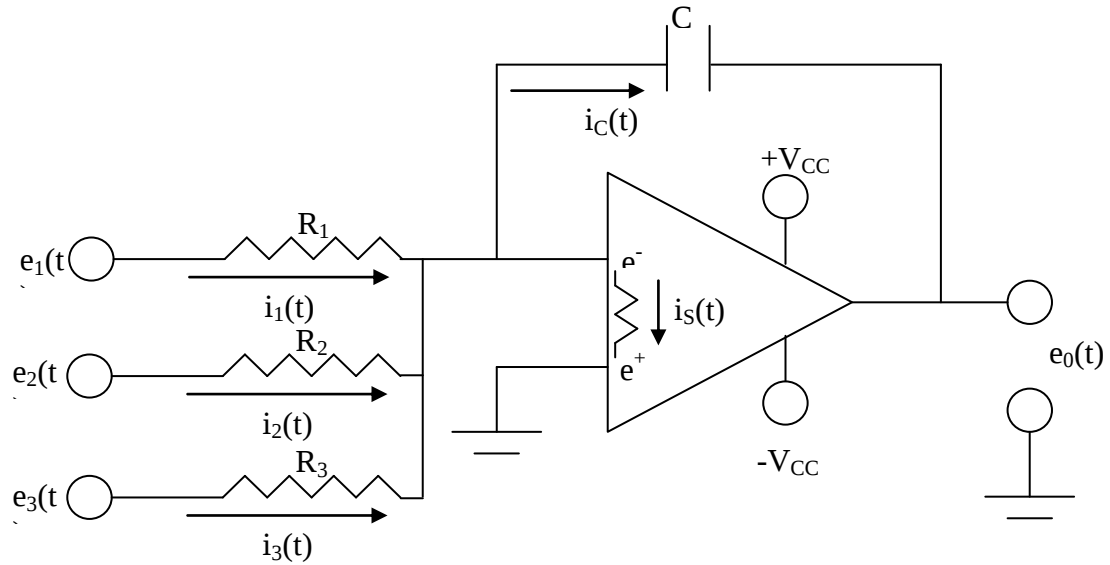
$$\begin{aligned}
 i_i(t) &= i_s(t) + i_c(t) \xRightarrow{i_s(t)=0} i_i(t) = i_c(t) \Rightarrow \frac{e_i(t) - e^-}{R} = \frac{e^- - e_0(t)}{X_C} \xRightarrow{e^- = e^+ = 0} \\
 &\Rightarrow \frac{e_i(t)}{R} = \frac{-e_0(t)}{X_C} \Rightarrow \frac{e_i(t)}{R} = \frac{-e_0(t)}{\frac{1}{j\omega C}} \Rightarrow \frac{e_i(t)}{R} = -j\omega C e_0(t) \xRightarrow{\text{εφαρμόζουμε Laplace}} \\
 &\Rightarrow L\left\{\frac{e_i(t)}{R}\right\} = L\{-j\omega C e_0(t)\} \Rightarrow \frac{E_i(s)}{R} = -sC E_0(s) \Rightarrow \frac{E_0(s)}{E_i(s)} = -\frac{1}{sRC}
 \end{aligned}$$



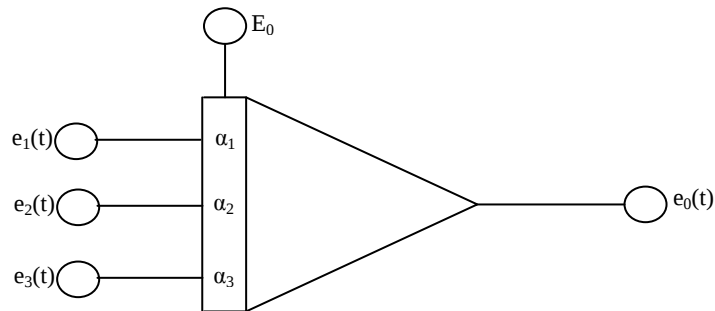
$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{E_0(s)}{E_i(s)} = -\frac{1}{sRC} \Rightarrow E_i(s) = -sRC E_0(s) \xRightarrow{\text{εφαρμόζουμε αντιστροφή Laplace}} \\
 &\Rightarrow e_i(t) = -RC \frac{de_0(t)}{dt} \Rightarrow e_i(t) dt = -RC de_0(t) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow de_0(t) = -\frac{1}{RC} e_i(t) dt \xRightarrow{\text{ολοκληρώνουμε}} \int de_0(t) = \int -\frac{1}{RC} e_i(t) dt + E_o \Rightarrow \\
 &\Rightarrow e_0(t) = -\frac{1}{RC} \int e_i(t) dt + E_o \Rightarrow e_0(t) = -\left[\frac{1}{RC} \int e_i(t) dt - E_o \right]
 \end{aligned}$$



Όταν έχουμε παραπάνω από μία διέγερση:



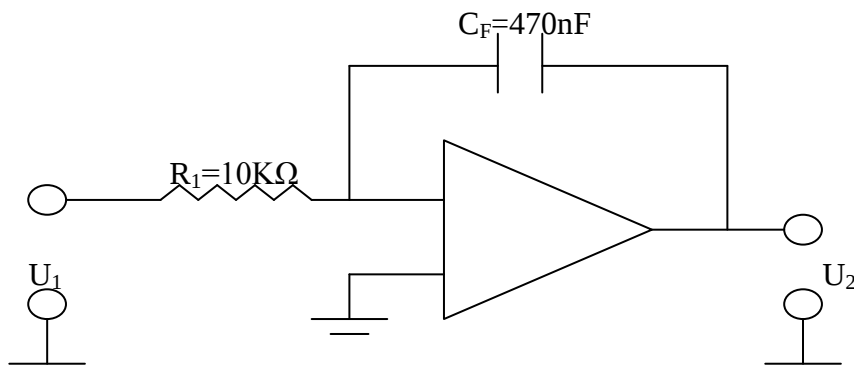
$$e_o(t) = -\left[a_1 \int e_1(t) dt + a_2 \int e_2(t) dt + a_3 \int e_3(t) dt - E_0 \right]$$

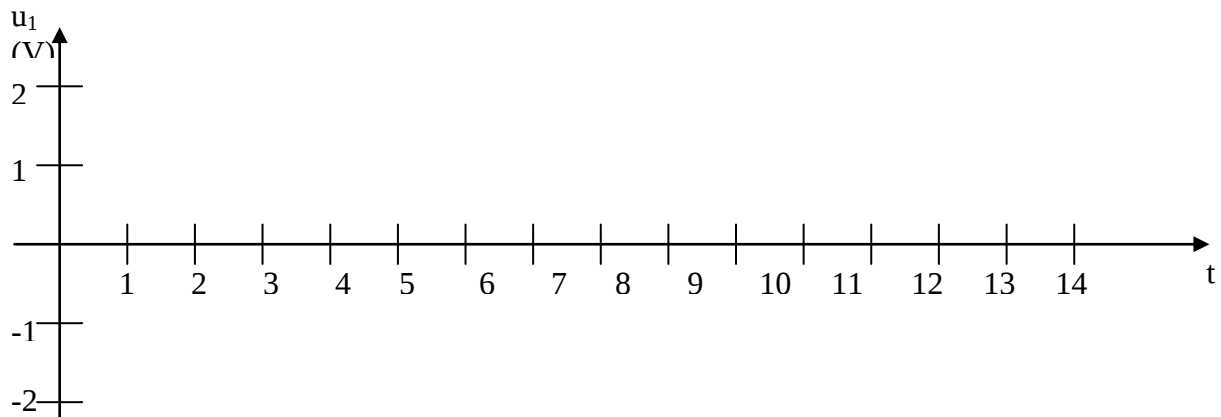
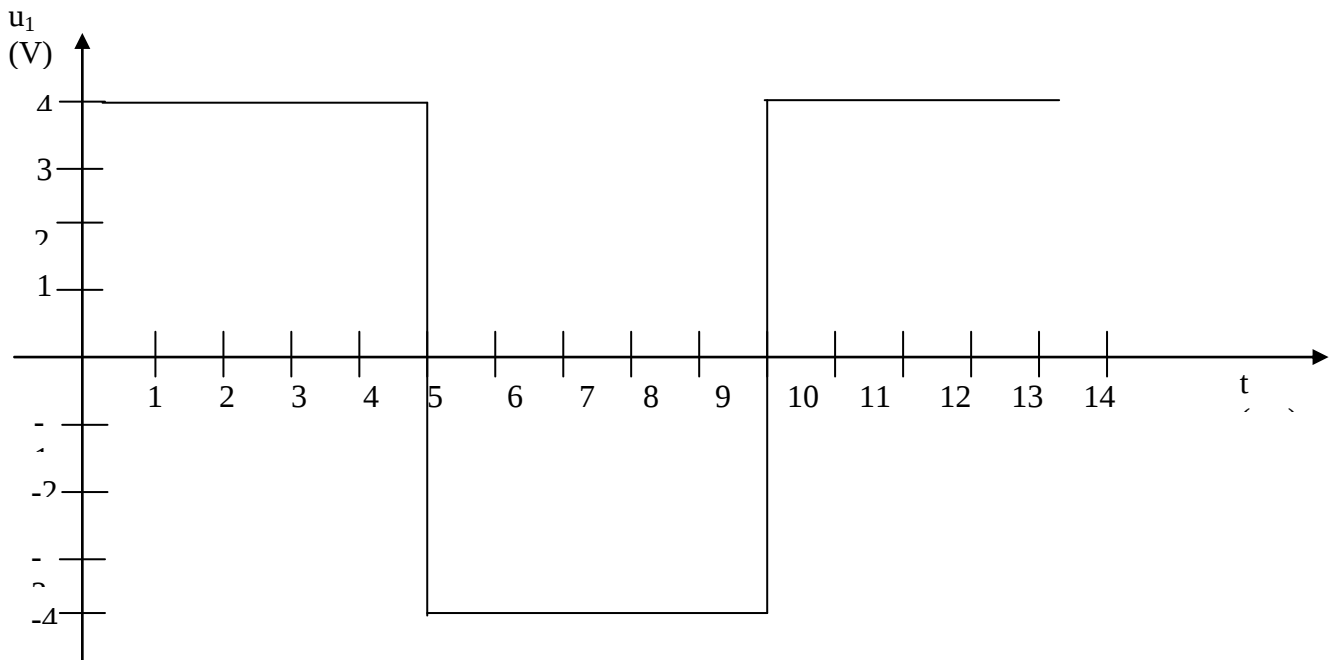


Άσκηση

α) Χρονική απόκριση

Να μελετηθεί η χρονική απόκριση του ολοκληρωτή στον παλμογράφο με τετραγωνικό παλμό εισόδου u_1 ως προς το μηδέν, πλάτους $8V_{p-p}$ και συχνότητας 100Hz.





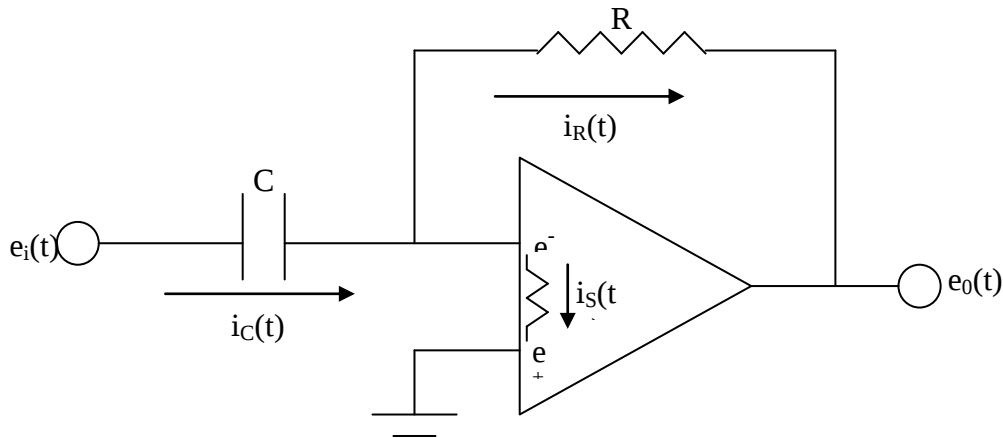
γ) Αρμονική απόκριση

Για την διερεύνηση της αρμονικής συμπεριφοράς του ολοκληρωτική εφαρμόζουμε στην είσοδο του τελεστικού ενισχυτή ημιτονική τάση $u_1(t) = \frac{U_{p-p}}{2\sqrt{2}} \eta \mu \omega t$ με σταθερό πλάτος $U_{1p-p} = 8 \text{ } U_{p-p}$ και συχνότητας από 10Hz έως 10 KHz.

f(Hz)	10	100	1.000	10.000
U ₁ (U _{p-p})	8	8	8	8
U ₂ (U _{p-p})				

Να βρείτε εάν το σήμα εξόδου παρουσιάζει παραμόρφωση μετά από κάποια συχνότητα.

1.2.4 Διαφοριστής



Θεωρούμε τις αρχικές συνθήκες μηδενικές.

❖ Λύση με ολοκληρωδιαφορική εξίσωση

Εφαρμόζουμε τον 2^ο **κανόνα του Kirchhoff**

$$i_c(t) = i_R(t) + i_s(t) \stackrel{i_s(t)=0}{\Rightarrow} i_c(t) = i_R(t) \quad (1)$$

$$i_c(t) = \frac{dq}{dt} \stackrel{q=CV}{\Rightarrow} i_c(t) = \frac{Cd(e_i(t) - e^-)}{dt} \Rightarrow i_c(t) = \frac{Cde_i(t)}{dt}$$

$$i_R(t) = \frac{e^- - e_o(t)}{dt} \Rightarrow i_R(t) = -\frac{e_o(t)}{dt}$$

Η συνάρτηση (1) γίνεται

$$-\frac{e_o(t)}{R} = \frac{Cde_i(t)}{dt} \Rightarrow e_o(t) = -CR \frac{de_i(t)}{dt}$$

❖ Συνάρτηση μεταφοράς

$$i_c(t) = i_R(t) + i_s(t) \stackrel{i_s(t)=0}{\Rightarrow} i_c(t) = i_R(t) \Rightarrow \frac{e_i(t) - e^-}{X_C} = \frac{e^- - e_o(t)}{R} \stackrel{e^- = e^+ = 0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{e_i(t)}{X_C} = -\frac{e_o(t)}{R} \Rightarrow \frac{e_i(t)}{\frac{1}{j\omega C}} = -\frac{e_o(t)}{R} \Rightarrow j\omega C e_i(t) = -\frac{e_o(t)}{R} \stackrel{\text{εφαρμόζουμε Laplace}}{\Rightarrow}$$

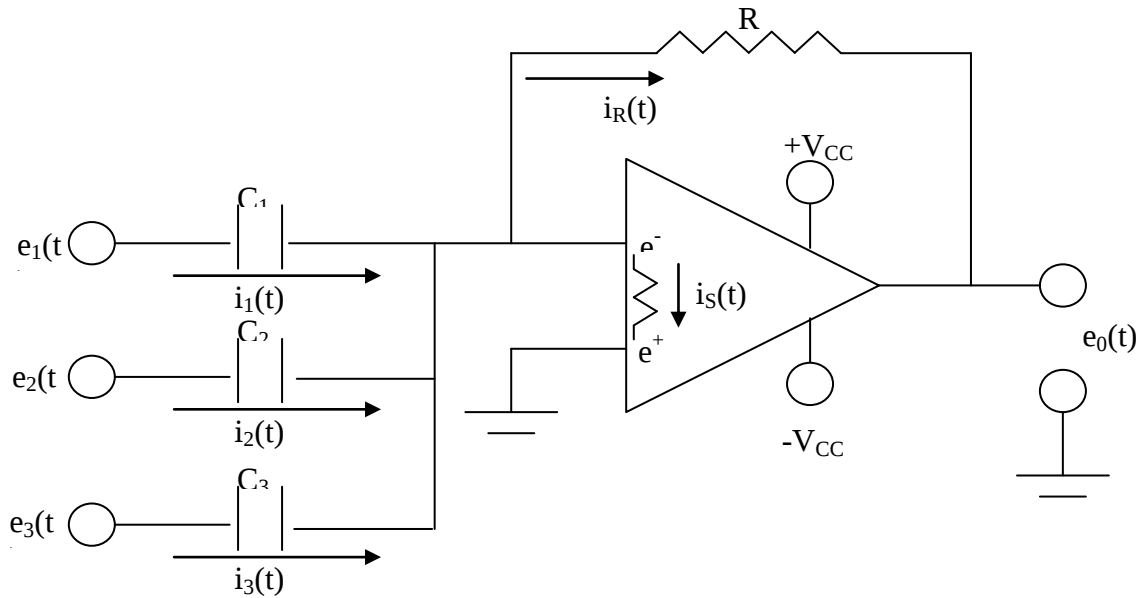
$$\Rightarrow L\{j\omega C e_i(t)\} = L\left\{-\frac{e_o(t)}{R}\right\} \Rightarrow sC E_i(s) = -\frac{E_o(s)}{R} \Rightarrow \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -sRC$$



$$G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -sRC \Rightarrow E_o(s) = -sCRE_i(s) \quad \begin{matrix} \text{εφαρμόζουμε} \\ \text{αντίστροφο Laplace} \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e_o(t) = -RC \frac{de_i(t)}{dt}$$

Όταν έχουμε παραπάνω από μία διέγερση:



$$e_o(t) = - \left[RC_1 \frac{de_1(t)}{dt} + RC_2 \frac{de_2(t)}{dt} + RC_3 \frac{de_3(t)}{dt} \right]$$

Πείραμα 3^ο: Χρήση τελεστικών ενισχυτών στην προσομοίωση συστημάτων

Έστω η παρακάτω γραμμική διαφορική εξίσωση 1^{ης} τάξης $\frac{dy}{dt} + \frac{A}{r}y(t) = Au(t)$. Η επίλυσή της μπορεί να γίνει με προσομοίωση σε αναλογικό υπολογιστή.

1.2.5 Περίπτωση 1^η: Γραμμική διαφορική εξίσωση 1ης τάξης ($y'(t)$) Ομογενής με αρχικές συνθήκες διάφορες του μηδενός

$$y'(t) + 4y(t) = 0 \quad y(0) = 10 \quad \text{ή} \quad \frac{dy}{dt} + 4y(t) = 0 \quad y(0) = 10 \quad \text{ή} \\ \dot{y}(t) + 4y(t) = 0 \quad y(0) = 10$$

Για να προσδιορίσουμε το άγνωστο $y'(t)$ ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

1^ο Βήμα: Εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Laplace

$$L\{y'(t)\} + L\{4y(t)\} = L\{0\} \Rightarrow \{sy(s) - y(0)\} + \{4y(s)\} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow sy(s) - 10 + 4y(s) = 0 \Rightarrow sy(s) + 4y(s) = 10 \Rightarrow \\ \Rightarrow (s + 4)y(s) = 10 \Rightarrow y(s) = \frac{10}{s + 4} \Rightarrow y(s) = 10 \frac{1}{s - (-4)}$$

από την διαφορική εξίσωση προέκυψε αλγεβρική εξίσωση με άγνωστο το $y(s)$

2^ο Βήμα: Αφού έχουμε εξαντλήσει τις ενέργειες που μπορούμε να κάνουμε εφαρμόζουμε αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace (βασιζόμενοι στο $L^{-1}\left\{\frac{1}{s - a}\right\} = e^{at}$)

$$\text{οπότε έχουμε: } L^{-1}\{y(s)\} = L^{-1}\left\{10 \frac{1}{s - (-4)}\right\} \Rightarrow y(t) = 10e^{-4t}$$

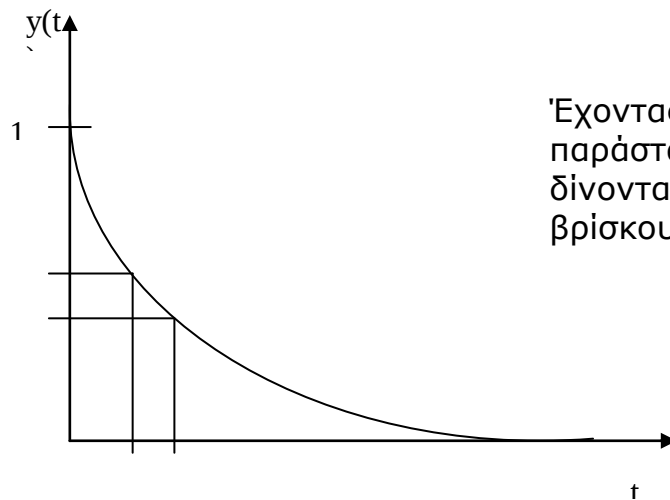
Για να βρούμε την γραφική παράσταση δίνουμε ακραίες τιμές στον χρόνο t

$$\text{για } t = 0 \Rightarrow y(0) = 10$$

$$\text{για } t = \infty \Rightarrow y(\infty) \cong 0$$

Σταθερό το σύστημα αρχική τιμή 10 τελική τιμή περίπου 0.

Η γραφική παράσταση της $y(t)$

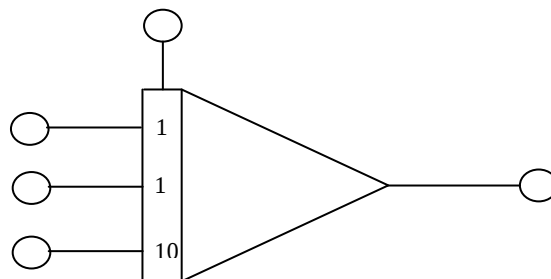


Έχοντας την γραφική παράσταση μπορούμε δίνοντας τιμές στο χρόνο t να βρίσκουμε την τιμή της

Για την επίλυση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης όπως αναφέραμε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προσομοίωση με αναλογικό υπολογιστή.

1° Βήμα: Ο βαθμός της διαφορικής εξίσωσης προσδιορίζει τον αριθμό των ολοκληρωτών που θα χρησιμοποιήσω. Η εξίσωση που έχουμε είναι πρώτου βαθμού οπότε θα χρησιμοποιήσουμε έναν ολοκληρωτή.

Στο εργαστήριο διαθέτουμε έτοιμους ολοκληρωτές τριών εισόδων με συγκεκριμένους συντελεστές ενίσχυσης 1, 1, 10 άρα σχεδιάζουμε αυτούς που διαθέτουμε.



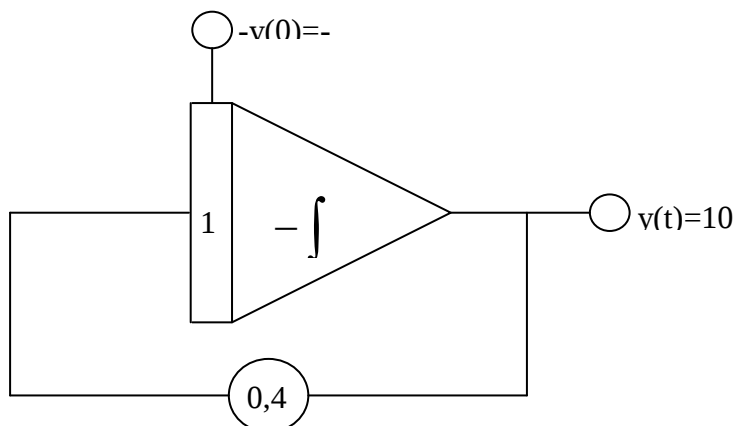
2° Βήμα: Κρατάω την μεγαλύτερη παράγωγο στο πρώτο μέλος και όλους τους υπόλοιπους όρους τους μεταφέρω στο δεύτερο μέλος. Αν υπάρχει συντελεστής γνωστός στην μεγαλύτερη παράγωγο διαιρώ όλους τους όρους με τον συντελεστή έτσι ώστε πάντα στο πρώτο μέρος να έχουμε μόνο την μεγαλύτερη παράγωγο στο αριστερό μέλος.

$$y'(t) = -4y(t)$$

Δημιούργησα δηλαδή μία ισότητα. Τι λέει λοιπόν αυτή η ισότητα **«το πρώτο μέλος είναι ίσο με το δεύτερο»**. Σκοπός μου είναι να δημιουργήσω το δεύτερο μέλος της ισότητας. Στην είσοδο του ολοκληρωτή να εμφανιστεί το δεύτερο μέλος της ισότητας που προέκυψε. Με δεδομένο ότι στο αριστερό μέρος θα έχουμε το αριστερό μέρος της ισότητας που δημιουργήσαμε $y'(t)$ στην έξοδο του ολοκληρωτή θα εμφανίζεται το $-y(t)$. Με δεδομένο ότι στην έξοδο μου έχω το $-y(t)$ θέλω να δημιουργήσω το $-4y(t)$. Μπορώ

λοιπόν να οδηγήσω το $-y(t)$ σε έναν ενισχυτή με λόγο ενίσχυσης 0,4 στην είσοδο με συντελεστή ενίσχυσης 10.

Διευκρίνιση: Θα πρέπει να λαμβάνουμε υπόψη ότι λόγω της αναστροφής πρόσημου των τελεστικών ενισχυτών οι αρχικές συνθήκες θα πρέπει να τοποθετούνται με αντίθετο πρόσημο απ' αυτές που ορίζει η συνάρτηση.



1.2.6 Περίπτωση 2^η: Άλλη μορφή διαφορικής εξίσωσης 1ης τάξης μη ομογενής με αρχικές συνθήκες διάφορες του μηδενός

$$y'(t) + 4y(t) = 10 \quad y(0) = 10$$

Εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Laplace

$$L\{y'(t)\} + L\{4y(t)\} = L\{10\} \Rightarrow \{sy(s) - y(0)\} + \{4y(s)\} = \frac{10}{s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow sy(s) - 10 + 4y(s) = \frac{10}{s} \Rightarrow sy(s) + 4y(s) = \frac{10}{s} + 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (s + 4)y(s) = \frac{10 + 10s}{s} \Rightarrow y(s) = \frac{10 + 10s}{s(s + 4)}$$

$$y(s) = \frac{10 + 10s}{s(s + 4)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s + 4}$$

Για την εύρεση των K_1 , K_2 μπορούμε να εφαρμόσουμε 2 μεθόδους:

❖ 1^η Μέθοδος (Όρια)

$$K_1 = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{10s + 10}{s(s + 4)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10s + 10}{(s + 4)} = 2.5$$

$$K_2 = \lim_{s \rightarrow -4} (s + 4) \frac{10s + 10}{s(s + 4)} = \lim_{s \rightarrow -4} \frac{10s + 10}{s} = 7.5$$

❖ 2η Μέθοδος (Αλγεβρική)

Αν έχουμε δύο πολυώνυμα οποιοδήποτε βαθμού ταυτόσημα μπορούμε να εξισώσουμε τους συντελεστές ομοίων όρων και στα δύο μέρη.

$$\alpha_3 \chi^3 + \alpha_2 \chi^2 + \alpha_1 \chi + \alpha_o = \beta_3 \chi^3 - \beta_2 \chi^2 + \beta_1 \chi - \beta_o \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_3 = \beta_3, \alpha_2 = -\beta_2, \alpha_1 = \beta_1, \alpha_o = -\beta_o$$

$$y(s) = \frac{10+10s}{s(s+4)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+4} \Rightarrow y(s) = \frac{10+10s}{s(s+4)} = \frac{K_1(s+4)}{s(s+4)} + \frac{sK_2}{s(s+4)} \Rightarrow$$

$$y(s) = \frac{10+10s}{s(s+4)} = \frac{(s+4)K_1 + sK_2}{s(s+4)} \Rightarrow 10+10s = (s+4)K_1 + sK_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10+10s = sK_1 + 4K_1 + sK_2 \Rightarrow 10+10s = 4K_1 + s(K_1 + K_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 10 = 4K_1 \\ 10 = K_1 + K_2 \end{array} \right| \Rightarrow K_1 = 2.5, \quad K_2 = 7.5$$

Αντικαθιστούμε τις τιμές των K_1, K_2 οπότε έχουμε

$$y(s) = \frac{10+10s}{s(s+4)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+4} = \frac{2.5}{s} + \frac{7.5}{s+4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(s) = \frac{2.5}{s} + \frac{7.5}{s-(-4)}$$

Εφαρμόζουμε αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace

$$L^{-1}\{y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{2.5}{s}\right\} + L^{-1}\left\{7.5 \frac{1}{s-(-4)}\right\} \Rightarrow y(t) = 2.5 + 7.5e^{-4t}$$

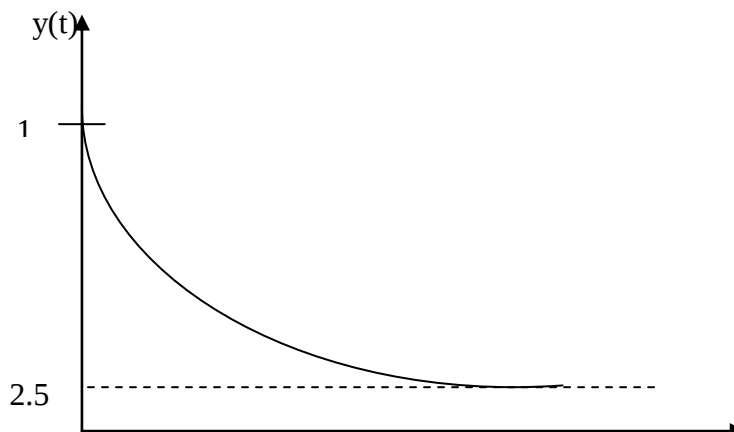
Για να φτιάξουμε την γραφική παράσταση δίνουμε ακραίες τιμές στο t .

$$\text{για } t = 0 \Rightarrow y(0) = 10$$

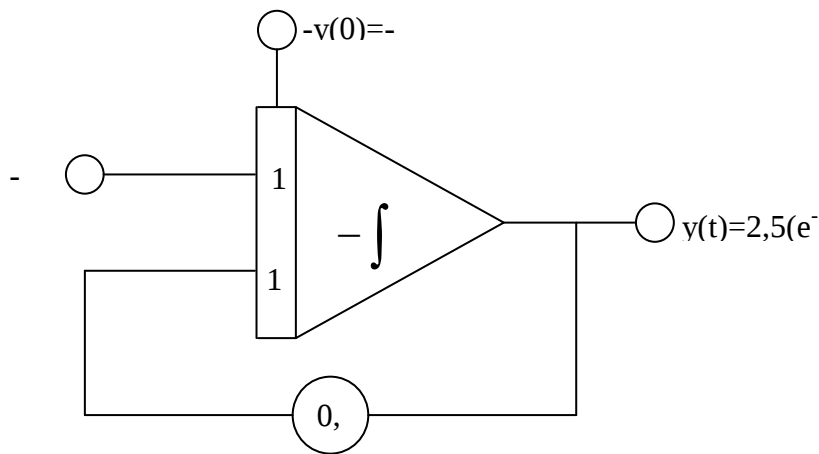
$$\text{για } t = \infty \Rightarrow y(\infty) \cong 2.5$$

Σταθερό το σύστημα αρχική τιμή 10 τελική τιμή περίπου 2.5.

Η γραφική παράσταση της $y(t)$



Ακολουθώντας την προηγούμενη διαδικασία προσομοίωσης προκύπτει το παρακάτω διάγραμμα. Η μόνη διαφοροποίηση έγκειται στο ότι έχουμε είσοδο $-10V$ που οφείλεται στο ότι η εξίσωση είναι μη ομογενής άρα έχει εξωτερική διέγερση.



1.2.7 Περίπτωση 3^η: Άλλο παράδειγμα μη ομογενής διαφορικής εξίσωσης 1ης τάξης με αρχικές συνθήκες μηδέν

$$y'(t) + 4y(t) = 10 \quad y(0) = 0$$

Εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Laplace

$$L\{y'(t)\} + L\{4y(t)\} = L\{10\} \Rightarrow \{sy(s) - y(0)\} + \{4y(s)\} = \frac{10}{s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow sy(s) - 10 + 4y(s) = \frac{10}{s} \Rightarrow sy(s) + 4y(s) = \frac{10}{s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (s + 4)y(s) = \frac{10}{s} \Rightarrow y(s) = \frac{10}{s(s + 4)}$$

$$y(s) = \frac{10}{s(s + 4)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s + 4}$$

Για τον προσδιορισμό των K_1 , K_2 μπορούμε να εφαρμόσουμε μία από τις δύο μεθόδους:

$$K_1 = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{10}{s(s + 4)} = \frac{10}{4} = 2.5$$

$$K_2 = \lim_{s \rightarrow -4} (s + 4) \frac{10}{s(s + 4)} = \frac{10}{-4} = -2.5$$

Αντικαθιστούμε τις τιμές των K_1 , K_2 οπότε έχουμε

$$y(s) = \frac{10}{s(s + 4)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s + 4} = \frac{2.5}{s} - \frac{2.5}{s + 4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(s) = \frac{2.5}{s} - 2.5 \frac{1}{s - (-4)}$$

Εφαρμόζουμε αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace

$$L^{-1}\{y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{2.5}{s}\right\} + L^{-1}\left\{-2.5 \frac{1}{s - (-4)}\right\} \Rightarrow y(t) = 2.5 - 2.5e^{-4t}$$

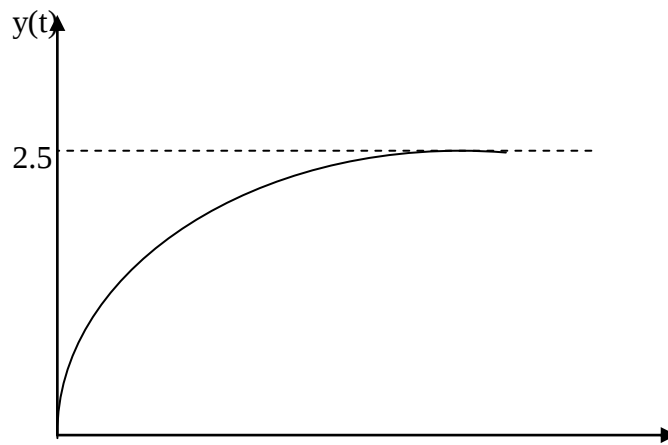
Για κάνουμε την γραφική παράσταση δίνουμε ακραίες τιμές στο t .

για $t = 0 \Rightarrow y(0) = 0$

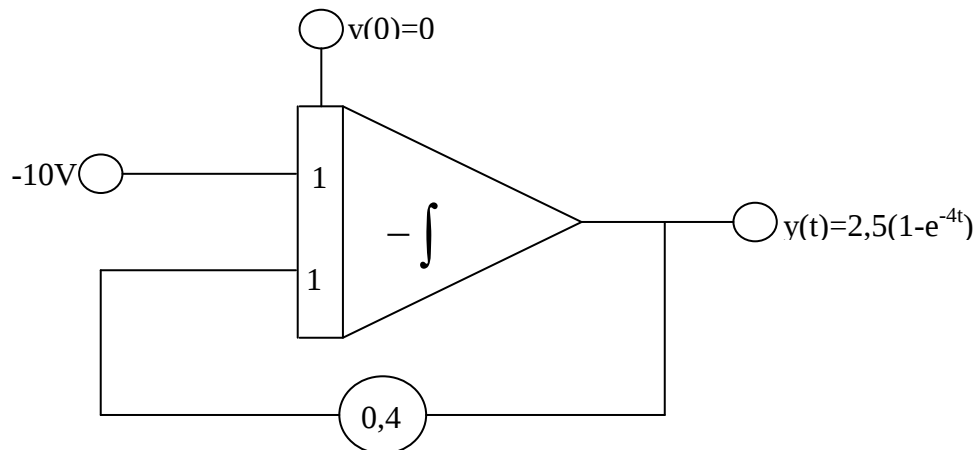
για $t = \infty \Rightarrow y(\infty) \cong 2.5$

Σταθερό το σύστημα αρχική τιμή 0 τελική τιμή περίπου 2.5.

Η γραφική παράσταση της $y(t)$



Ακολουθώντας την προηγούμενη διαδικασία προσομοίωσης προκύπτει το παρακάτω διάγραμμα.



Άσκηση: Να γίνει προσομοίωση των παραπάνω κυκλωμάτων στον αναλογικό υπολογιστή, να καταγραφούν οι καμπύλες της $y(t)$ στον παλμογράφο και να γίνει σύγκριση των θεωρητικών και πειραματικών αποτελεσμάτων.

1.2.8 Περίπτωση 4^η: Γραμμική διαφορική εξίσωση 2ης τάξης ($y''(t)$) Ομογενής

$$y''(t) + 25y(t) = 0 \quad y'(0) = 2 \quad y(0) = 0$$

1ο Βήμα: Εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Laplace

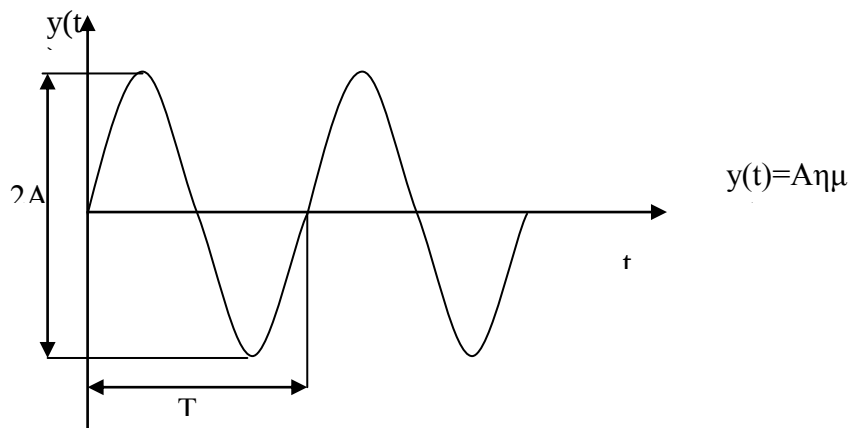
$$\begin{aligned} L\{y''(t)\} + L\{25y(t)\} &= L\{0\} \Rightarrow \{s^2 y(s) - sy(0) - y'(0)\} + \{25y(s)\} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow s^2 y(s) - 2 + 25y(s) &= 0 \Rightarrow s^2 y(s) + 25y(s) = 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow (s^2 + 25)y(s) &= 2 \Rightarrow y(s) = \frac{2}{s^2 + 25} \Rightarrow y(s) = 2 \frac{1}{s^2 + 5^2} \end{aligned}$$

από την διαφορική εξίσωση προέκυψε αλγεβρική εξίσωση με άγνωστο το $y(s)$.

2ο Βήμα: Αφού έχουμε εξαντλήσει τις ενέργειες που μπορούμε να κάνουμε εφαρμόζουμε αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace (βασιζόμενοι στο $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + a^2}\right\} = \frac{1}{a} \sin at$)

$$\text{οπότε έχουμε: } L^{-1}\{y(s)\} = L^{-1}\left\{2 \frac{1}{s^2 + 5^2}\right\} \Leftrightarrow y(t) = \frac{2}{5} \sin 5t$$

Η γραφική παράσταση της $y(t)$



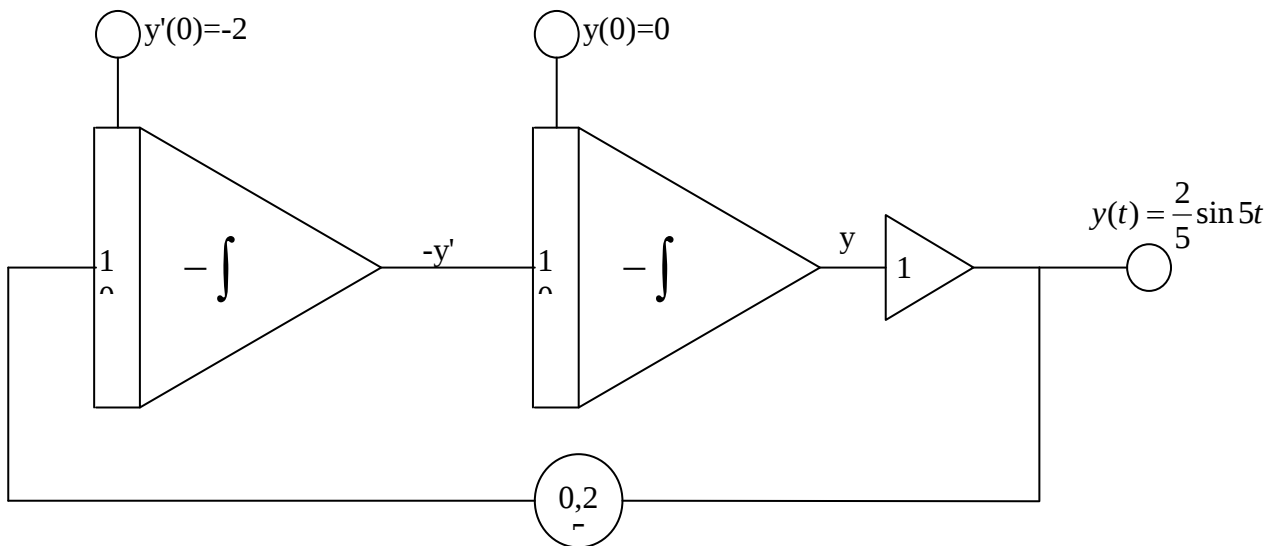
$$2A = \frac{2}{5} \Leftrightarrow 2A = 0,4$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \cdot 3,14}{5} \Leftrightarrow T = 1,256 \text{ rad / sec}$$

Για την επίλυση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης όπως αναφέραμε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προσομοίωση με αναλογικό υπολογιστή. Τα βήματα που πρέπει να ακολουθηθούν είναι:

- ❖ Ο βαθμός της μεγαλύτερης παραγώγου προσδιορίζει τον αριθμό των ολοκληρωτών που θα χρησιμοποιήσουμε. Η διαφορική εξίσωση που έχουμε να επιλύσουμε είναι δευτέρου βαθμού οπότε θα χρησιμοποιήσουμε δύο ολοκληρωτές.
- ❖ Κρατάω στο πρώτο μέλος τη μεγαλύτερη παράγωγο και όλα τα υπόλοιπα τα μεταφέρω στο δεύτερο μέλος στο παράδειγμά μας $y''(t) = -25y(t)$. Στόχος μου είναι να δημιουργήσω το δεύτερο μέλος της ισότητας που προέκυψε. Αυτό σημαίνει ότι σε μία από τις εισόδους του πρώτου ολοκληρωτή μου να εμφανιστεί το δεύτερο μέλος. Στο αριστερό μέρος θα έχω το αριστερό μέρος της ισότητας $y''(t)$ και θα πάρω $-y'(t)$. Αν αυτό το οδηγήσω στον δεύτερο ολοκληρωτή θα πάρω $+y(t)$. Παρατηρούμε ότι εμείς θέλουμε $-y(t)$ άρα θα χρησιμοποιήσουμε και ένα αναστροφέα προσήμου οπότε παίρνουμε το $-y(t)$. Εμείς όμως θέλουμε $-25y(t)$, το $-y(t)$ το δημιουργήσαμε στην έξοδο του αναστροφέα προσήμου άρα αν οδηγήσουμε την έξοδο του αναστροφέα με ένα συντελεστή 0,25 στην είσοδο x10 του πρώτου ολοκληρωτή θα πάρουμε 2,5 και αυτό θα το οδηγήσουμε στην είσοδο x10 του δεύτερου ολοκληρωτή και θα πάρουμε το

25. Συμμετέχουν τρεις τελεστικοί ενισχυτές περιττός αριθμός άρα ότι δίνω με αντίθετο πρόσημο θα το πάρω. Για να ολοκληρώσω την διαδικασία θα πρέπει να φέρω και τις αρχικές συνθήκες. Το $y'(0)$ θα το φέρουμε στον πρώτο αθροιστή ολοκληρωτή γιατί εδώ είναι η πρώτη παράγωγος με πρόσημο $(-)$ γιατί στο σύστημα μου συμμετέχει περιττός αριθμός αθροιστών ολοκληρωτών (3) άρα -2 . Το μηδέν δεν έχει πολικότητα αν όμως αντί για μηδέν είχα 1 θα παρατηρούσα ότι συμμετέχουν 2 αθροιστές - ολοκληρωτές (άρτιος αριθμός) άρα το πρόσημο θα παρέμενε το ίδιο.



Κεφάλαιο 4

- ❖ **Σερβομηχανισμός MS150**
- ❖ **Διερεύνηση χαρακτηριστικών Σερβοκινητήρα**
- ❖ **Έλεγχος ταχύτητας με ανοιχτό βρόγχο**
- ❖ **Έλεγχος ταχύτητας με κλειστό βρόγχο**
- ❖ **Κύκλωμα ελέγχου ταχύτητας**

Κεφάλαιο 4

4.1 Σερβομηχανισμός MS150–	54
4.1.1 Γενικά	54
4.1.2 Μέθοδοι απεικόνισης αποτελεσμάτων	54
4.2 Διερεύνηση χαρακτηριστικών Σερβοκινητήρα	55
4.2.1 Σερβοκινητήρας MS 150	55
4.3 Έλεγχος ταχύτητας με ανοιχτό βρόγχο	57
4.3.1 Ανάλυση λειτουργίας κατά τον έλεγχο οπλισμού(A)	57
4.3.2 Ανάλυση λειτουργίας κατά τον έλεγχο πεδίου (F)	58
4.4 Έλεγχος ταχύτητας με κλειστό βρόγχο	59
4.5 Κύκλωμα ελέγχου ταχύτητας	61
4.5.1 Ιδιότητες τελεστικού ενισχυτή ΟΥ150Α	61
4.5.2 Ιδιότητες προενισχυτή ΡΑ150C	63
4.5.3 Έλεγχος θέσης συστήματος	65
4.5.4 Μείωση της υπερύψωσης της και του χρόνου αποκατάστασης με ανάδραση ταχύτητας	67

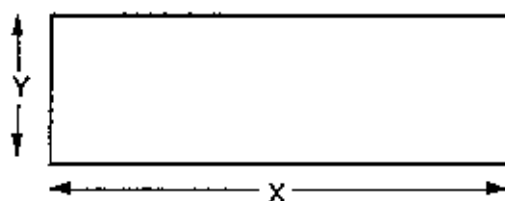
4.1 Σερβομηχανισμός MS150

4.1.1 Γενικά

Ο σερβομηχανισμός MS150 είναι κατάλληλος για μελέτες συστημάτων ανοιχτό ή κλειστού βρόγχου. Αποτελείται από ένα τροφοδοτικό PS150E, έναν ενισχυτή SA150D, μια ταχογεννήτρια MT150F, ποτενσιόμετρα AU150B, έναν τελεστικό ενισχυτή ΟΥ150Α, μια πέδη LU150L (μονάδα φορτίου), μια προενισχυτική μονάδα PA150C και μια μονάδα σερβοκινητήρα / ταχογεννήτρια MT150F. Στον καινούργιο εξοπλισμό η μονάδα κινητήρα και ταχογεννήτριας αναφέρονται με κωδικούς DCM150F για τον κινητήρα και GT150X για την ταχογεννήτρια και τον μειωτήρα στροφών επειδή είναι δύο διαφορετικές συσκευές σε αντίθεση με τον παλιό εξοπλισμό όπου ο κινητήρας, η ταχογεννήτρια και ο μειωτήρας στροφών αποτελούν μια ενιαία συσκευή.

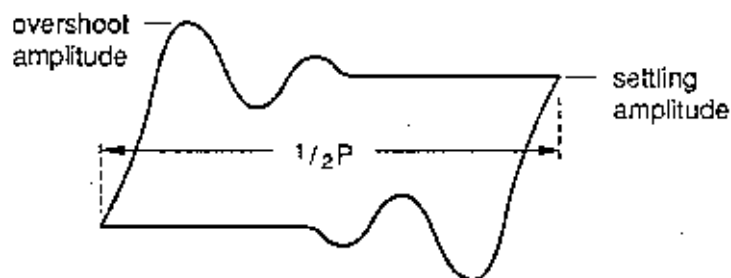
4.1.2 Μέθοδοι απεικόνισης αποτελεσμάτων

Εάν μια συνάρτηση πριονωτή εφαρμοστεί στην είσοδο του παλμογράφου για τον άξονα X και μια περιοδική τετραγωνική συνάρτηση ίδιας συχνότητας εφαρμοστεί στον άξονα Y θα πάρουμε μια απεικόνιση όπως αυτή της εικόνα 4.1.



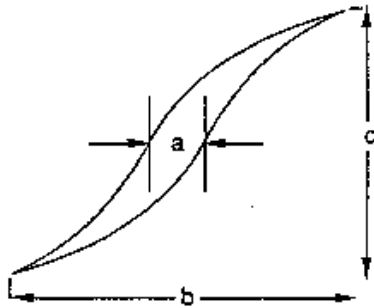
Εικόνα 4.1

Το Y θα είναι ίσο με την τιμή της εισόδου (από κορυφή σε κορυφή) και το X θα είναι ίσο σε χρόνο με το μισό της περιόδου του πριονωτού παλμού. Η απόκριση του συστήματος σε τετραγωνική κυματομορφή (βαθμωτή συνάρτηση) εμφανίζεται όπως στην εικόνα 4.2 από την οποία μπορούμε να πάρουμε άμεσα εύρος, χρόνο ανύψωσης, συχνότητα ταλάντωσης, επί % ποσοστό υπερύψωσης κ.λ.π.



Εικόνα 4.2

Εάν εφαρμοστεί στο σύστημα μια ημιτονική συνάρτηση σε φάση με την πριονωτή και υπάρχει διαφορά φάσης μεταξύ εισόδου και εξόδου αυτό που θα παρατηρήσουμε φαίνεται στην εικόνα 4.3.



Εικόνα 4.3

Η διαφορά φάσης είναι ίση με $\frac{a}{b} \times 90^\circ$ και το εύρος ίσο με c .

4.2 Διερεύνηση χαρακτηριστικών Σερβοκινητήρα

4.2.1 Σερβοκινητήρας MS 150

Είναι ένας ηλεκτρικός κινητήρας μόνιμου μαγνήτη με μεγάλη ροπή εκκίνησης και πολύ μικρή ροπή αδράνειας. Υπάρχουν σερβοκινητήρες AC και DC. Ένα άλλο βασικό χαρακτηριστικό είναι η αντιστροφή της φοράς περιστροφής με αντίθετη τάση εισόδου. Ο βασικότερος όμως λόγος χρησιμοποίησης σερβοκινητήρων στα συστήματα ελέγχου είναι η ευκολία με την οποία ελέγχεται η ταχύτητα τους. Στους μεγάλους dc σερβοκινητήρες το τύλιγμα πεδίου (Field winding) τροφοδοτείται από πηγή σταθερής τάσης, ενώ το κύκλωμα οπλισμού (armature winding) χρησιμοποιείται για έλεγχο της ταχύτητας.

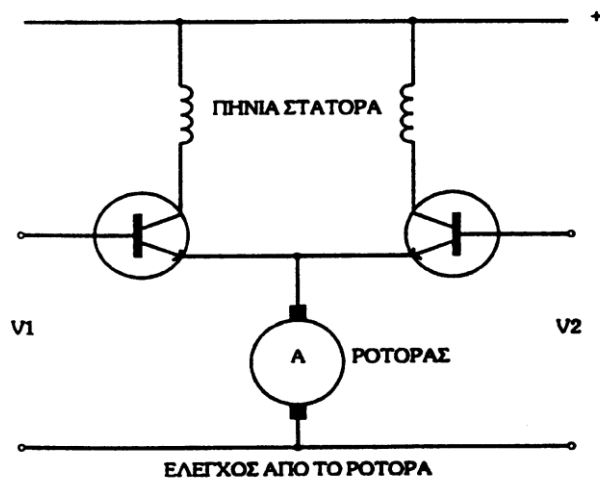
Η αναπτυσσόμενη τότε ροπή είναι:

$$T = K \cdot I_f \cdot I_a$$

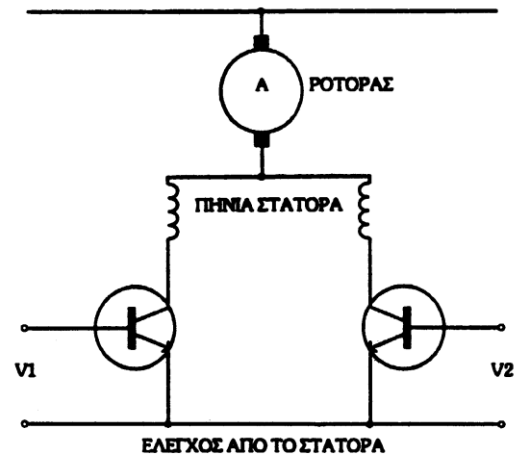
όπου I_f και I_a είναι τα ρεύματα πεδίο και οπλισμού και K η σταθερά του κινητήρα.

Στους μικρούς dc σερβοκινητήρες είναι δυνατόν ο έλεγχος ταχύτητας να γίνει από το τύλιγμα πεδίου. Έτσι έχουμε δύο τρόπους ελέγχου ταχύτητας:

- ❖ **Έλεγχος F:** μεταβαλλόμενη τάση ελέγχου στο πεδίο (στάτη).
- ❖ **Έλεγχος A:** μεταβαλλόμενη τάση ελέγχου στον οπλισμό (δρομέα).
- ❖ Τα αποτελέσματα φαίνονται στα σχήματα που ακολουθούν.

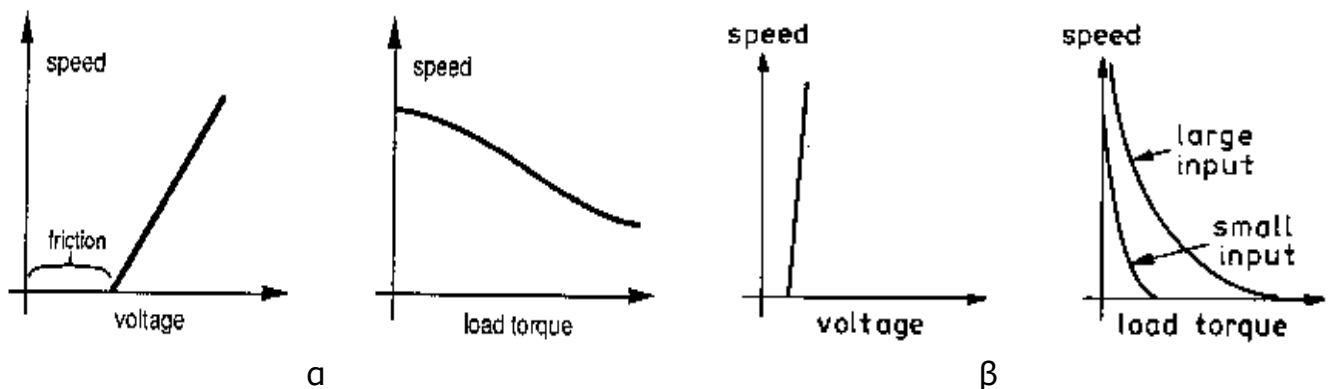


α



β

Εικόνα 4.4



α

β

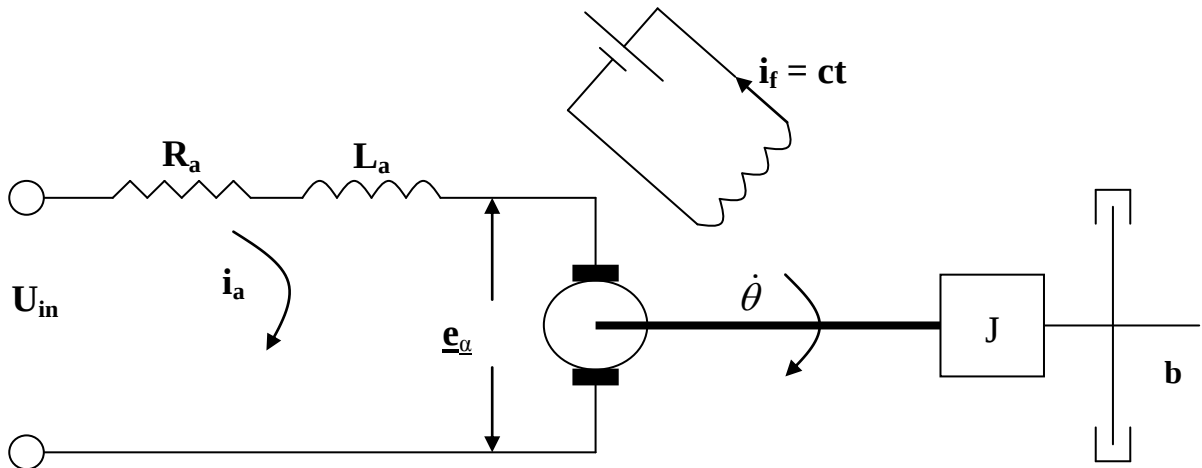
Εικόνα 4.5

Η ενισχυτική βαθμίδα συνήθως αποτελείται από τρανζίστορ ισχύος. Είναι ανάγκη ο κινητήρας να είναι αντιστρεπτός, αυτό γίνεται μέσω δύο συνδεσμολογιών. Στην συνδεσμολογία του σχήματος 4.4α; ο οπλισμός είναι συνδεδεμένος στο κύκλωμα εκπομπού με ένα τύλιγμα πεδίου σε κάθε συλλέκτη. Στην συνδεσμολογία του σχήματος 4.4β; ο οπλισμός είναι συνδεδεμένος στο κύκλωμα του συλλέκτη. Αν τώρα μια θετική τάση εφαρμοστεί στις εισόδους V1 ή V2, θα έχουμε ροή ρεύματος μέσα από το πεδίο και τον οπλισμό και έτσι θα περιστρέφει ο σερβοκινητήρας. Τα πεδία είναι έτσι συνδεδεμένα ώστε η φορά περιστροφής όταν εφαρμόζεται τάση στην είσοδο V1 να είναι αντίθετη από εκείνη που προκύπτει όταν εφαρμοστεί η τάση στην είσοδο V2. Όπως φαίνεται από τις γραφικές παραστάσεις της εικόνας 4.5α η συνδεσμολογία (A οπλισμού) απαιτεί μεγαλύτερη τάση οδήγησης (V1 ή V2) λόγω της ΑΗΕΔ (αντηλεκτρεγερτική δύναμη) σερβοκινητήρα, αλλά είναι προτιμότερη για έλεγχο ταχύτητας, γιατί η συνδεσμολογία (F στάτη) είναι πολύ ευαίσθητη (μεγάλο κέρδος) και μπορεί να οδηγήσει το σύστημα σε ασταθή λειτουργία.

4.3 Έλεγχος ταχύτητας με ανοιχτό βρόγχο

4.3.1 Ανάλυση λειτουργίας κατά τον έλεγχο οπλισμού(A)

Η ροπή του κινητήρα είναι: $T = K \cdot i_a$, όπου K σταθερά. Καθώς περιστρέφεται ο οπλισμός αναπτύσσεται στα άκρα του μια ανηλεκτρεγερτική δύναμη $e_a = K_b \frac{d\theta}{dt} = K_b \dot{\theta}$.



Εικόνα 4.6

Έτσι για το κύκλωμα του οπλισμού θα έχουμε $U_{in} = e_a + i_a \cdot R + L_a \frac{di_a}{dt}$.

Η παραγόμενη ροπή εξουδετερώνει αδράνεια φορτίου και τριβή $J \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} = T = K \cdot i_a$

Μετασχηματίζοντας τους 3 παραπάνω τύπους κατά Laplace θα έχουμε:

$$\begin{aligned} K_b \cdot s \cdot \theta(s) &= E_a(s) \\ U_{IN}(s) &= (L_a \cdot s + R_a) \cdot I_a(s) + E_a(s) \\ (J \cdot s^2 + b \cdot s) \cdot \theta(s) &= T = K \cdot I_a(s) \end{aligned}$$

Έτσι από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος:

$$\frac{\theta(s)}{V_{IN}(s)} = \frac{K}{s \cdot [L_a \cdot J \cdot s^2 + (L_a \cdot b + R_a \cdot J)s + R_a \cdot b + K \cdot K_b]}$$

ή

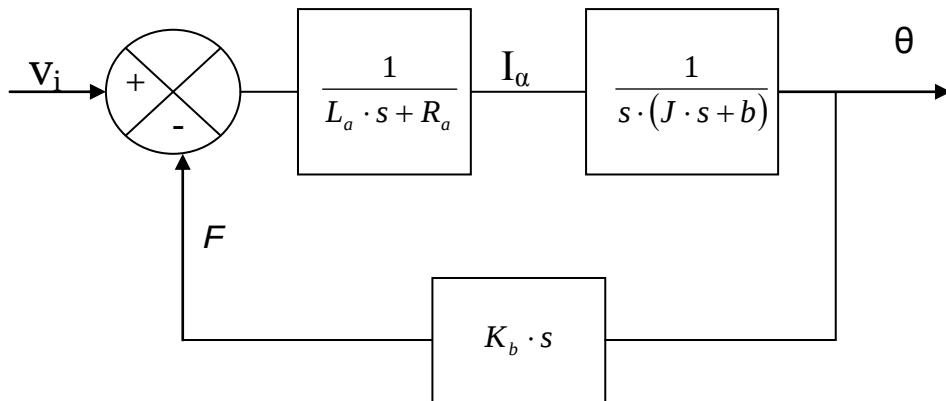
$$\frac{\dot{\theta}(s)}{V_{IN}(s)} = \frac{K_m}{T_m \cdot s + 1}$$

Βιομηχανικά Συστήματα Ελέγχου

γιατί συνήθως το $L_a \rightarrow 0$ και $K_m = \frac{K}{R_a \cdot b + K \cdot K_b} = \text{σταθερά κέρδους}$
του κινητήρα, $T_m = \frac{R_a \cdot J}{R_a \cdot b + K \cdot K_b} = \text{χρονική σταθερά του κινητήρα.}$

$$\frac{\dot{\theta}(s)}{V_{IN}(s)} = \frac{K_m}{T_m \cdot s + 1} \quad \text{σύστημα 1^{ου} βαθμού}$$

Δομικό διάγραμμα σερβοκινητήρα Σ.Ρ. ελεγχόμενου οπλισμού (Α).



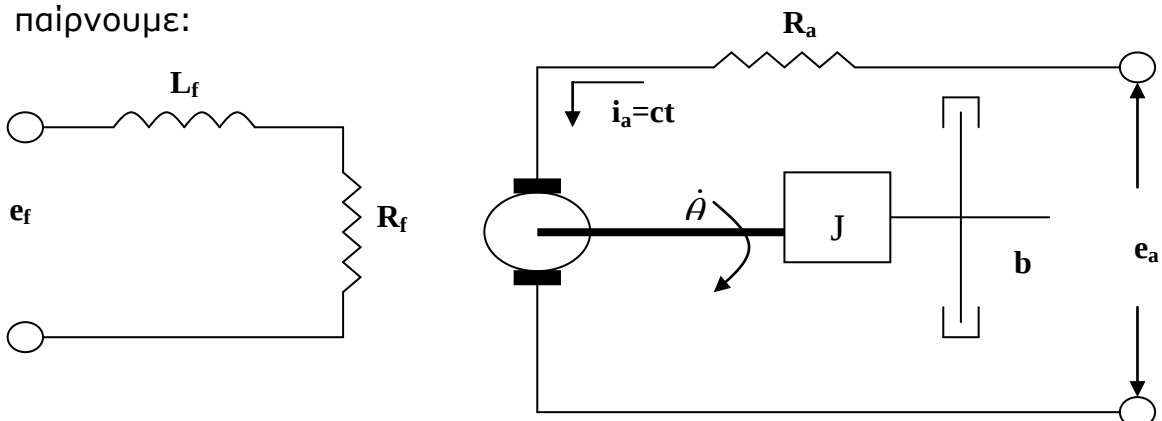
Εικόνα 4.7

Η μεταβατική απόκριση σε βηματική διέγερση θα είναι:

$$\dot{\theta} = K_m \left(1 - e^{-t/T_m} \right) \cdot V_{IN} \quad \text{σύστημα 1^{ου} βαθμού}$$

4.3.2 Ανάλυση λειτουργίας κατά τον έλεγχο πεδίου (F)

Η ροπή T του κινητήρα είναι ανάλογη με το γινόμενο της μαγνητικής ροής στο διάκενο του αέρα Ψ επί το ρεύμα οπλισμού i_a δηλαδή: $T = K_1 \cdot \Phi \cdot i_a = K \cdot i_a \cdot i_f \Rightarrow T = K_2 \cdot i_f$ και από το κύκλωμα παίρνουμε:



Εικόνα 4.8

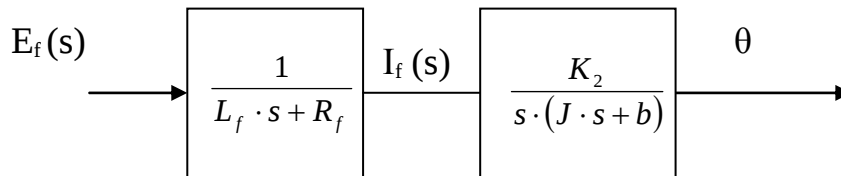
$i_a = ct$ δηλαδή απαιτεί πηγή σταθερού ρεύματος.

$$L_f \cdot \frac{di_f}{dt} + R_f i_f = e_f$$

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} = T = K_2 i_f$$

Με μετασχηματισμό Laplace:

$$(L_f \cdot s + R_f) \cdot I_f(s) = E_f(s) \quad \text{και} \quad (J \cdot s^2 + b \cdot s) \cdot \theta(s) = K_2 \cdot I_f(s).$$



Εικόνα 4.9

Η συνάρτηση μεταφοράς θα είναι:

$$\frac{\theta(s)}{E_f(s)} = \frac{K_2}{s \cdot (L_f \cdot s + R_f) \cdot (J \cdot s + b)} = \frac{K_m}{s \cdot (T_f \cdot s + 1) \cdot (T_m \cdot s + 1)}$$

$$\dot{\eta} \quad \frac{\theta(s)}{E_f(s)} = \frac{K_m}{s(T_f \cdot s + 1)(T_m \cdot s + 1)}$$

όπου $K_m = \frac{K_2}{R_f \cdot b}$ = σταθερά κέρδους κινητήρα.

$T_f = \frac{L_f}{R_f}$ = χρονική σταθερά κυκλώματος διέγερσης.

$T_m = \frac{J}{b}$ = χρονική σταθερά στοιχείων αδράνειας τριβής.

Εδώ η αυτεπαγωγή $L_f \neq 0$ και το σύστημα $\frac{\dot{\theta}(s)}{E_f(s)}$ είναι σύστημα 2^{ης} τάξης και η ΑΗΕΔ του κινητήρα δεν δρα σαν παράγοντας απόσβεσης πράγμα που αποτελεί σοβαρό μειονέκτημα.

Οι χρονικές σταθερές είναι γενικά μεγαλύτερες συγκριτικά με τις αντίστοιχες σταθερές του κινητήρα ελεγχόμενου οπλισμού.

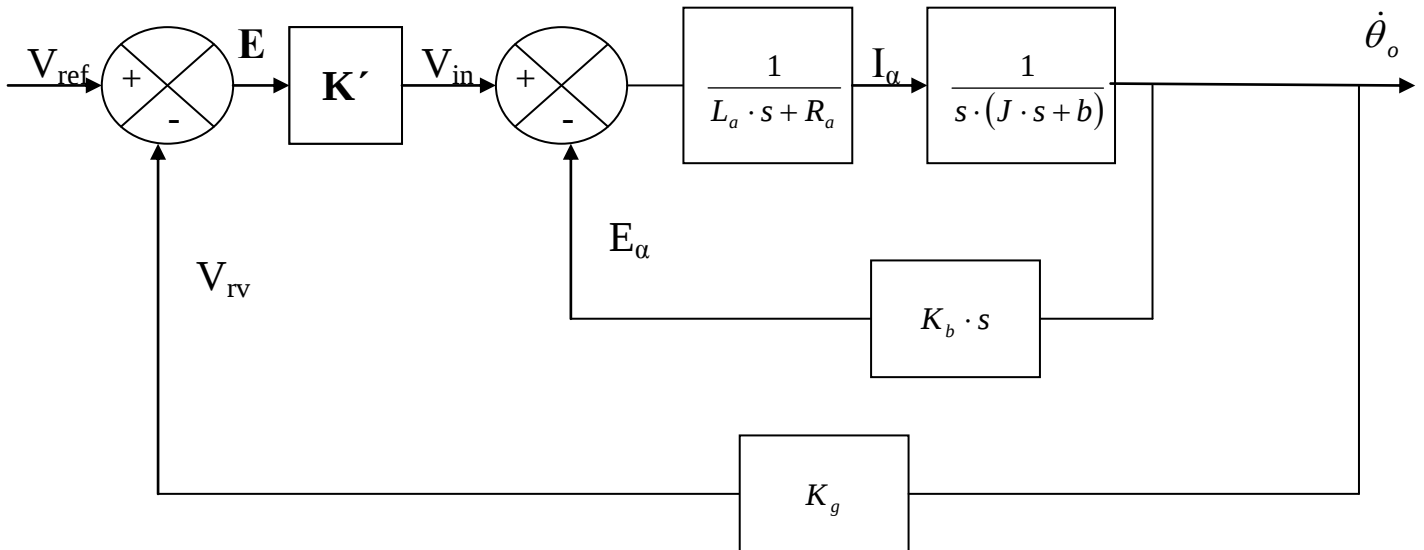
4.4 Έλεγχος ταχύτητας με κλειστό βρόγχο

Από τον κλειστό βρόγχο της εικόνας 4.10 ελέγχου ταχύτητας έχουμε:

$$\dot{\theta}_o = K \cdot E$$

δηλαδή η ταχύτητα είναι συνάρτηση του σφάλματος και του κέρδους του συστήματος. Επίσης

$$E = V_{ref} - K_g \dot{\theta}_o$$



Εικόνα 4.10

Δηλαδή το σφάλμα E είναι η διαφορά της τάσης αναφοράς και της τάσης που βγάζει η ταχογεννήτρια.

$$\theta_o = K \cdot (V_{ref} - K_g \theta_o)$$

$$\theta_o = K \cdot V_{ref} - K \cdot K_g \theta_o$$

$$1 = \frac{K \cdot V_{ref}}{\theta_o} - K \cdot K_g$$

$$\frac{K \cdot V_{ref}}{\theta_o} = 1 + K \cdot K_g$$

$$\theta_o = \frac{K \cdot V_{ref}}{1 + K \cdot K_g}$$

Αν υποθέσουμε ότι το κέρδος του εμπρός δρόμου είναι πολύ μεγάλο

$$\dot{\theta}_o = \frac{V_{ref}}{K_g} \quad K_g = \text{constant}$$

$$\dot{\theta}_o \propto V_{ref}$$

Δηλαδή η ταχύτητα είναι ανάλογη μόνο της τάσης αναφοράς V_{ref} για κέρδος K πολύ μεγάλο. Αυτό είναι το πλεονέκτημα του κλειστού βρόγχου ελέγχου ταχύτητας. Από την προηγούμενη σχέση σφάλματος έχουμε:

$$E = V_{ref} - K_g \cdot K \cdot E$$

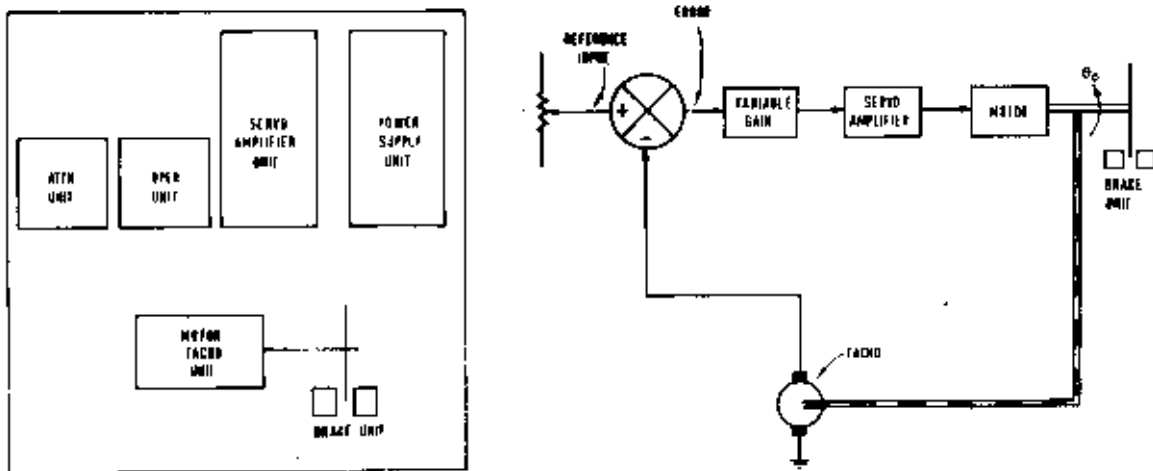
$$1 = \frac{V_{ref}}{E} - K_g \cdot K$$

$$\frac{V_{ref}}{E} = 1 + K_g \cdot K$$

$$E = \frac{V_{ref}}{1 + K_g \cdot K}$$

Από την σχέση αυτή φαίνεται ότι το σφάλμα E μειώνεται καθώς αυξάνεται το κέρδος K του εμπρός δρόμου.

4.5 Κύκλωμα ελέγχου ταχύτητας



Εικόνα 4.11

4.5.1 Ιδιότητες τελεστικού ενισχυτή ΟΥ150Α

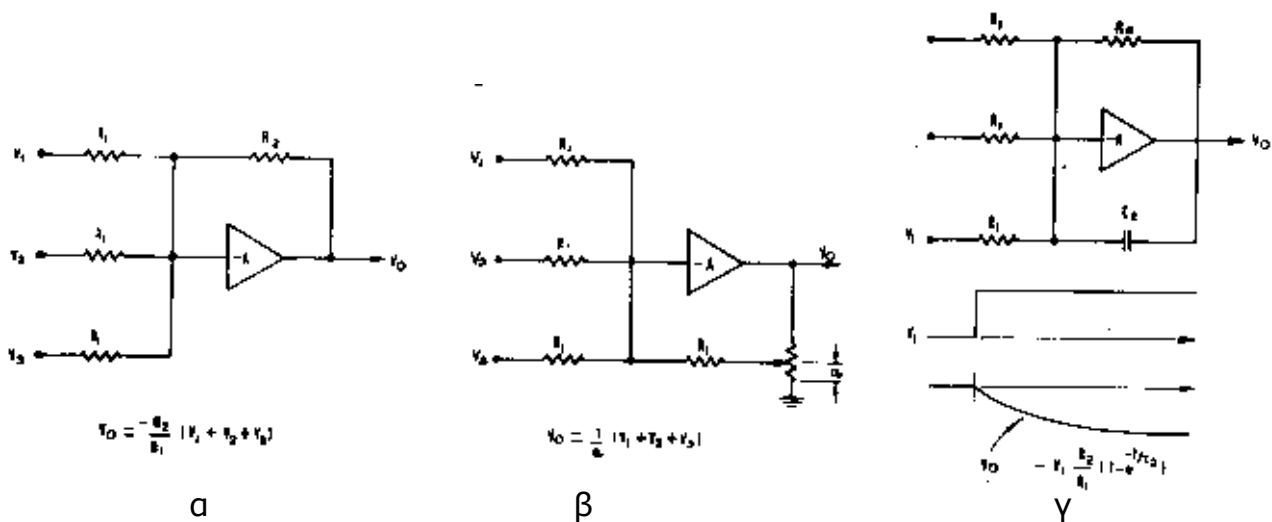
Η βασική ιδιότητα του τελεστικού ενισχυτή είναι να δίνει μια έξοδο ανάλογη με το άθροισμα των τάσεων εισόδου.

$$V_o = -\frac{R_2}{R_1}(V_1 + V_2 + V_3)$$

Αν $R_1 = R_2$ τότε $V_o = -(V_1 + V_2 + V_3)$. Για να επιτύχουμε την μεταβαλλόμενη R_2 , τοποθετούμε το ποτενσιόμετρο που φαίνεται στο σχήμα 4.12β. Το κέρδος τώρα είναι $-1/a$ όπου a το κλάσμα του ολισθαίνοντος ποτενσιομέτρου. Αν παράλληλα με την αντίσταση ανάδρασης εισαχθεί πυκνωτής C_2 τότε η έξοδος θα είναι όπως το σχήμα 4.12γ

$$V_o = -\frac{V_1 R_2}{R_1} \left(1 - e^{-t/\tau_2} \right) \text{ όπου } \tau_2 = C_2 R_2$$

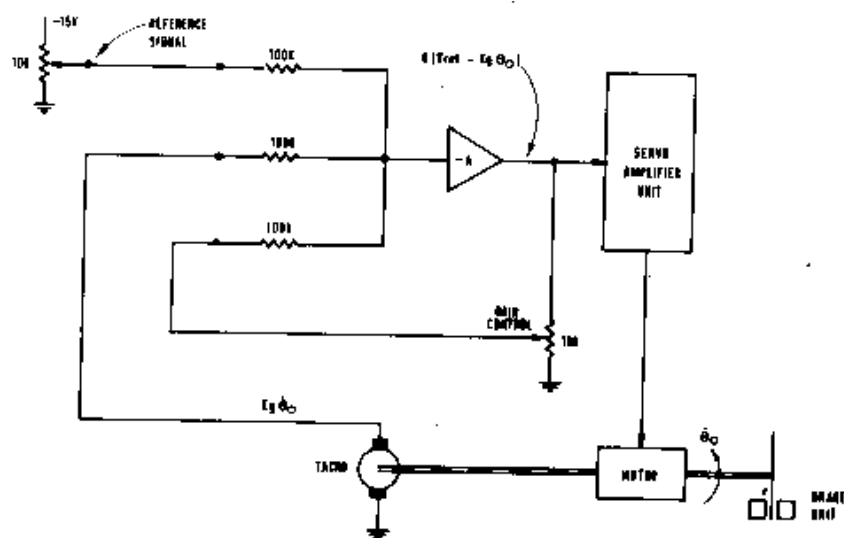
ο τελεστικός ενισχυτής είναι λοιπόν αθροιστής.



Εικόνα 4.12

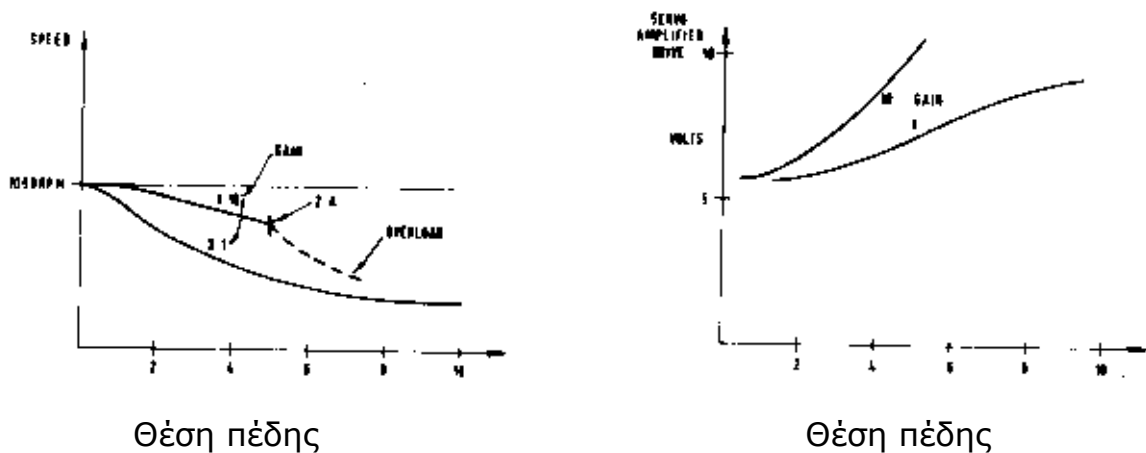
Ο τελεστικός ενισχυτής τροφοδοτεί στο κύκλωμα ελέγχου ταχύτητας (σχήμα 4.13) το σερβοενισχυτή, που χρειάζεται θετική είσοδο για να περιστρέψει τον σερβοκινητήρα. Η ταχογεννήτρια δίνει μια τάση ανάδρασης $V_{rv} = K_g \cdot \dot{\theta}_o$ που για να έχει σωστή πολικότητα πρέπει να αντίθετη σε εκείνη της είσοδο V_{ref} και η ταχύτητα $\dot{\theta}_o$ με την είσοδο της ταχογεννήτριας να πέφτει.

Πριν χρησιμοποιηθεί ο τελεστικός ενισχυτής πρέπει να γίνει ΡΥΘΜΙΣΗ ΤΟΥ ΜΗΔΕΝΟΣ δηλαδή θέτοντας τάση εισόδου ίση με μηδέν πρέπει να πάρουμε $V_o = 0$. Αν όμως $V_o \neq 0$, τότε με τον ρυθμιστή μηδενισμού πλησιάζουμε την μηδενική είσοδο.



Εικόνα 4.13

Με την σύνδεση του σχήματος 4.13 για έλεγχο ταχύτητας, παρατηρούμε ρύθμιση σε κενό φορτίο στα 1.000rpm όσο μεγαλύτερο είναι το κέρδος K τόσο μικρότερη είναι η πτώση της ταχύτητας του σερβοκινητήρα. Αυτό φαίνεται στο σχήμα 4.14.



Εικόνα 4.14

Θεωρητικά εξηγείται με παραγωγή της γνωστής σχέσης

$$\dot{\theta}_o = \frac{K \cdot V_{ref}}{1 + K \cdot K_g}$$

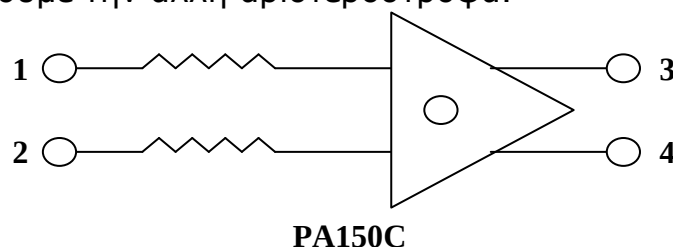
δηλαδή

$$\frac{\partial \dot{\theta}_o}{\partial K} = \frac{V_{ref}}{(1 + K \cdot K_g)^2} \quad \text{δηλαδή αν } K \uparrow \text{ η κλίση } \frac{\partial \dot{\theta}_o}{\partial K} \downarrow$$

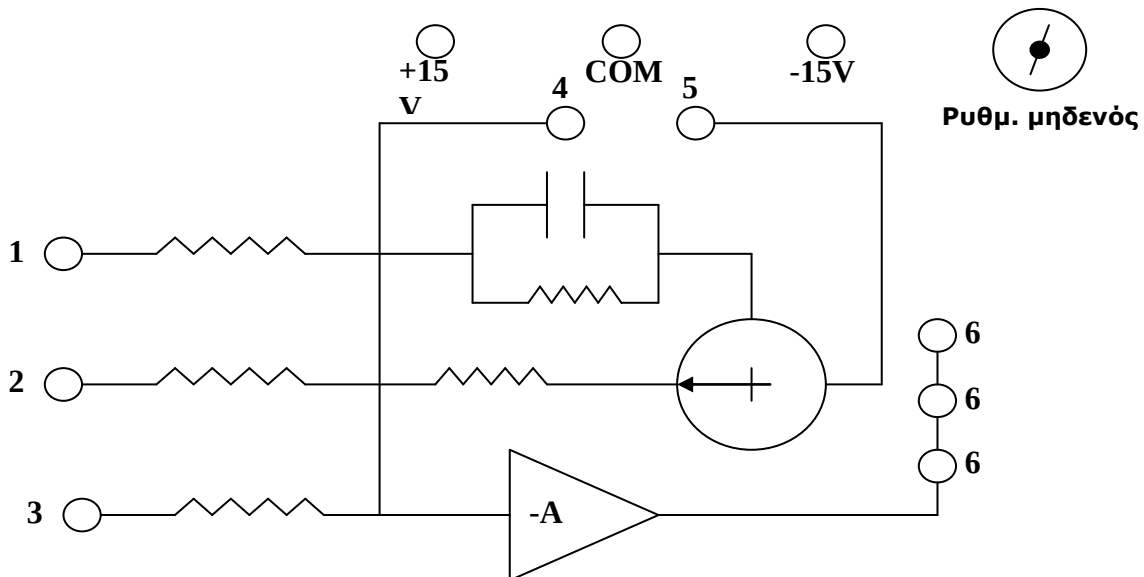
Παρατηρούμε στο σχήμα 4.14 ότι καθώς αυξάνεται το φορτίο η ταχύτητα πέφτει ομαλά, όμως για ένα φορτίο και πέρα η ταχύτητα πέφτει απότομα, τότε έχουμε την μέγιστη φόρτιση $\approx 2A$ και δεν υπάρχουν άλλα αποθέματα ισχύος στο σύστημα για να αντισταθμιστεί η αύξηση του φορτίου.

4.5.2 Ιδιότητες προενισχυτή PA150C

Για να επιτύχουμε έλεγχο αντιστρεπτής ταχύτητας είναι απαραίτητο να τροφοδοτηθούν και οι δύο είσοδοι του σερβοενισχυτή. Όπως είναι γνωστό ο ενισχυτής δέχεται θετικά σήματα και τα ενισχύει κατάλληλα. Αν τροφοδοτήσουμε την μια είσοδο ο σερβοκινητήρας στρέφεται δεξιόστροφα αν τροφοδοτήσουμε την άλλη αριστερόστροφα.

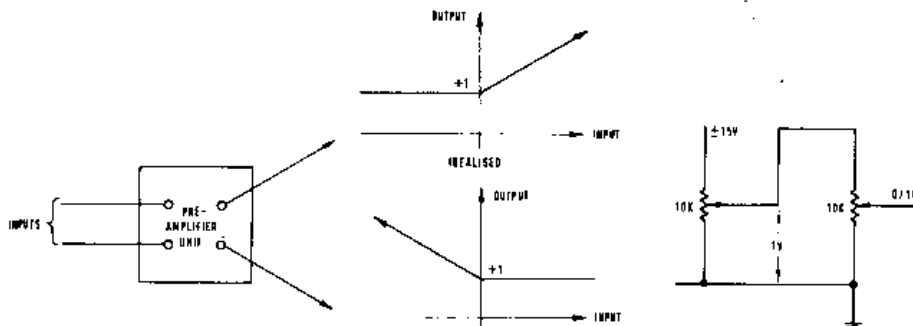


Εικόνα 4.15



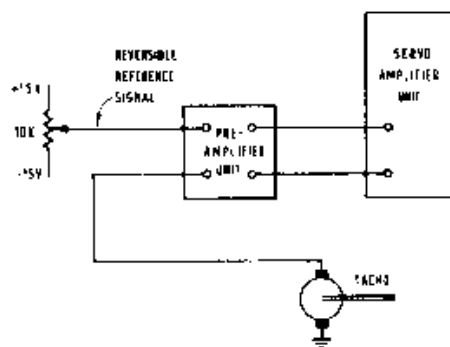
Εικόνα 4.16

Είναι φανερό ότι ο τελεστικός ενισχυτής δεν είναι κατάλληλος για έλεγχο αλλαγής φοράς περιστροφής της ταχύτητας γιατί έχει μία έξοδο την 6, ενώ ο προενισχυτής PA150C έχει δύο εξόδους 3 και 4 και όπως φαίνεται στο σχήμα 4.17 αρνητική είσοδος δίνει θετική έξοδο στην κάτω επαφή ενώ η θετική είσοδος δίνει θετική έξοδο στην πάνω επαφή.



Εικόνα 4.17

Όπως φαίνεται στο σχήμα 4.18 στη μια είσοδο του προενισχυτή συνδέεται μέσω ποτενσιόμετρου μια τάση με διακύμανση $\pm 15V$. Εάν μετρηθεί η τάση μεταξύ του ποτενσιόμετρου αυτού είναι περίπου 25V και η μέγιστη τάση που μπορούμε να πάρουμε στην έξοδο του προενισχυτή είναι περίπου 12V. Για να παρθεί η σωστή πολικότητα της ταχογεννήτριας κάνουμε τον κινητήρα να στραφεί στρέφοντας τον προενισχυτή στο «zero control» γειώνουμε το ένα άκρο της ταχογεννήτριας και το άλλο το οδηγούμε στην είσοδο του προενισχυτή. Αν ο κινητήρας επιβραδύνεται πολύ τότε η πολικότητα είναι σωστή. Αν όμως ο κινητήρας επιταχύνεται τότε αντιστρέφεται η σύνδεση της ταχογεννήτριας. Ρυθμίζουμε με το «zero control» το ρεύμα να είναι στα 0,5A και το ποτενσιόμετρο αναφοράς γύρω στο μέσο.

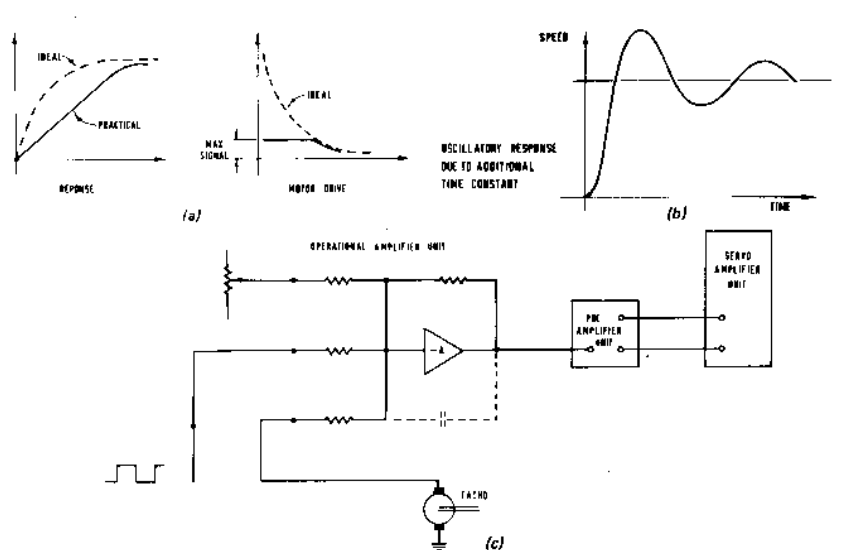


Εικόνα 4.18

Τελικά συνδέεται το σήμα αναφοράς στην άλλη είσοδο του προενισχυτή. Ο κινητήρας ελέγχεται τώρα αντιστρεπτά. Η πτώση ταχύτητας με αύξηση του φορτίου είναι τώρα μικρότερη.

Αν δεν εξετάσουμε το σύστημα στην σταθερή κατάσταση λειτουργίας αλλά για απότομη μεταβολή, για ξαφνική μεταβολή του σήματος αναφοράς (τετραγωνικός παλμός συνήθως 0,5Volt/0,5Hz) τότε η έξοδος του συστήματος (ταχύτητα) θα έχει την μορφή του σχήματος 4.19α.

Αν υπάρχει επιπρόσθετη καθυστέρηση μπορεί να έχουμε ταλάντωση γύρω από την τελική τιμή (σχήμα 4.19β).



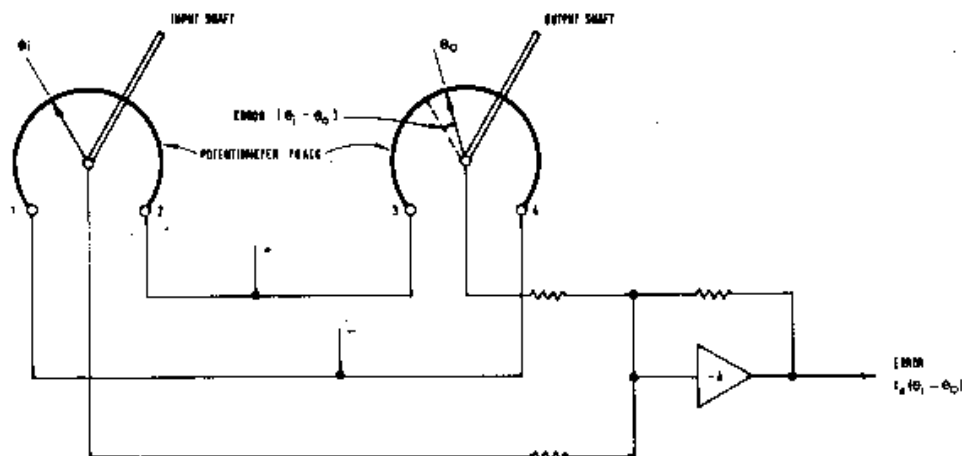
Εικόνα 4.19

4.5.3 Έλεγχος θέσης συστήματος

Βασική απαίτηση του ελέγχου θέσης είναι να περιστρέφεται ο άξονας εξόδου κατά την ίδια γωνία με τον άξονα εισόδου.

Η απλή μορφή ενός τέτοιου συστήματος φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 4.20.

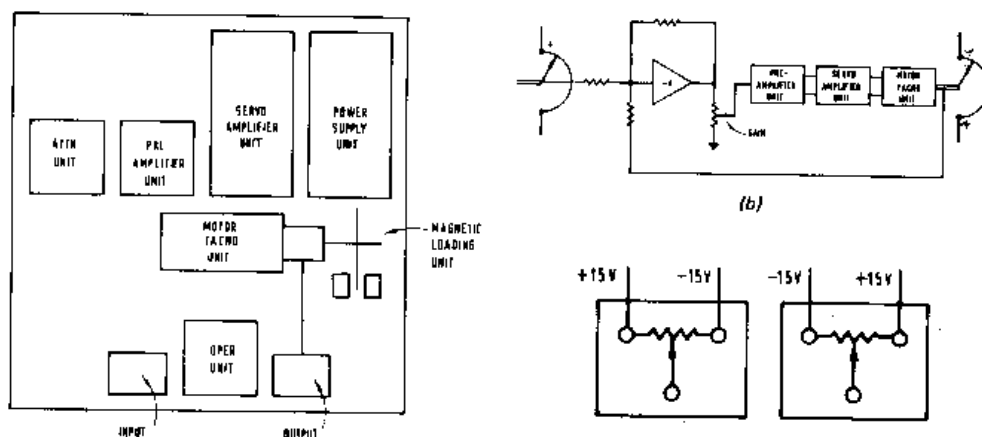
Οι άξονες εισόδου -εξόδου είναι συνδεδεμένοι με περιστροφικούς μετατροπείς θέσης σε τάση (transducers): $e_i = K_e \theta_i$ και $e_o = K_e \theta_o$. Η τάση $e = e_i - e_o = K_e(\theta_i - \theta_o)$ οδηγείται για ενίσχυση σε ένα τελεστικό ενισχυτή (-A) από όπου προκύπτει το σήμα σφάλματος. Το σήμα αυτό κινεί τον σερβοκινητήρα μέχρι να μηδενιστεί, πράγμα που συμβαίνει όταν $\theta_i = \theta_o$.



Εικόνα 4.20

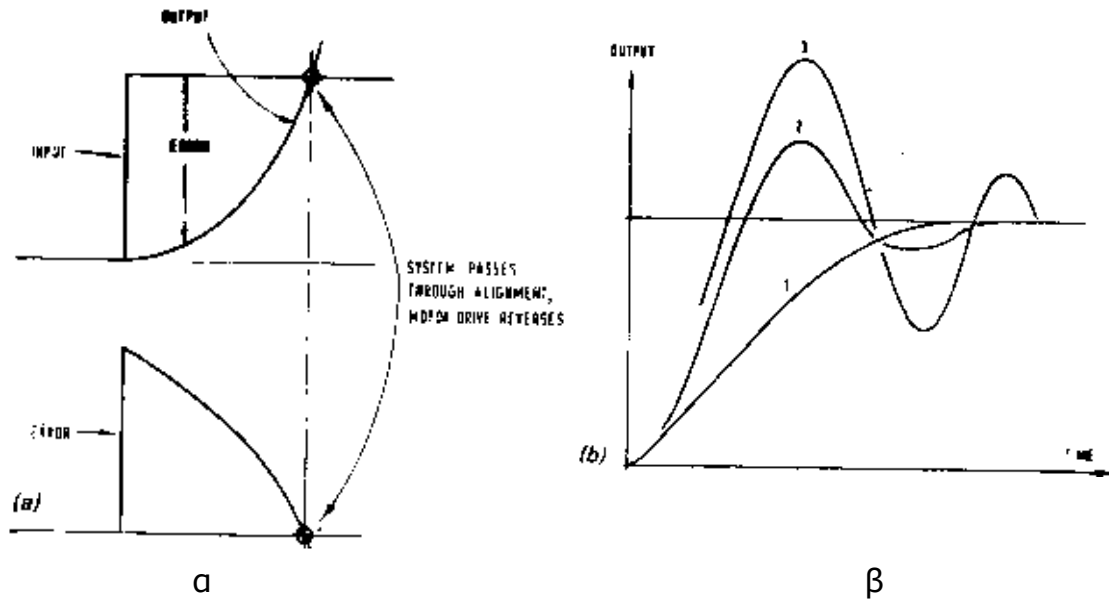
Στο σχήμα 4.21 βλέπουμε το πλήρες σύστημα ελέγχου θέσης του MS150. Οι μετατροπείς είναι δύο βαθμονομημένα ποτενσιόμετρα (σχήμα γ) που συνδέονται έτσι ώστε οι τάσεις τους να αφαιρούνται.

Τα ποτενσιόμετρα έχουν γωνίες 300° και η ολική τάση κατά πλάτος αυτών είναι 30V δηλαδή $1V/10^\circ$ ή $0,1V/1^\circ$.



Εικόνα 4.21

Νεκρή ζώνη (dead-band) ορίζεται η περιοχή τιμών τάσεως για τις οποίες ο κινητήρας δεν περιστρέφεται. Η νεκρή ζώνη πέφτει αυξανόμενου του κέρδους.



Εικόνα 4.22

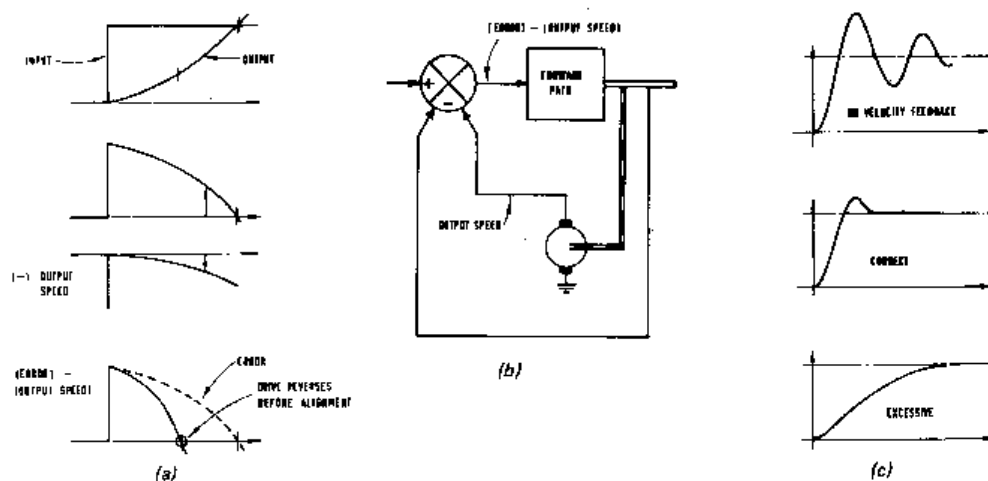
Αν εξετάσουμε την μεταβατική κατάσταση στο σχήμα 4.22 θα παρατηρήσουμε ότι η έξοδος ξεπερνά την είσοδο, ταλαντούται για να καταλήξει στην τελική θέση. Η υπερύψωση από την στάθμη της τιμής εισόδου οφείλεται στο ότι ο κινητήρας τη στιγμή της ευθυγράμμισης των δύο αξόνων εισόδου-εξόδου, έχει μια ταχύτητα που δεν μπορεί στιγμιαία να την μηδενίσει. Για χαμηλές τιμές κέρδους δεν παρουσιάζεται υπερύψωση (σχήμα 4.22β) καμπύλη 1. Αυξανόμενου όμως του κέρδους αυξάνεται και η υπερβολή (2,3), γιατί το υψηλότερο κέρδος δημιουργεί μεγαλύτερη ταχύτητα περιστροφής του άξονα εξόδου.

4.5.4 Μείωση της υπερύψωσης της και του χρόνου αποκατάστασης με ανάδραση ταχύτητας

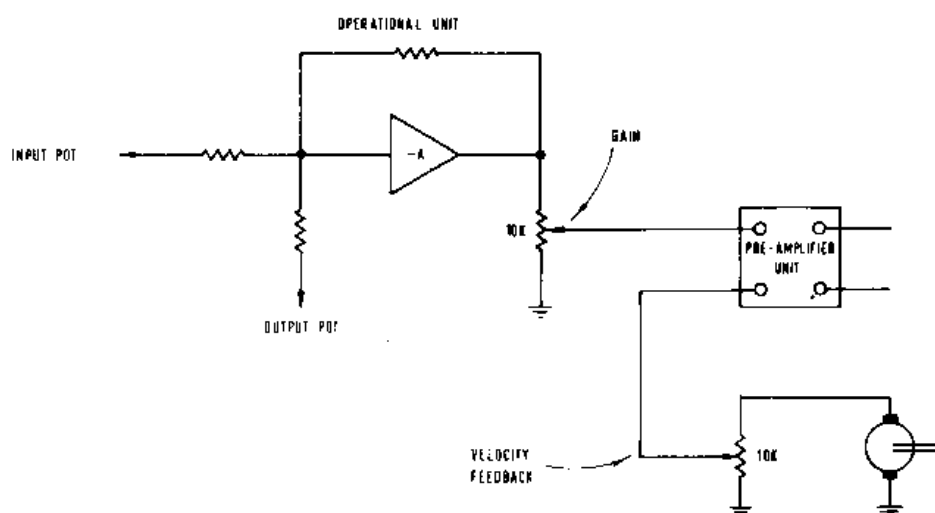
Για να μειώσουμε την υπερύψωση της μεταβατικής απόκρισης χρησιμοποιούμε ένα επιπρόσθετο σήμα ελέγχου ανάλογο της ταχύτητας του άξονα εξόδου. Το σήμα αυτό το παίρνουμε από μια ταχογεννήτρια, ο δρομέας της οποίας κινείται από τον άξονα του σερβοκινητήρα. Το σήμα αυτό αφαιρείται από το σφάλμα λόγω μη ευθυγράμμισης των δύο αξόνων όπως φαίνεται στο σχήμα 4.23β. Έτσι το σφάλμα μηδενίζεται πριν το σύστημα φθάσει στην ευθυγράμμιση των δύο αξόνων δηλαδή ο σερβοκινητήρας αρχίζει να επιβραδύνεται και έτσι όταν το σύστημα φθάσει στην ευθυγράμμιση θα έχει μικρότερη ταχύτητα απ' ότι είχε μόνο με ανάδραση θέσης.

Αν όμως αυξήσουμε την ανάδραση της ταχύτητας ώστε ($\zeta \geq 1$) τότε θα έχουμε ταλάντωση όπως φαίνεται στο σχήμα 4.23γ αλλά ο χρόνος αποκατάστασης έχει μεγαλώσει και δεν μας συμφέρει.

Στα σχήματα 4.24, 4.25 βλέπουμε την ανάδραση ταχύτητας και τα αποτελέσματα που έχει πάνω στην κλίση της ευθείας ταχύτητα – σφάλμα. Στο σχήμα 4.24 φαίνεται ότι η τάση της ταχογεννήτριας μεταβάλλεται μέσω της μονάδας εξασθένησης AU150B (ποτενσιόμετρο ανάδρασης).



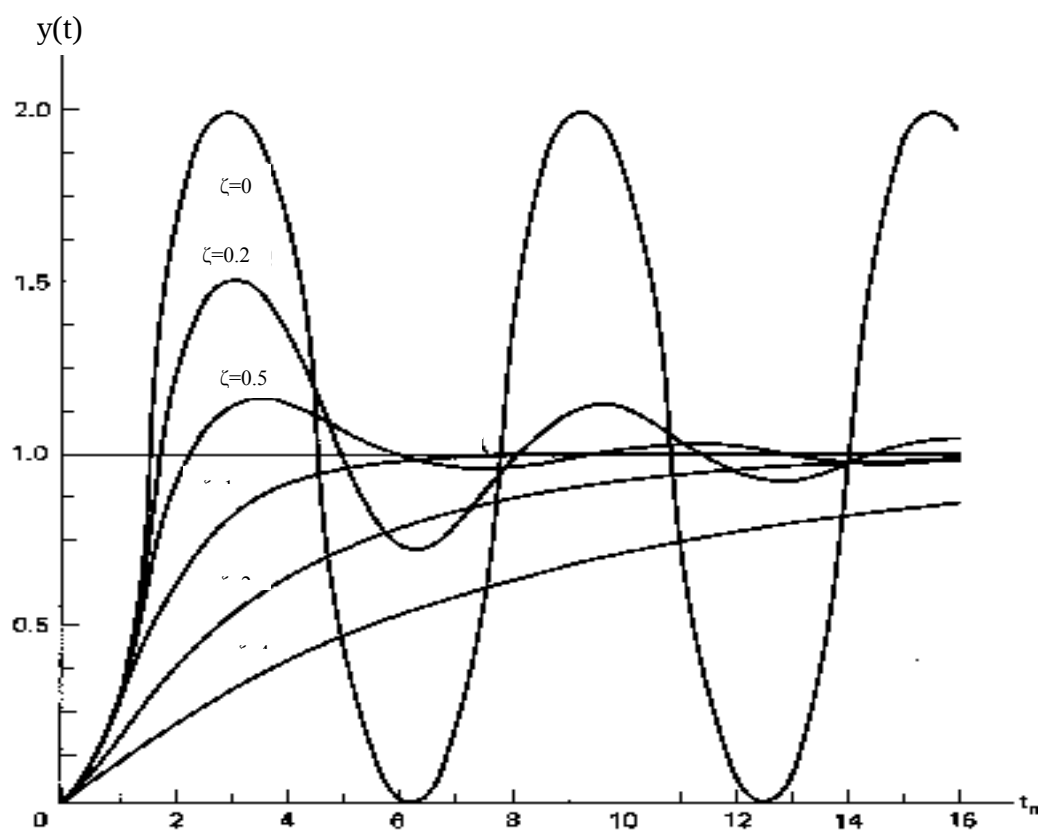
Εικόνα 4.23: Ανάδραση ταχύτητας



Εικόνα 4.24

Στο σχήμα 4.26 που ακολουθεί δίνονται οι καμπύλες απόκρισης μοναδιαίας βαθμίδας για σύστημα 2^{ης} τάξης $\frac{V_o}{V_i} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$.

Εικόνα 4.25



Εικόνα 4.26

ΑΣΚΗΣΗ 4η

ΕΛΕΓΧΟΣ ΘΕΣΗΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Θεωρητική υποστήριξη

Βασική απαίτηση του ελέγχου θέσης είναι να περιστρέφεται ο άξονας εξόδου κατά την ίδια γωνία με τον άξονα εισόδου. Οι άξονες εισόδου - εξόδου είναι συνδεδεμένοι με περιστροφικούς μετατροπείς θέσης σε τάση :

$$e_i = K_e \cdot \theta_i \quad \text{και} \quad e_o = K_e \cdot \theta_o$$

Η τάση $e = e_i - e_o = K_e(\theta_i - \theta_o)$ οδηγείται για ενίσχυση σ' ένα τελεστικό εισχυτή (-A) απ' όπου προκύπτει το σήμα σφάλματος. Το σήμα αυτό κινεί το σερβοκινητήρα μέχρι να μηδενιστεί, πράγμα που συμβαίνει όταν $\theta_i = \theta_o$.

Οι μετατροπείς (transducers) είναι δυο βαθμονομημένα ποντενσιόμετρα και συνδέονται έτσι ώστε οι τάσεις ν' αφαιρούνται. Τα ποντενσιόμετρα αυτά έχουν γωνίες 300° και η ολική τάση κατά πλάτος αυτών είναι 30V δηλ. δίνει $1/10^\circ$ ή $0,1 \text{ V} / 1^\circ$.

Νεκρή ζώνη (dead - band) είναι το ελάχιστο σήμα που απαιτείται για να στρέψει τον κινητήρα. Η νεκρή ζώνη πέφτει αυξανόμενου του κέρδους.

Αν εξετάσουμε τη μεταβατική θα παρατηρήσουμε ότι η έξοδος ξεπερνά την είσοδο, ταλαντούται για να καταλήξει στην τελική θέση. Η υπερύψωση απ' τη στάση της τιμής εισόδου οφείλεται στο ότι ο κινητήρας τη στιγμή της ευθυγράμμισης των δυο αξόνων εισόδου - εξόδου έχει μια ταχύτητα που δεν μπορεί στιγμιαία να τη μηδενίσει. Για χαμηλές τιμές κέρδους δεν παρουσιάζει υπερύψωση. Αυξανόμενου όμως του κέρδους δημιουργεί μεγαλύτερη ταχύτητα περιστροφής του άξονα εξόδου.

Για να μειώσουμε την υπερύψωση της μεταβατικής απόκρισης χρησιμοποιούμε ένα επιπρόσθετο σήμα ελέγχου ανάλογο της ταχύτητας του άξονα εξόδου. Το σήμα αυτό το παίρνουμε απο μια ταχογεννήτρια, ο δρομέας της οποίας κινείται απ' τον άξονα του σερβοκινητήρα. Το σήμα αυτό αφαιρείται απ' το σφάλμα λόγω μη ευθυγράμμισης των δυο αξόνων.

Έτσι το σφάλμα μηδενίζεται πριν το σήμα φτάσει στην ευθυγράμμιση των δυο αξόνων, δηλ. ο σερβοκινητήρας αρχίζει να επιβραδύνεται κι έτσι όταν το σύστημα φτάσει στην ευθυγράμμιση θα έχει μικρότερη ταχύτητα απ' ότι είχε μόνο με ανάδραση θέσης.

Αν όμως αυξήσουμε την ανάδραση ταχύτητας ώστε ($\zeta > 1$) τότε δε θα έχουμε ταλάντωση, αλλά ο χρόνος αποκατάστασης έχει μεγαλώσει και δε μας συμφέρει.

Με την ανάδραση όπως είδαμε επιτυγχάνεται η σύγκριση εισόδου και εξόδου, ώστε να διατηρηθεί στο επιθυμητό επίπεδο, με ελαχιστοποίηση του σφάλματος Ε.

σχήμα σελ. 36

$$\text{συνάρτηση μεταφοράς : } \frac{Y}{R} = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)}$$

Η μεταβλητή s είναι συνάρτηση της συχνότητας $s = j \cdot \omega$.

Είναι δυνατό με διάφορες τιμές παραμέτρων

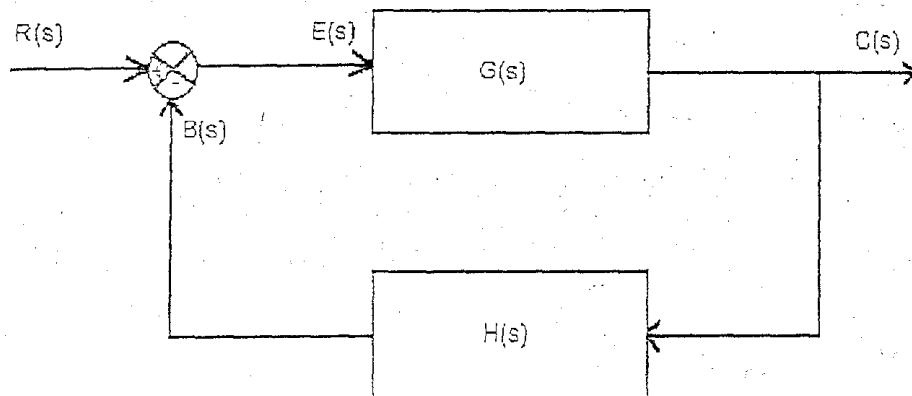
$1 - G(s) \cdot H(s) = 0$ { χαρακτηριστική εξίσωση } τότε η συστήματος τείνει στο άπειρο και λέμε ότι το σύστημα είναι ασταθές. Ευστάθεια είναι η ικανότητα του συστήματος να παρακολουθεί εντολές εισόδου.

Τα ασταθή συστήματα δε μας ενδιαφέρουν στην τεχνολογία γιατί οδηγούν τον μηχανικό εξοπλισμό σε καταστροφή. Τα συστήματα καθίστανται ευσταθή αν οι παράμετροι του συστήματος διαφέρουν σταθερές χρόνου, και συντελεστές ενίσχυσης κατάλληλες τιμές.

Υπάρχουν κριτήρια ευστάθειας που μας βοηθούν να διαπιστώσουμε τις τιμές των παραμέτρων έχουμε ευστάθεια. Τα γνωστότερα κριτήρια είναι Hurwitz, Routh, γεωμετρικού τόπου ριζών Bode, Nyquist, Nichols & Nichols.

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

Απ' τη μετασχηματισμένη Laplace συνάρτηση μεταφοράς έχω



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{a_m \cdot s^m + a_{m-1} \cdot s^{m-1} + \dots + a_0}{a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_0} =$$

$$\kappa \cdot \frac{(s-z_1) \cdot (s-z_2) \cdot \dots \cdot (s-z_m)}{(s-p_1) \cdot (s-p_2) \cdot \dots \cdot (s-p_n)} =$$

$$\kappa \cdot \frac{\left(\left| s-z_1 \right|^{q_1} \right) \cdot \left(\left| s-z_2 \right|^{q_2} \right) \cdot \dots \cdot \left(\left| s-z_m \right|^{q_m} \right)}{\left(\left| s-p_1 \right|^{q_1} \right) \cdot \left(\left| s-p_2 \right|^{q_2} \right) \cdot \dots \cdot \left(\left| s-p_n \right|^{q_n} \right)}$$

κ = κέρδος ενίσχυσης

z = μηδενικό

p = πόλοι, δηλ. ρίζες του παρονομαστή στη συνάρτηση μεταφοράς που είναι και η χαρακτηριστική εξίσωση.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ

Η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα κλασμάτων.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \kappa \cdot \left(\frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_2} + \dots + \frac{A_{n-1}}{s-p_{n-1}} + \frac{A_n}{s-p_n} \right)$$

Την παραπάνω παράσταση απ' το επίπεδο Laplace την μεταφέρουμε στο επίπεδο του χρόνου :

$$\frac{Y(t)}{R(t)} = \kappa \cdot \left(A_0 + A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot e^{p_2 t} + \dots + A_{n-1} \cdot e^{p_{n-1} t} + A_n \cdot e^{p_n t} \right)$$

Η μορφή της συνάρτησης εξαρτάται απ' τον συντελεστή p_n ($n=1,2,\dots,n$)

α) Αν το πραγματικό μέρος των πόλων είναι αρνητικό τότε η απόκριση για $t \rightarrow \infty$ τείνει σε μια σταθερή τιμή $Y(\infty) = \kappa \cdot A_0$, γιατί όλοι οι υπόλοιποι εκθετικοί όροι τείνουν στο μηδέν. (ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ)

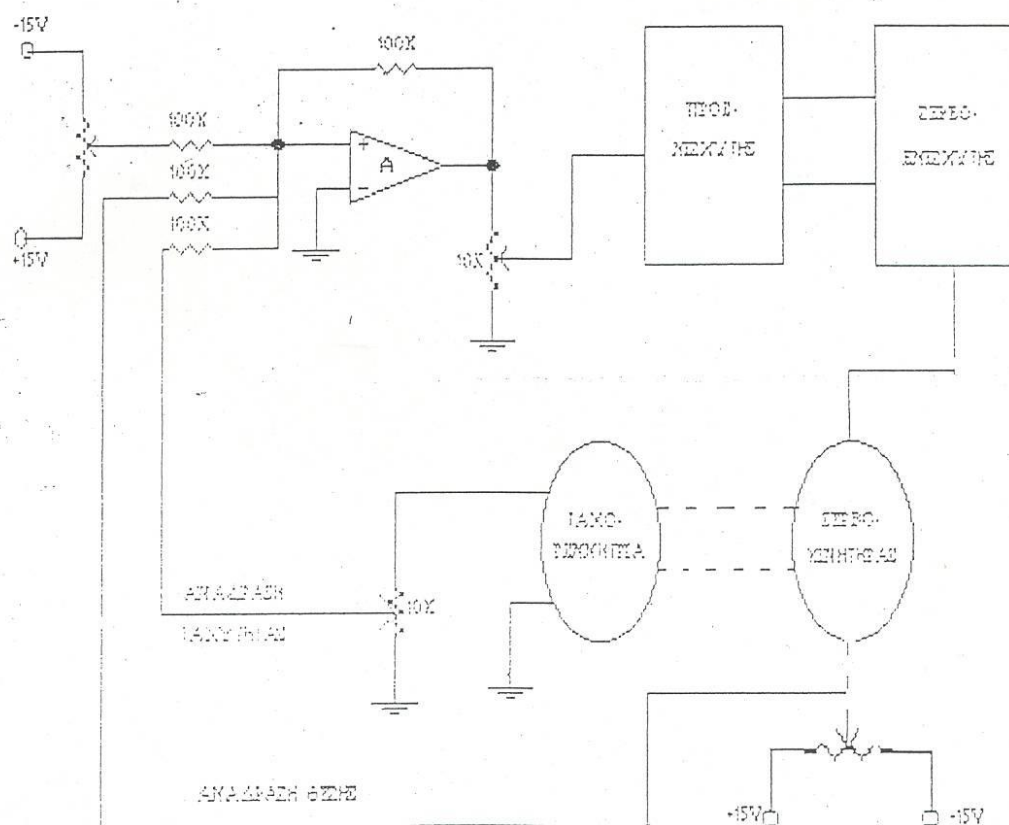
β) Αν το πραγματικό μέρος των πόλων είναι θετικό τότε η απόκριση για $t \rightarrow \infty$ τείνει στο άπειρο. Έστω και ΕΝΑΣ ΜΟΝΟ ΠΟΛΟΣ να έχει θετικό πραγματικό μέρος τότε η απόκριση για $t \rightarrow \infty$ τείνει στο άπειρο (ΑΣΤΑΘΕΙΑ).

γ) Αν ο πόλος είναι μιγαδικός $p_1 = a + jb$ (θα υπάρχει πόλος $p_1^* = a - jb$) και το πραγματικό μέρος είναι μηδέν $a=0$ τότε έχουμε αμείωτη ταλάντωση (ΟΡΙΟ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ).

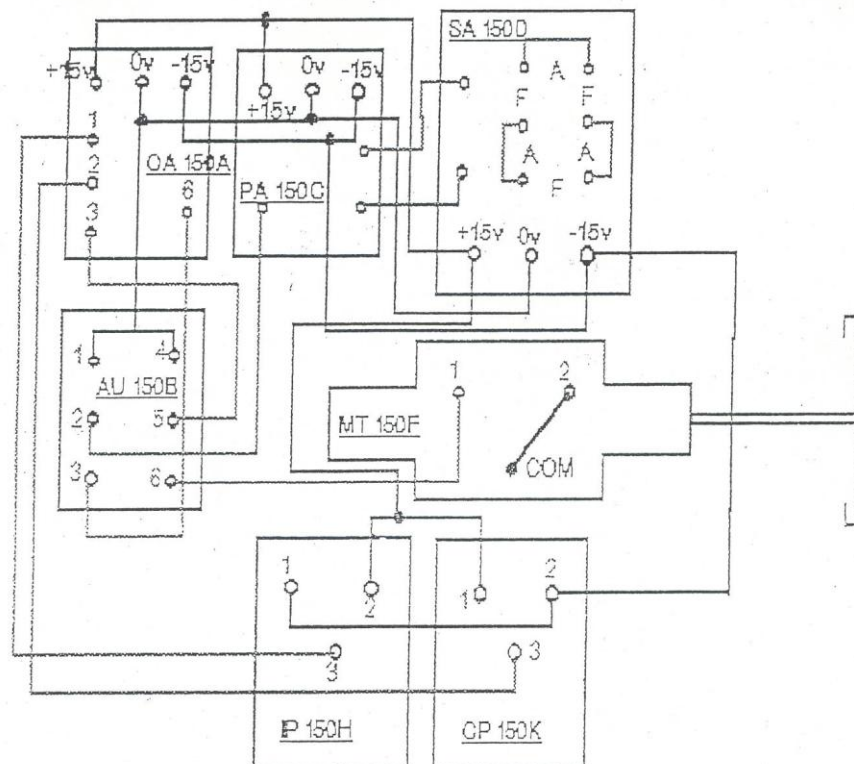
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ένα κλειστό σύστημα Σ.Α.Ε. είναι ευσταθές αν όλες οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης της συνάρτησης μεταφοράς αυτού, βρίσκονται στο ΑΡΙΣΤΕΡΟ μέρος του φανταστικού άξονα επί του επιπέδου των μιγαδικών αριθμών.

Σύστημα ελέγχου θέσης



ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΘΕΣΗΣ



Παραρτήματα

- ❖ **Παράρτημα 1^ο: Μιγαδικοί Αριθμοί**
- ❖ **Παράρτημα 2^ο: Μετασχηματισμός Laplace.**
- ❖ **Παράρτημα 3^ο: Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace.**
- ❖ **Παράρτημα 4^ο: Μετασχηματισμοί δομικών διαγραμμάτων.**
- ❖ **Παράρτημα 5^ο: Τυποποιημένα σήματα εισόδου.**
- ❖ **Παράρτημα 6^ο: Χρονική απόκριση συστημάτων 1ης τάξης.**
- ❖ **Παράρτημα 7^ο: Χρονική απόκριση συστημάτων 2ης τάξης.**
- ❖ **Παράρτημα 8^ο: Προδιαγραφές μεταβατικής απόκρισης.**
- ❖ **Παράρτημα 9^ο: Αρμονική απόκριση συστημάτων 1ης και 2ης τάξης.**
- ❖ **Παράρτημα 10^ο: Διάγραμμα BODE βασικών παραγόντων.**
- ❖ **Παράρτημα 11^ο: Περιθώριο ενίσχυσης και φάσης.**
- ❖ **Παράρτημα 12^ο: Γεωμετρικός Τόπος Ριζών(Γ.Τ.Ρ.)**
- ❖ **Παράρτημα 13ο: Κριτήριο ROUTH.**

Παραρτήματα

Παράρτημα 1ο: Μιγαδικοί αριθμοί	72
1.1 Μιγαδικοί αριθμοί	72
1.2 Καρτεσιανή, Εκθετική και Πολική αναπαράσταση μιγαδικών αριθμών	73
1.3 Αριθμητικές πράξεις μιγαδικών αριθμών	74
1.4 Συγκεντρωτικός πίνακας τύπων για τους μιγαδικούς	75
Παράρτημα 2ο : Μετασχηματισμός Laplace	76
2.1 Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Laplace	76
2.2 Μετασχηματισμοί Laplace βασικών συναρτήσεων	77
Παράρτημα 3ο : Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace	80
3.1 Περίπτωση διακεκριμένων πόλων	80
3.1 Περίπτωση πολλαπλών πόλων	80
Παράρτημα 4ο: Μετασχηματισμοί δομικών διαγραμμάτων	81
Παράρτημα 5ο: Τυποποιημένα σήματα εισόδου	82
Παράρτημα 6ο: Χρονική απόκριση συστημάτων 1ης τάξης	84
Παράρτημα 7ο: Χρονική απόκριση συστημάτων 2ης τάξης	85
Παράρτημα 8ο: Προδιαγραφές μεταβατικής απόκρισης	86
Παράρτημα 9ο: Αρμονική απόκριση συστημάτων 1ης & 2ης τάξης	87
Παράρτημα 10ο: Διάγραμμα BODE βασικών παραγόντων	89
Παράρτημα 11ο: Περιθώριο ενίσχυσης και φάσης	92
Παράρτημα 12ο: Γεωμετρικός Τόπος Ριζών(Γ.Τ.Ρ.)	93
12.1 Κανόνες προσεγγιστικής χάραξης του Γ.Τ.Ρ	94
Παράρτημα 13ο: Κριτήριο ROUTH	96
13.1 Ειδικές περιπτώσεις για την συμπλήρωση του πίνακα	97

Παράρτημα 1^ο: Μιγαδικοί αριθμοί

1.1 Μιγαδικοί αριθμοί.

Είναι γνωστό ότι η δευτεροβάθμια εξίσωση

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad (1)$$

έχει λύση στο πεδίο των πραγματικών αριθμών, εάν η διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \text{ είναι } \geq 0 \quad (2)$$

Στην περίπτωση αυτή η τιμές των ριζών προκύπτουν από τη σχέση

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2} \quad (3)$$

Εάν $\Delta < 0$ η (3) δεν έχει έννοια στο πεδίο των πραγματικών αριθμών, διότι ο υπολογισμός της τετραγωνικής ρίζας ενός αρνητικού αριθμού είναι πράξη αδύνατη π.χ. Έστω ότι έχουμε να λύσουμε την εξίσωση:

$$x^2 - 4x + 13 = 0 \quad (4)$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (3) θα έχουμε:

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3\sqrt{-1} \quad (5)$$

Άρα θα έχουμε δύο ρίζες $x_1 = 2 + 3\sqrt{-1}$... και ... $x_2 = 2 - 3\sqrt{-1}$, που δεν μπορούν να ονομαστούν "αριθμοί" διότι εμφανίζεται η πράξη $\sqrt{-1}$, που όπως είπαμε ποιο πάνω είναι πράξη αδύνατη στο πεδίο των πραγματικών αριθμών. Η παραπάνω εκφράσεις που περιλαμβάνουν τους πραγματικούς αριθμούς 2, 3 και την $\sqrt{-1}$, είναι η ποιο απλή περίπτωση αδύνατης πράξης στο πεδίο των πραγματικών αριθμών. Τέτοιες εκφράσεις λοιπόν δεν μπορούν να ονομάζονται "αριθμοί", και θα τους ονομάζουμε "μιγαδικούς αριθμούς".

Για διευκόλυνση ορίζουμε:

$$j = \sqrt{-1} \quad (6)$$

Στο σύμβολο " j " δίνουμε το όνομα της **φανταστικής μονάδας** και με βάση την (6) θα έχουμε:

$$j = \sqrt{-1}$$

$$j^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

$$j^3 = j^2 \cdot j = (-1) \cdot j = -j$$

$$j^4 = j^2 \cdot j^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

$$j^5 = j^4 \cdot j = (1) \cdot (j) = j$$

$$j^6 = j^3 \cdot j^3 = (-j) \cdot (-j) = -1$$

Παρατηρούμε ότι οι δυνάμεις του j περιοδικά παίρνουν τις ίδιες τέσσερις τιμές: j , -1 , $-j$, $+1$.., έτσι αν έχουμε το j υψωμένο σε οποιαδήποτε δύναμη, μπορούμε να υπολογίσουμε το αποτέλεσμα, αρκεί να διαιρέσουμε τον εκθέτη του j με το 4 και το υπόλοιπο που θα προκύψει να το θεωρήσω εκθέτη του j . Έτσι αν το υπόλοιπο Y είναι:

$$Y = 0 \rightarrow j^0 = 1, Y = 1 \rightarrow j^1 = j, Y = 2 \rightarrow j^2 = -1, Y = 3 \rightarrow j^3 = -j.$$

π.χ. έστω ότι θέλω να υπολογίσω τη τιμή του j^{18} διαιρούμενο με το 4 δίνει $Y=2$ και άρα ακολουθώντας την διαδικασία που αναφέραμε προηγουμένως θα έχουμε: $j^{18} = j^2 = -1$. Ένας **φανταστικός αριθμός** ορίζεται σαν γινόμενο της φανταστικής μονάδας j με έναν πραγματικό αριθμό. Για το λόγο αυτό μπορούμε να γράψουμε έναν φανταστικό αριθμό σαν $j\omega$ όπου ω είναι ένας πραγματικός αριθμός. Ένας **μιγαδικός αριθμός** είναι το άθροισμα ενός πραγματικού αριθμού και ενός φανταστικού αριθμού όπως φαίνεται στην επόμενη σχέση.

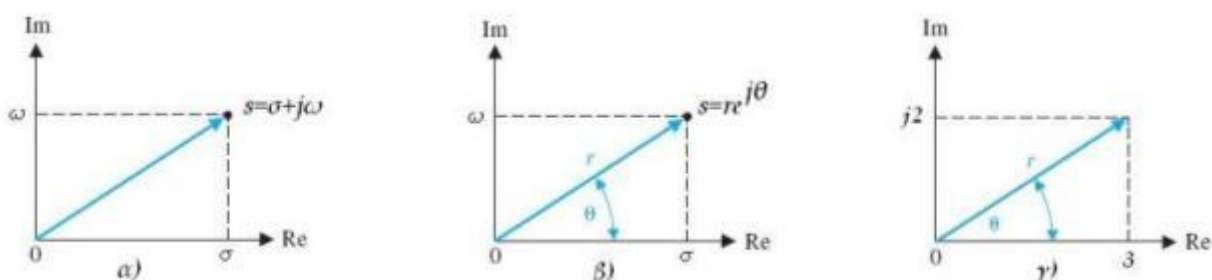
$$s = \sigma + j\omega$$

(7)

Όπου σ και ω είναι πραγματικοί αριθμοί. Το σ είναι το πραγματικό μέρος και το ω το φανταστικό και χρησιμοποιούμε τη διατύπωση. $\text{Re}\{s\} = \sigma$ και $\text{Im}\{s\} = \omega$

1.2 Καρτεσιανή, Εκθετική και Πολική αναπαράσταση μιγαδικών αριθμών.

Ο μιγαδικός αριθμός $s = \sigma + j\omega$ μπορεί να αναπαρασταθεί γραφικά στο μιγαδικό επίπεδο, σαν ένα σημείο του επιπέδου με συντεταγμένες $(\sigma, j\omega)$: όπου σ είναι η τιμή πάνω στον οριζόντιο άξονα, που εκφράζει το πραγματικό μέρος του μιγαδικού αριθμού και ω η τιμή στον κάθετο άξονα (φανταστικός άξονας), που εκφράζει το φανταστικό μέρος του μιγαδικού αριθμού Εικόνα 1α.



Εικόνα 1. α) Καρτεσιανή, β) Εκθετική γ) Πολική αναπαράσταση μιγαδικού αριθμού

Βιομηχανικά Συστήματα Ελέγχου

Ένας άλλος τρόπος αναπαράστασης του μιγαδικού αριθμού s είναι να χρησιμοποιήσουμε την απόσταση από την αρχή των αξόνων και την γωνία θ , όπως φαίνεται στην Εικόνα 1β. Η εκθετική μορφή γράφεται:

$$s = r e^{j\theta} \quad (8)$$

Όπου

$$r = \sqrt{(\sigma^2 + \omega^2)} \quad (9)$$

Και

$$\theta = \tan^{-1}(\omega/\sigma) \quad (10)$$

όπου $\sigma = r \cos \theta$ και $\omega = r \sin \theta$.

Το r ονομάζεται **μέτρο** του s και ορίζεται σαν, $|s|$. Η γωνία θ ονομάζεται **όρισμα** και μπορεί να αναπαρασταθεί σαν $\angle \theta$. Έτσι μπορούμε να αναπαραστήσουμε τον μιγαδικό αριθμό σε πολική μορφή ως εξής:

$$s = r \angle \theta \quad (11)$$

Στην Εικόνα 1γ(στο πάνω μέρος της σελίδας) φαίνεται η αναπαράσταση του μιγαδικού $s = 3 + j2$.

Εκθετική μορφή $s = 3,6 e^{j33,69^\circ}$.

Πολική μορφή $s = 3,6 \angle 33,69^\circ$.

1.3 Αριθμητικές πράξεις μιγαδικών αριθμών.

Ο μιγαδικός αριθμός $s^* = \sigma - j\omega$ ονομάζεται **συζυγής μιγαδικός** του s και η πολική του μορφή είναι $s^* = r \angle -\theta$. Έστω ότι έχουμε τους μιγαδικούς $s_1 = \sigma_1 + j\omega_1$ και $s_2 = \sigma_2 + j\omega_2$.

Οι πράξεις της πρόσθεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης μεταξύ των δύο αριθμών, δίνουν τα παρακάτω αποτελέσματα.

Πρόσθεση:

$$s_1 + s_2 = (\sigma_1 + j\omega_1) + (\sigma_2 + j) = (\sigma_1 + \sigma_2) + j(\omega_1 + \omega_2)$$

Πολλαπλασιασμός :

$$s_1 \cdot s_2 = (\sigma_1 + j\omega_1) \cdot (\sigma_2 + j\omega_2) = (\sigma_1 \cdot \sigma_2) + j\sigma_1\omega_2 + j\sigma_2\omega_1 + j^2(\omega_1 \cdot \omega_2) = (\sigma_1 \cdot \sigma_2 - \omega_1 \cdot \omega_2) + j(\sigma_1\omega_2 + \sigma_2\omega_1)$$

Ή

$$s_1 \cdot s_2 = (r_1 \angle \theta_1) \cdot (r_2 \angle \theta_2) = r_1 \cdot r_2 \angle (\theta_1 + \theta_2)$$

Διαίρεση

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{r_1 \angle \theta_1}{r_2 \angle \theta_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle (\theta_1 - \theta_2)$$

1.4 Συγκεντρωτικός πίνακας τύπων για τους μιγαδικούς.

α/α	$s = \sigma + j\omega = re^{j\theta} = r\angle\theta = r(\cos\theta + j\sin\theta)$
1	$r = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$, Μέτρο μιγάδα
2	$\left. \begin{aligned} \theta &= \tan^{-1} \frac{\omega}{\sigma}, \quad \sigma, \omega > 0 \\ \theta &= -\tan^{-1} \frac{ \omega }{\sigma}, \quad \sigma > 0 \text{ και } \omega < 0 \\ \theta &= 180^\circ - \tan^{-1} \frac{\omega}{ \sigma }, \quad \sigma < 0 \text{ και } \omega > 0 \\ \theta &= 180^\circ + \tan^{-1} \frac{ \omega }{ \sigma }, \quad \sigma, \omega < 0 \end{aligned} \right\} \text{όρισμα μιγάδα}$
3	$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos\theta$
4	$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\sin\theta$
5	$(\sigma_1 + j\omega_1) + (\sigma_2 + j\omega_2) = (\sigma_1 + \sigma_2) + j(\omega_1 + \omega_2)$, πρόσθεση μιγαδικών
6	$(\sigma_1 + j\omega_1) - (\sigma_2 + j\omega_2) = (\sigma_1 - \sigma_2) + j(\omega_1 - \omega_2)$, αφαίρεση μιγαδικών
7	$r_1 e^{j\theta_1} \cdot r_2 e^{j\theta_2} = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$, πολλαπλασιασμός μιγαδικών
8	$\frac{r_1 e^{j\theta_1}}{r_2 e^{j\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$, διαίρεση μιγαδικών

Παράρτημα 2° : Μετασχηματισμός Laplace.

2.1 Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Laplace.

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$L[f(t)] = F(s)$$

$$L^{-1}[F(s)] = f(t)$$

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται οι ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace.

A/A	$f(t)$	$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$
1	$\alpha f_1(t) \pm \beta f_2(t)$	$\alpha F_1(s) \pm \beta F_2(s)$
2	$\frac{df(t)}{dt} = f'(t) = \dot{f}(t)$	$sF(s) - f(0)$
3	$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = f''(t) = \ddot{f}(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
4	$\frac{d^n f(t)}{dt^n} = f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
5	$\int_0^t f(t) dt$	$\frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0)}{s}$
6	$\int_0^t \int_0^t f(t) dt$	$\frac{F(s)}{s^2} + \frac{f^{(-1)}(0)}{s^2} + \frac{f^{(-2)}(0)}{s}$
7	$\int \dots \int f(t) (dt)^n$	$\frac{F(s)}{s^n} + \sum_{k=1}^n \left[\int \dots \int f(t) (dt)^k \right]_{t=0}$
8	$f(t-r) \cdot u(t-r)$	$e^{-rs} F(s)$
9	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$
10	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^{\infty} \Phi(\sigma) d\sigma$
11	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s) * F_2(s)$
12	$f_1(t) \cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(p) F_2(s-p) dp$
13	$e^{-\alpha t} \cdot f(t)$	$F(s + \alpha)$
14	$f\left(\frac{t}{\alpha}\right)$	$\alpha F(\alpha s)$

Βιομηχανικά Συστήματα Ελέγχου

15	$f(t)\cos \omega t$	$\frac{1}{2}F(s-j\omega)+\frac{1}{2}F(s+j\omega)$
16	$f(\alpha t)$	$\frac{F\left(\frac{s}{\alpha}\right)}{\alpha}$
17	$\frac{f(t)}{t^n}$	$\int_s^\infty \dots \int_s^\infty F(s)(ds)^n$
18	$\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$, Θεώρημα αρχικής τιμής
19	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$, Θεώρημα τελικής τιμής

2.2 Μετασχηματισμοί Laplace βασικών συναρτήσεων.

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται οι μετασχηματισμοί Laplace βασικών συναρτήσεων.

A/A	$F(s) = LT\{f(t)\}$	$f(t) = ILT\{F(s)\}$
1	1	$\delta(t)$
2	$\frac{1}{s}$	$u(t)$
3	$\frac{1}{s^2}$	t
4	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}$, n Θετικός αριθμός
5	s	$\frac{d\delta(t)}{dt} = \delta^{(1)}(t)$
6	s^n	$\delta^{(n)}(t)$, n Θετικός αριθμός
7	$\frac{1}{\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
8	$\frac{1}{s^{n+1/2}}$	$\frac{2^n t^{n-1/2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)\pi^{1/2}}$
9	$\frac{e^{-\alpha s}}{s}$	$u(t-\alpha)$
10	$\frac{1}{s}(1-e^{-\alpha s})$	$u(t)-u(t-\alpha)$
11	$\frac{1}{s+\alpha}$	$e^{-\alpha t}$
12	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1} \cdot e^{-\alpha t}$, n Θετικός αριθμός

Βιομηχανικά Συστήματα Ελέγχου

13	$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1-e^{-at}}{a}$
14	$\frac{1}{s(s+\alpha)(s+\beta)}$	$1-\frac{\beta}{\beta-\alpha}e^{-\alpha t}+\frac{\alpha}{\beta-\alpha}e^{-\beta t}$
15	$\frac{s+\gamma}{s(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{1}{\alpha\beta}\left(\gamma-\frac{\beta(\gamma-\alpha)}{\beta-\alpha}e^{-\alpha t}+\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\beta-\alpha}e^{-\beta t}\right)$
16	$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}}{\beta-\alpha}$
17	$\frac{s}{(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{\alpha e^{-\alpha t}-\beta e^{-\beta t}}{\alpha-\beta}$
18	$\frac{s+\gamma}{(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{(\gamma-\alpha)e^{-\alpha t}-(\gamma-\beta)e^{-\beta t}}{\beta-\alpha}$
19	$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)}$	$\frac{e^{-\alpha t}}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}+\frac{e^{-\beta t}}{(\gamma-\beta)(\alpha-\beta)}+\frac{e^{-\gamma t}}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}$
20	$\frac{s+\delta}{(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)}$	$\frac{(\delta-\alpha)e^{-\alpha t}}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}+\frac{(\delta-\beta)e^{-\beta t}}{(\gamma-\beta)(\alpha-\beta)}+\frac{(\delta-\gamma)e^{-\gamma t}}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}$
21	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin \omega t$
22	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos \omega t$
23	$\frac{s+\alpha}{s^2+\omega^2}$	$\frac{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}{\omega}\sin(\omega t+\varphi), \varphi=\tan^{-1}\frac{\omega}{\alpha}$
24	$\frac{s\cdot\sin\alpha+\omega\cdot\cos\alpha}{s^2+\omega^2}$	$\sin(\omega t+\alpha)$
25	$\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}$	$\frac{1-\cos\omega t}{\omega^2}$
26	$\frac{s+\alpha}{s(s^2+\omega^2)}$	$\frac{\alpha}{\omega^2}-\frac{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}{\omega^2}\cos(\omega t+\varphi), \varphi=\tan^{-1}\frac{\omega}{\alpha}$
27	$\frac{1}{(s+\alpha)(s^2+\omega^2)}$	$\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha^2+\omega^2}+\frac{1}{\omega\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}\sin(\omega t-\varphi), \varphi=\tan^{-1}\frac{\omega}{\alpha}$
28	$\frac{1}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	$\frac{e^{-\alpha t}\sin\beta t}{\beta}$
29	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	$e^{-\alpha t}\cos\beta t$
30	$\frac{s+\gamma}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	$\frac{\sqrt{(\gamma+\alpha)^2+\beta^2}}{\beta}e^{-\alpha t}\sin(\beta t+\varphi), \varphi=\tan^{-1}\frac{\beta}{\gamma-\alpha}$

31	$\frac{1}{s[(s+\alpha)^2+\beta^2]}$	$\frac{1}{\alpha^2+\beta^2} + \frac{1}{\beta\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} e^{-\alpha t} \sin(\beta t - \varphi), \varphi = \tan^{-1} \frac{\beta}{-\alpha}$
32	$\frac{s+\gamma}{s[(s+\alpha)^2+\beta^2]}$	$\frac{\gamma}{\alpha^2+\beta^2} + \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{(\gamma-\alpha)^2+\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}} e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi),$ $\varphi = \tan^{-1} \frac{\beta}{\gamma-\alpha} - \tan^{-1} \frac{\beta}{-\alpha}$
33	$\frac{1}{s^2(s+\alpha)}$	$\frac{1}{\alpha^2} (\alpha t - 1 + e^{-\alpha t})$
34	$\frac{1}{s(s+\alpha)^2}$	$\frac{1}{\alpha^2} (1 - e^{-\alpha t} - \alpha t e^{-\alpha t})$
35	$\frac{s+\beta}{s(s+\alpha)^2}$	$\frac{1}{\alpha^2} (\beta - \beta e^{-\alpha t} + \alpha(\alpha - \beta) t e^{-\alpha t})$
36	$\frac{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}{s(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{\alpha_0}{\alpha\beta} + \frac{\alpha^2 - \alpha_1\alpha + \alpha_0}{\alpha(\alpha - \beta)} e^{-\alpha t} - \frac{\beta^2 - \alpha_1\beta + \alpha_0}{\beta(\alpha - \beta)} e^{-\beta t}$
37	$\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega^3} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$
38	$\frac{1}{(s^2 - \omega^2)}$	$\frac{1}{\omega} \sinh \omega t$
39	$\frac{1}{(s+\alpha)^2(s+\beta)}$	$\frac{1}{(\beta-\alpha)^2} [(\beta-\alpha)t - 1] e^{-\alpha t} + e^{-\beta t}$
40	$\frac{1}{s^2(s^2 + \omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^3} (\omega t - \sin \omega t)$
41	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{t}{2\omega} \sin \omega t$
42	$\frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega} (\omega t \cos \omega t + \sin \omega t)$
43	$\frac{s^n}{(s^2 + \omega^2)^{n+1}}$	$\frac{t^n \sin \omega t}{n! 2^n \omega}$
44	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$t \cos \omega t$

Παράρτημα 3^ο : Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός είναι η διαδικασία υπολογισμού της συναρτήσεως $f(t)$ όταν γνωρίζουμε την συνάρτηση $F(s)$.

3.1 Περίπτωση διακεκριμένων πόλων .

Έστω η συνάρτηση

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \quad m < n$$

Γράφουμε τη συνάρτηση στην παρακάτω μορφή αφού υπολογίσουμε τις ρίζες του παρονομαστή που ονομάζονται και πόλοι της συνάρτησης.

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)} = \frac{k_1}{s+p_1} + \frac{k_2}{s+p_2} + \dots + \frac{k_n}{s+p_n}$$

Υπολογίζουμε τις τιμές των συντελεστών k_i από τη σχέση $k_i = \lim_{s \rightarrow -p_i} F(s) \cdot (s+p_i)$.

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace και το μετασχηματισμό Laplace των βασικών συναρτήσεων γίνεται:

$$f(t) = k_1 e^{-p_1 t} + k_2 e^{-p_2 t} + \dots + k_n e^{-p_n t}$$

$$p_1, p_2, \dots, p_n \text{ και } z_1, z_2, \dots, z_m$$

είναι είτε πραγματικοί είτε μιγαδικοί αριθμοί.

3.2 Περίπτωση πολλαπλών πόλων.

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \quad m < n$$

Εάν η συνάρτηση

έχει πολλαπλές ρίζες (πόλους), τότε οι συντελεστές k_{ij} που αντιστοιχούν στην πολλαπλή ρίζα υπολογίζονται ως εξής :

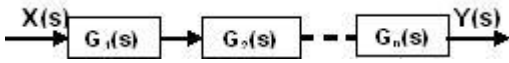
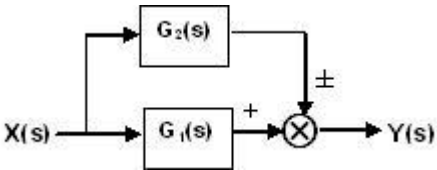
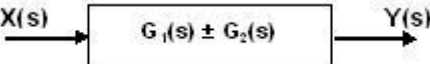
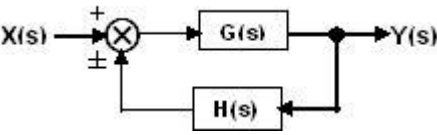
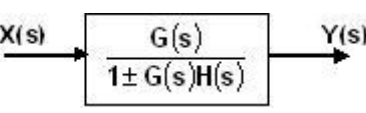
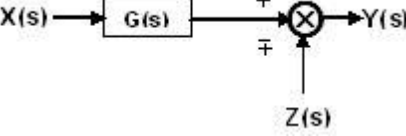
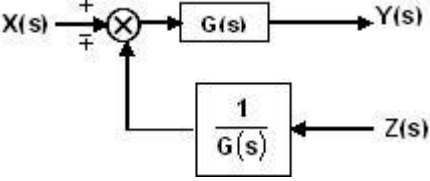
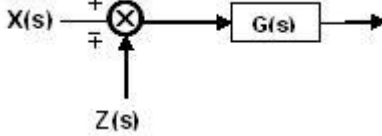
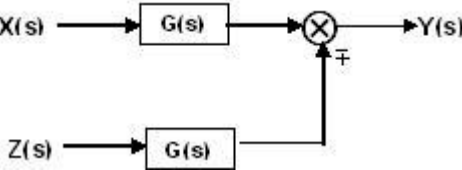
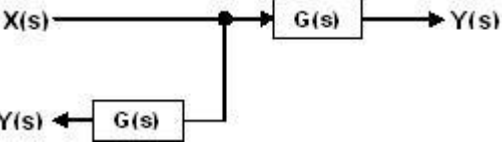
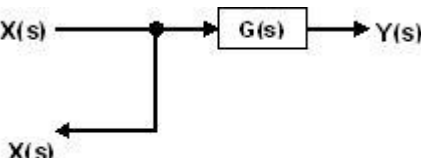
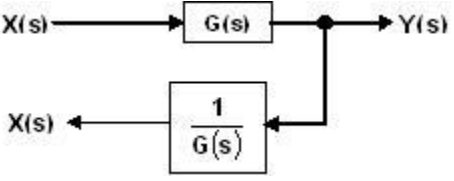
$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)} = \frac{k_{11}}{s+p_1} + \frac{k_{12}}{(s+p_1)^2} + \dots + \frac{k_{1r}}{(s+p_1)^r} + \frac{k_2}{s+p_2} + \dots + \frac{k_n}{s+p_n}$$

$$k_{ij} = \frac{1}{(r-j)!} \lim_{s \rightarrow -p_i} \left[\frac{d^{(r-j)}}{ds^{(r-j)}} (F(s) \cdot (s+p_i)^r) \right]$$

- ❖ όπου i , εκφράζει την ρίζα (απλή ή πολλαπλή) της οποίας τον συντελεστή υπολογίζουμε.
- ❖ όπου j , εκφράζει την θέση του συντελεστή k της πολλαπλής ρίζας με τιμές από 1 μέχρι r .
- ❖ όπου r , ο αριθμός που εκφράζει την πολλαπλότητα της ρίζας.

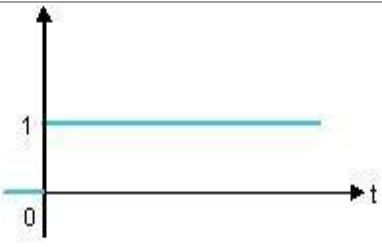
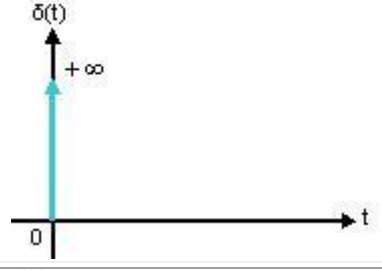
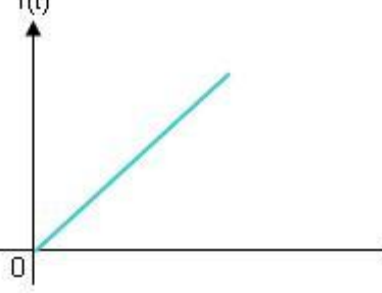
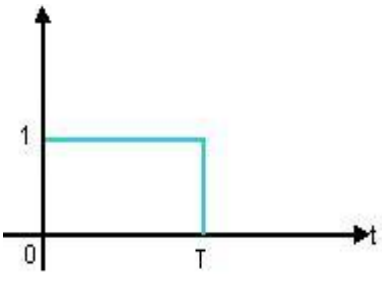
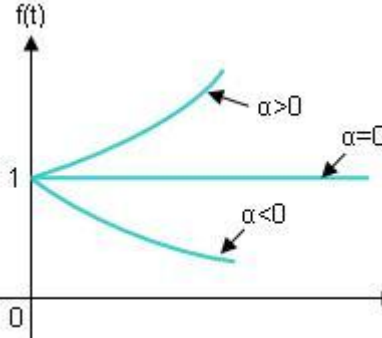
Παράρτημα 4^ο: Μετασχηματισμοί δομικών διαγραμμάτων.

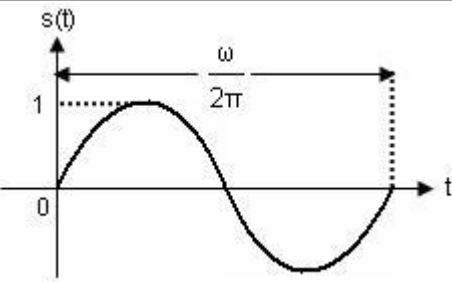
Οι μετασχηματισμοί των δομικών διαγραμμάτων παρουσιάζονται στον πίνακα που ακολουθεί.

α/α	ΑΡΧΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ	ΙΣΟΔΥΝΑΜΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

Παράρτημα 5^ο: Τυποποιημένα σήματα εισόδου.

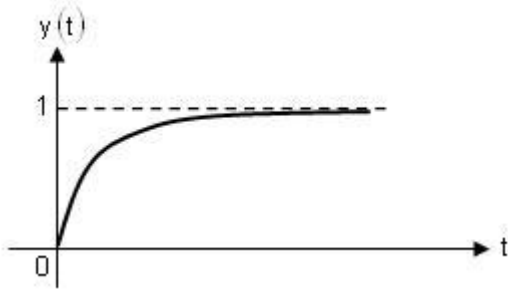
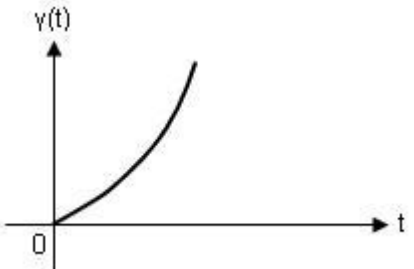
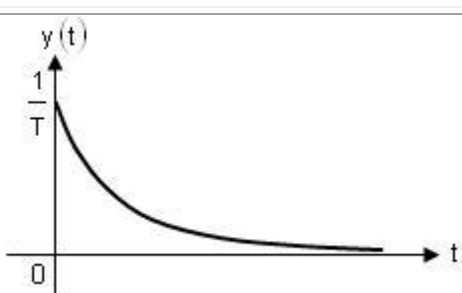
Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται τα τυποποιημένα σήματα εισόδου.

A/A	ΟΝΟΜΑΣΙΑ	ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ	ΕΞΙΣΩΣΗ	ΜΕΤΑΣΧΗΜ. LAPLACE
1	ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ ΒΗΜΑΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $u(t)$		$u(t) = \begin{cases} 1, t > 0 \\ 0, t < 0 \\ \text{απροσδιόριστη}, t = 0 \end{cases}$	$U(s) = \frac{1}{s}$
2	ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ ΒΗΜΑΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $\delta(t)$		$\delta(t) = \begin{cases} 0, \forall t \text{ πλην } t = 0 \\ \infty, t = 0 \end{cases}$	$D(s) = 1$
3	ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ ΑΝΑΡΡΙΧΗΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $r(t)$		$r(t) = \begin{cases} t, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$	$R(s) = \frac{1}{s^2}$
4	ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΥΛΗΣ $g(t)$		$g(t) = \begin{cases} 1, t \in (0, T) \\ 0, t \notin (0, T) \\ \text{απροσδιόριστη}, t = 0, t = T \end{cases}$ ή $g(t) = u(t) - u(t - T)$	$G(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-Ts}$
5	ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(t)$		$f(t) = e^{\alpha t}$	$F(s) = \frac{1}{s - \alpha}$

6	ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(t)$		$f(t) = \sin \omega t$	$F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
---	---	---	------------------------	--

Παράρτημα 6^ο: Χρονική απόκριση συστημάτων 1^{ης} τάξης.

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζεται η χρονική απόκριση συστημάτων πρώτης τάξης.

A/A	ΕΙΔΟΣ ΔΙΕΓΕΡΣΗΣ	ΧΡΟΝΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ
1	ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ ΒΑΘΜΙΔΑ $x(t) = u(t) = 1$	$y(t) = 1 - e^{-t/T}$ 
2	ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ ΑΝΑΡΡΙΧΗΣΗ $x(t) = r(t) = t$	$y(t) = t - T + Te^{-t/T}$ 
3	ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ ΚΡΟΥΣΗ $x(t) = \delta(t)$	$y(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T}$ 

Παράρτημα 7^ο: Χρονική απόκριση συστημάτων 2^{ης} τάξης.

Η χρονική απόκριση των συστημάτων δεύτερης τάξης παρουσιάζεται στον πίνακα που ακολουθεί.

ΤΥΠΟΣ ΕΙΣΟΔΟΥ $x(t)$	ΣΤΑΘΕΡΑ ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ ζ	ΧΡΟΝΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ $y(t)$
ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ ΒΗΜΑΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $x(t)=u(t)=1$	$0 < \zeta < 1$ ΥΠΟ-ΑΠΟΣΒΕΣΗ	$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$
	$\zeta = 1$ ΚΡΙΣΙΜΗ ΑΠΟΣΒΕΣΗ	$y(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t)$
	$\zeta > 1$ ΥΠΕΡ-ΑΠΟΣΒΕΣΗ	$y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left[\cosh\left(\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} t\right) + \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \sinh\left(\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} t\right) \right]$
	$\zeta = 0$ ΜΗΔΕΝΙΚΗ ΑΠΟΣΒΕΣΗ	$y(t) = 1 - \cos\omega_n t$
ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ ΑΝΑΡΡΙΧΗΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $x(t)=r(t)=t$	$0 \leq \zeta < 1$ ΥΠΟ-ΑΠΟΣΒΕΣΗ	$y(t) = t - \frac{2\zeta}{\omega_n} + \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + 2\tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$
	$\zeta = 1$ ΚΡΙΣΙΜΗ ΑΠΟΣΒΕΣΗ	$y(t) = t - \frac{2\zeta}{\omega_n} + \frac{2}{\omega_n} e^{-\omega_n t} \left(1 + \frac{\omega_n t}{2}\right)$
	$\zeta > 1$ ΥΠΕΡ-ΑΠΟΣΒΕΣΗ	$y(t) = t - \frac{2\zeta}{\omega_n} + \frac{2\zeta^2 - 1 - 2\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + \frac{2\zeta^2 - 1 + 2\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}$
ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ ΚΡΟΥΣΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $x(t)=\delta(t)$	$0 < \zeta < 1$ ΥΠΟ-ΑΠΟΣΒΕΣΗ	$y(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \cdot \sin\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t$
	$\zeta = 1$ ΚΡΙΣΙΜΗ ΑΠΟΣΒΕΣΗ	$y(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t}$
	$\zeta > 1$ ΥΠΕΡ-ΑΠΟΣΒΕΣΗ	$y(t) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} - \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}$

Παράρτημα 8^ο: Προδιαγραφές μεταβατικής απόκρισης.

A/A	ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ - ΤΥΠΟΣ - ΟΝΟΜΑΣΙΑ
1	$t_r = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \tan^{-1} \left(-\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right)$: Χρόνος ανύψωσης
2	$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$: Χρόνος κορυφής
3	$\left. \begin{array}{l} t_s = \frac{\pi}{\zeta \omega_n} \text{ για } (\pm 2\%) \\ \text{ή} \\ t_s = \frac{3}{\zeta \omega_n} \text{ για } (\pm 5\%) \end{array} \right\}$: Χρόνος αποκατάστασης
4	$\left. \begin{array}{l} M_p = \frac{y_m - y_f}{y_f} \cdot 100\% \\ \text{ή} \\ M_p \% = 100e^{-\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \end{array} \right\}$: Ποσοστό υπερύψωσης
5	$y_m = 1 - e^{-\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$: Μέγιστη τιμή της απόκρισης
6	$\zeta = \frac{ \ln(M_p - 1) }{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(M_p - 1)}}$: Σχέση μεταξύ ζ και M_p
7	$\omega_n = \frac{\pi}{t_p \sqrt{1-\zeta^2}}$: Σχέση μεταξύ ω_n και t_p
8	$\omega_n = \frac{\pi}{t_p \sqrt{\frac{\pi^2 - 2\ln^2(M_p - 1)}{\pi^2 - \ln^2(M_p - 1)}}}$: Σχέση μεταξύ ω_n και M_p
9	$s_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} = \frac{\pi}{t_p} \left(-\frac{\ln(M_p - 1)}{\sqrt{\pi^2 - 2\ln^2(M_p - 1)}} \pm j \right)$: ρίζες της Χ.Ε.

Παράρτημα 9^ο: Αρμονική απόκριση συστημάτων 1^{ης} και 2^{ης} τάξης.

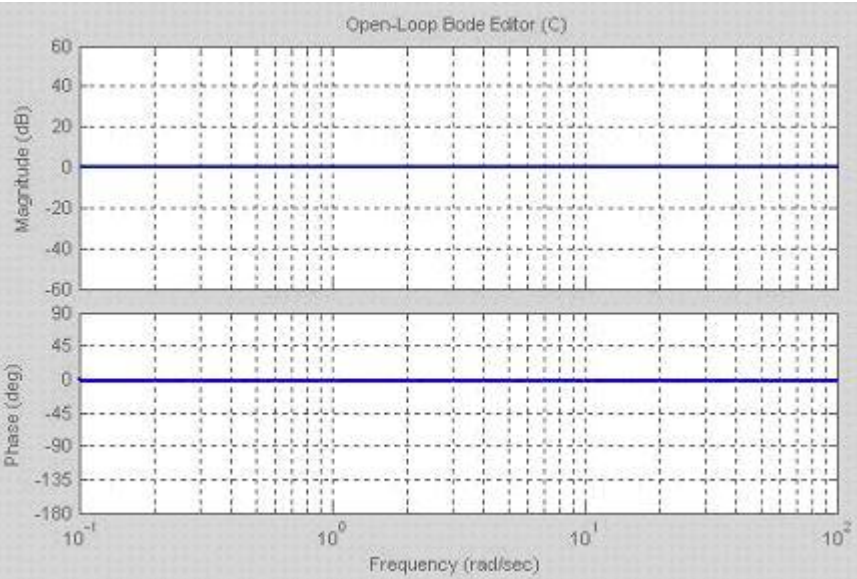
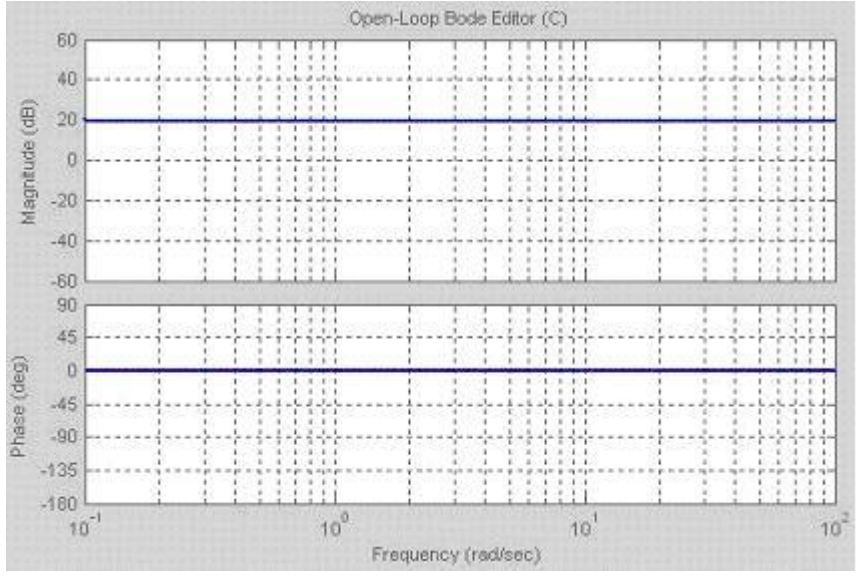
A/A	ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ	ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ	ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ
(I) ΣΥΣΤΗΜΑ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ	$G(s) = \frac{K}{T_s s + 1}$	$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega T_s + 1}$ $ G(j\omega) = K$ $\angle G(j\omega) = -\tan^{-1}\omega T_s$	$M_p = K$ $\omega_p = 0$ $\omega_b = \frac{1}{T_s} = BW$
(II) ΣΥΣΤΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ	$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n j\omega + \omega_n^2}$ $ G(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$ $\angle G(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$	$\begin{cases} M_p = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}, \zeta < 0.707 \\ M_p = 1, \zeta \geq 0.707 \end{cases}$ $\omega_p = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2}, \zeta < 0.707$ $\omega_b = BW = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2 + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}}$ $\frac{\omega_p}{\omega_d} = \sqrt{\frac{1-2\zeta^2}{1-\zeta^2}}$

Συστήματα Αυτόματου Ελέγχου (Σ.Α.Ε. Ι)

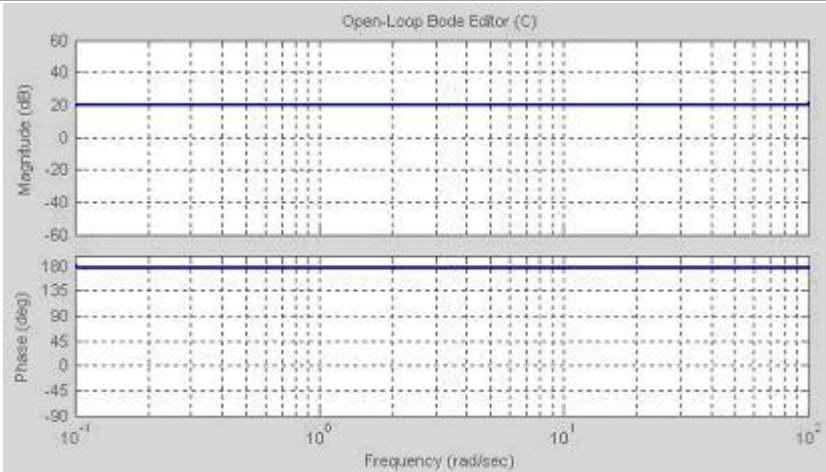
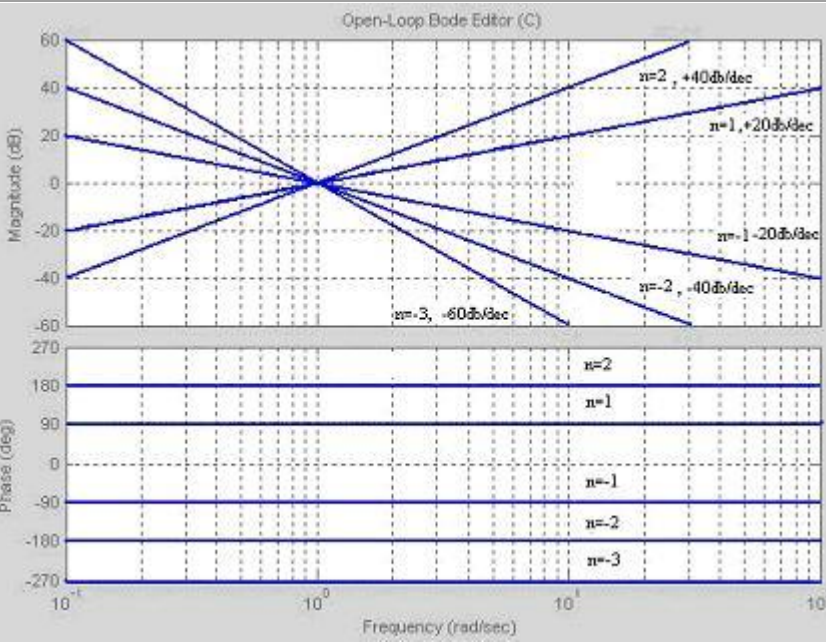
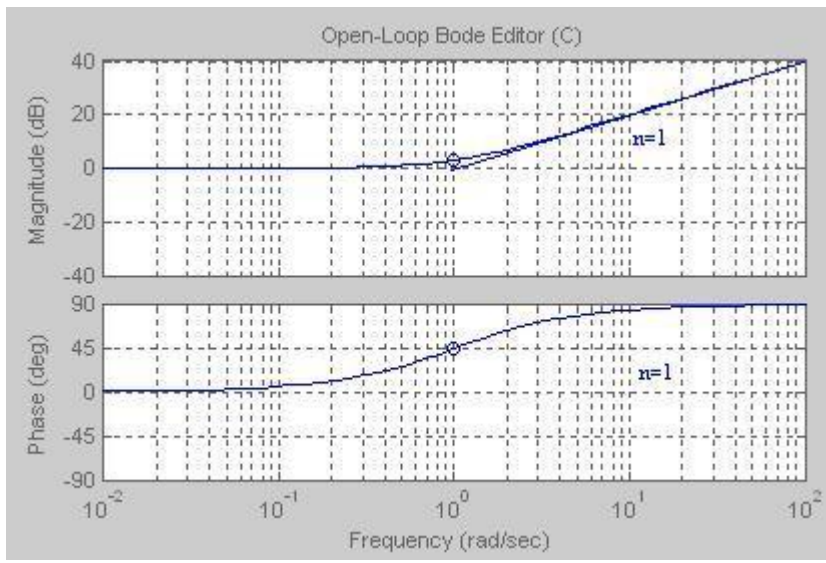
$$|G(j\omega_b)| = 0.707$$

ΙΣΧΥΕΙ ΓΕΝΙΚΑ: $|G(j\omega_p)| = M_p$

Παράρτημα 10^ο: Διάγραμμα BODE βασικών παραγόντων.

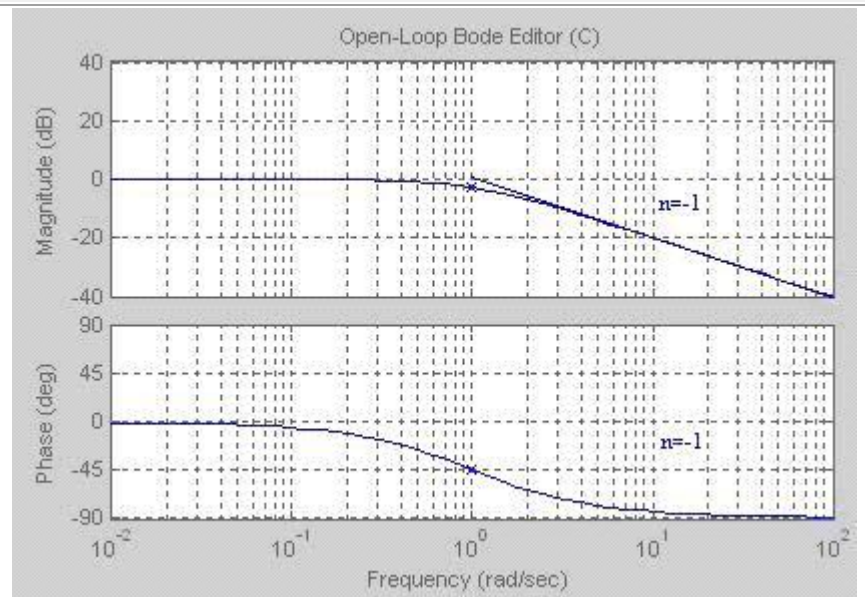
Α/Α	ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ (ΠΛΑΤΟΣ/ΦΑΣΗ)	ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΠΛΑΤΟΥΣ - ΦΑΣΗΣ
1	Σταθερός όρος K $M = 20 \log K$ $\Phi = \begin{cases} 0^\circ, & K > 0 \\ 180^\circ, & K < 0 \end{cases}$	 

Συστήματα Αυτόματου Ελέγχου (Σ.Α.Ε. Ι)

		
2	Όρος της μορφής $(j\omega)^{\pm n}$ $M = \pm 20n \log \omega$ $\varphi = \pm 90^\circ n$	
3	Όρος της μορφής $(j\omega T + 1)^{\pm n}$ $M = \pm 20n \log \sqrt{1 + (\omega T)^2}$ ή $M = \begin{cases} 0 & , \omega \ll 1/T \\ \pm 3n & , \omega = 1/T \\ \pm 20n \log \omega T & , \omega \gg 1/T \end{cases}$ $\varphi = \pm n \tan^{-1} \omega T$ ή	

Συστήματα Αυτόματου Ελέγχου (Σ.Α.Ε. Ι)

$$\varphi = \begin{cases} 0 & , \omega = 0 \\ \pm 45^\circ n & , \omega T = 1 \\ \pm 90^\circ n & , \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$



4

Όρος της μορφής

$$\left[\left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 + 2\zeta \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + 1 \right]^{\pm n}$$

$$M = \pm 20 \log \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right)^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$$

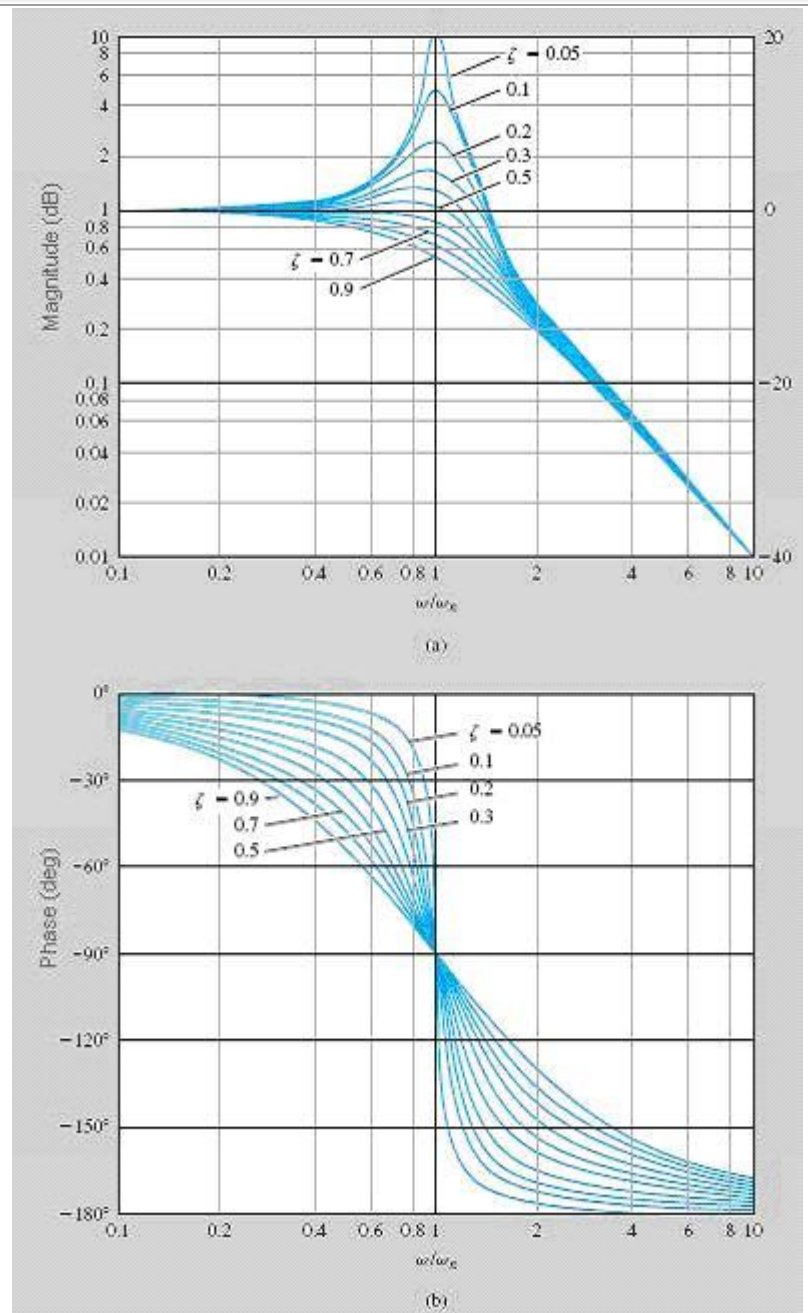
ή

$$M = \begin{cases} 0 & , \frac{\omega}{\omega_n} \ll 1 \\ \pm 40 \log \frac{\omega}{\omega_n} & , \frac{\omega}{\omega_n} \gg 1 \\ \pm 20 \log \left| 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right| & , \zeta = 1 \\ \pm 20 \log \left| 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right| & , \zeta = 0 \end{cases}$$

$$\varphi = \pm 90^\circ n$$

ή

$$\varphi = \begin{cases} 0^\circ & , \frac{\omega}{\omega_n} = 0 \\ \pm 90^\circ, \frac{\omega}{\omega_n} = 1 \\ \pm 180^\circ, \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$



Παράρτημα 11^ο: Περιθώριο ενίσχυσης και φάσης.

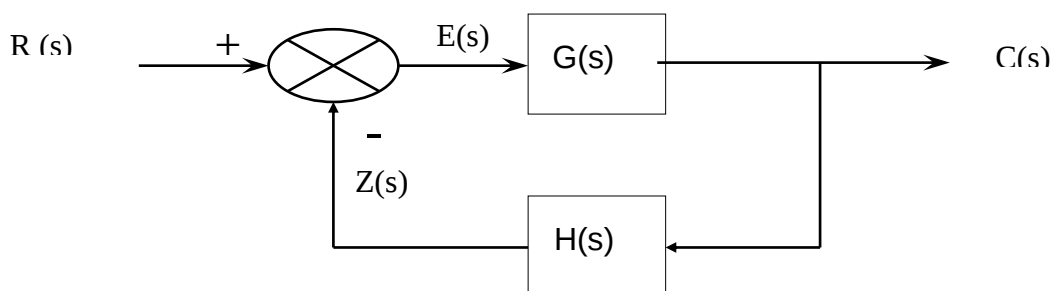
A/A	ΟΝΟΜΑΣΙΑ	ΤΥΠΟΣ - ΣΧΟΛΙΑ
1	ΠΕΡΙΘΩΡΙΟ ΕΝΙΣΧΥΣΗΣ (Kg)	$K_g(\text{db}) = -20 \log G(j\omega_c)H(j\omega_c) $ $\varphi(\omega_c) = -180^\circ$ Για $K_g > 0 \Rightarrow$ Ευσταθές το κλειστό σύστημα
2	ΠΕΡΙΘΩΡΙΟ ΦΑΣΗΣ (φ_α)	$\varphi_\alpha = 180^\circ + \varphi$ $\varphi : G(j\omega_1)H(j\omega_1) = 1$ Για $(\varphi_\alpha) > 0 \Rightarrow$ Ευσταθές το κλειστό σύστημα

Παράρτημα 12^ο: Γεωμετρικός Τόπος Ριζών(Γ.Τ.Ρ.)

Ο (Γ.Τ.Ρ) είναι μια γραφική απεικόνιση των θέσεων των πόλων του κλειστού συστήματος στο μιγαδικό επίπεδο-S για όλες τις τιμές της παραμέτρου K (κέρδος) του συστήματος.

Είναι γνωστό ότι οι θέσεις των πόλων της συνάρτησης μεταφοράς στο μιγαδικό επίπεδο επηρεάζουν τη μεταβατική απόκριση του συστήματος καθώς και την ευστάθειά του.

Για το σύστημα κλειστού βρόγχου όπως αυτό εικονίζεται στο σχήμα που ακολουθεί ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:



Σχήμα 2.13

$$G_{ολ}(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ (Σ.Μ.)

$G(s)$ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ (Σ.Μ.) ΤΟΥ ΚΛΑΔΟΥ ΔΡΑΣΗΣ

$H(s)$ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ (Σ.Μ.) ΤΟΥ ΚΛΑΔΟΥ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ

$G(s)H(s)$ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ (Σ.Μ.) ΑΝΟΙΚΤΟΥ ΒΡΟΓΧΟΥ

$1 + G(s)H(s)$ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ

$1 + G(s)H(s) = 0$ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ (Χ.Ε)

Αν η συνάρτηση μεταφοράς (Σ.Μ) ανοικτού βρόγχου είναι της μορφής:

$$G(s)H(s) = K \frac{(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} = K \frac{N(s)}{D(s)}$$

τότε η Σ.Μ του συστήματος θα είναι:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{G(s)}{1 + K \frac{N(s)}{D(s)}} = \frac{G(s)D(s)}{D(s) + KN(s)}$$

Συστήματα Αυτόματου Ελέγχου (Σ.Α.Ε. Ι)

από την παραπάνω σχέση παρατηρούμε ότι η μεταβολή των τιμών της παραμέτρου K επηρεάζει τις τιμές των ριζών της Χ.Ε του συστήματος με αποτέλεσμα τη μετατόπισή τους πάνω στο μιγαδικό επίπεδο. Αυτό μας επιτρέπει να δημιουργήσουμε ένα διάγραμμα πάνω στο μιγαδικό επίπεδο που θα είναι το σύνολο των σημείων που θα είναι ρίζες της Χ.Ε. του συστήματος αν η παράμετρος K πάρει όλες τις τιμές από το 0 μέχρι το $+\infty$.

Το διάγραμμα που προκύπτει όταν το K πάρει τιμές μεταξύ του $-\infty$ και του μηδενός ονομάζεται συμπληρωματικός Γ.Τ.Ρ.. Από την Χ.Ε προκύπτουν τα παρακάτω:

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

$$G(s)H(s) = -1$$

$$|G(s)H(s)| = 1$$

$$\angle(G(s)H(s)) = (2\mu + 1)\pi, \quad \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{ Συνθήκη φάσης για το Γ.Τ.Ρ.}$$

$$|K| \frac{\prod_{i=1}^m |s + z_i|}{\prod_{j=1}^n |s + p_j|} = 1 \quad \text{Συνθήκη μέτρου για το Γ.Τ.Ρ.}$$

Η παραπάνω σχέση μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την τιμή του K πάνω στο διάγραμμα.

12.1 Κανόνες προσεγγιστικής χάραξης του Γ.Τ.Ρ

- 1.) Οι πόλοι της είναι τα σημεία εκκίνησης του Γ.Τ.Ρ.
- 2.) Τα μηδενικά (zeros) της $G(s)H(s)$ και το άπειρο όταν $m < n$ είναι τα σημεία λήξης του Γ.Τ.Ρ.
- 3.) Ο αριθμός των κλάδων του τόπου ριζών ισούται με το $\max(m, n)$ όπου m είναι το πλήθος των μηδενικών και n είναι το πλήθος των πόλων της $G(s)H(s)$.
- 4.) Ο Γ.Τ.Ρ. είναι συμμετρικός ως προς τον άξονα των πραγματικών αριθμών.
- 5.) Το σημείο τομής των ασύμπτωτων ευθειών με τον άξονα των πραγματικών αριθμών δίδεται από την σχέση.

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m}$$

όπου $\sum_{i=1}^n p_i$ = το άθροισμα των τιμών των πόλων της $G(s)H(s)$

όπου $\sum_{j=1}^m z_j$ = το άθροισμα των τιμών των μηδενικών της

$$G(s)H(s)$$

- 6.) Οι γωνίες που σχηματίζουν οι ασύμπτωτες με τον πραγματικό άξονα δίνεται από τη σχέση.

$$\phi_{\alpha_\mu} = \frac{(2\mu+1)\pi}{n-m}, \quad \mu = 0, 1, 2, \dots, ((n-m)-1) \quad K \geq 0$$

όπου $((n-m)-1)$ είναι η τελευταία τιμή του μ .

- 7.) Ένα τμήμα του άξονα των πραγματικών αριθμών μπορεί να είναι τμήμα του Γ.Τ.Ρ. αν το πλήθος των πόλων και των μηδενικών που βρίσκονται δεξιά του τμήματος είναι περιττό. (για $K \geq 0$)

- 8.) Τα σημεία αποχωρισμού και άφιξης των κλάδων από και προς τον οριζόντιο άξονα ονομάζονται σημεία θλάσης του Γ.Τ.Ρ. και υπολογίζονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$K = -\frac{D(s)}{N(s)}$$

$$\frac{dK}{ds} = 0 \quad \text{ή} \quad D'(s)N(s) - N'(s)D(s) = 0$$

κάθε ρίζα της παραπάνω εξίσωσης αποτελεί ένα δεκτό σημείο θλάσης αν είναι ταυτόχρονα και ρίζα της Χ.Ε. του συστήματος για κάποια τιμή του K .

- 9.) Οι γωνίες αναχώρησης του Γ.Τ.Ρ. από μιγαδικό πόλο ή άφιξης σε μιγαδικό μηδενικό υπολογίζονται από τη σχέση:

$$\angle \varphi_d = (2\mu+1)\pi - \left(\sum_{i=1}^n \varphi_{p_i} - \sum_{j=1}^m \varphi_{z_j} \right)$$

όπου:

$\sum_{i=1}^n \varphi_{p_i}$ = το αλγεβρικό άθροισμα των γωνιών που σχηματίζουν οι πόλοι ως προς τον αναφερόμενο μιγαδικό πόλο (μηδενικό).

$\sum_{j=1}^m \varphi_{z_j}$ = το αλγεβρικό άθροισμα των γωνιών που σχηματίζουν τα μηδενικά ως προς τον αναφερόμενο μιγαδικό πόλο (μηδενικό).

- 10.) Τα σημεία τομής του Γ.Τ.Ρ. με τον άξονα των φανταστικών αριθμών είναι τα σημεία $\pm j\omega_{cr}$ όπου το σύστημα μεταπίπτει από την ευστάθεια στην αστάθεια

Οι τιμές του K και του ω για τα σημεία αυτά ονομάζονται κρίσιμο κέρδος (K_{cr}) και κρίσιμη συχνότητα (ω_{cr}) αντίστοιχα.

Παράρτημα 13^ο: Κριτήριο ROUTH.

Το κριτήριο ευστάθειας Routh, προσδιορίζει τον αριθμό των πόλων της συνάρτησης μεταφοράς κλειστού βρόχου που βρίσκονται στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο-s και δίνει απάντηση στο ερώτημα «είναι το σύστημα ευσταθές;», χωρίς να προσδιορίζει τη σχετική ευστάθεια του συστήματος όπως συμβαίνει με άλλα κριτήρια όπως του Γ.Τ.Ρ. που είδαμε προηγουμένως.

Ας θεωρήσουμε ότι η Χ.Ε $1+G(s)H(s)=0$ της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος έχει τη παρακάτω γενική μορφή:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

όπου όλοι οι συντελεστές $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ και είναι $\neq 0$.

Εφ' όσον όλοι οι συντελεστές είναι ΟΜΟΣΗΜΟΙ, σχηματίζουμε τον πίνακα του Routh (σχήμα 2.14)

Πίνακας ROUTH

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
s^{n-2}	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
s^{n-3}	c_n	c_{n-1}	c_{n-2}	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
s^1	e_n	e_{n-1}	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
s^0	f_n	f_{n-1}	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$

Σχήμα 2.14

όπου οι όροι, $b_n, b_{n-1}, \dots, c_n, c_{n-1}, \dots, e_n, \dots$ κ.λ.π. υπολογίζονται ως εξής:

$$b_n = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_{n-1} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$b_{n-2} = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

$$c_n = \frac{b_n a_{n-3} - b_{n-1} a_{n-1}}{b_n}$$

Συστήματα Αυτόματου Ελέγχου (Σ.Α.Ε. Ι)

$$c_{n-1} = \frac{b_n a_{n-5} - b_{n-2} a_{n-1}}{b_n}$$

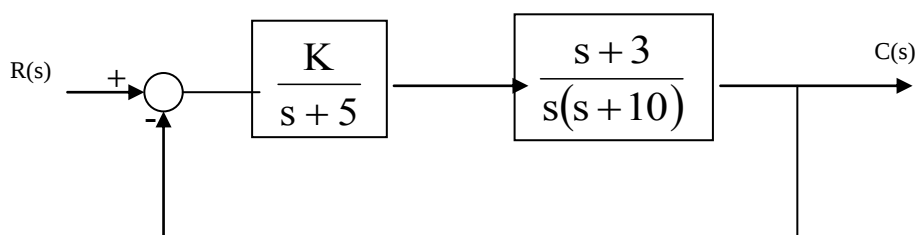
Σύμφωνα με το ΚΡΙΤΗΡΙΟ του Routh για να είναι ευσταθές ένα σύστημα πρέπει οι όροι της πρώτης στήλης του πίνακα Routh (δηλαδή οι $a_n, a_{n-1}, b_n, c_n, \dots, e_n, f_n$) να είναι ΟΜΟΣΗΜΟΙ. Ο αριθμός των ριζών της Χ.Ε που βρίσκονται στο δεξιό ημιεπίπεδο s ισούται με τον αριθμό αλλαγών του πρόσημου των συντελεστών της πρώτης στήλης του πίνακα Routh.

13.1 Ειδικές περιπτώσεις για την συμπλήρωση του πίνακα.

- Όταν ένας όρος της πρώτης στήλης είναι μηδέν, ενώ οι υπόλοιποι όροι της σειράς είναι διάφοροι του μηδενός ή δεν υπάρχουν, τότε, αντικαθίσταται ο μηδενικός όρος, από ένα πολύ μικρό αριθμό ομόσημο με τους προηγούμενους της πρώτης στήλης, και συνεχίζεται η ανάπτυξη του πίνακα.
- Όταν όλοι οι όροι μίας σειράς του πίνακα Routh είναι μηδενικοί, ο πίνακας συμπληρώνεται με την τοποθέτηση, αντί των μηδενικών όρων με τους όρους της παραγωγισμένης βοηθητικής εξίσωσης της αμέσως προηγούμενης σειράς.
- Όταν τουλάχιστον δύο σειρές έχουν μηδενικούς όρους, τότε το σύστημα είναι ασταθές και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει δύο αντίθετους πραγματικούς πόλους με πολλαπλότητα 2.
- Για την εύρεση της κρίσιμης (οριακής) τιμής του K για ευστάθεια αρκεί να μηδενιστεί ο όρος της σειράς s^1 και να λυθεί η εξίσωση ως προς $K=K_{cr}$.
- Για την εύρεση της οριακής συχνότητας ταλαντώσεων του συστήματος αρκεί να λυθεί η βοηθητική εξίσωση της σειράς s^2 ως προς $\omega=\omega_{cr}$. Αυτή θα έχει τη μορφή: $\lambda_n s^2 + \lambda_{n-1} = 0$ όπου λ_n, λ_{n-1} οι συντελεστές της σειράς s^2 και όπου k θα τεθεί η τιμή K_{cr} που βρέθηκε .

Παράδειγμα:

Να σχεδιασθεί ο Γ.Τ.Ρ του εικονιζόμενου συστήματος ελέγχου για $K > 0$.



Α) Η συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόγχου είναι:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+3)}{s(s+5)(s+10)} \quad (1)$$

Συστήματα Αυτόματου Ελέγχου (Σ.Α.Ε. Ι)

Β) Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$X.E. = 1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K(s+3)}{s(s+5)(s+10)} = \frac{s(s+5)(s+10) + K(s+3)}{s(s+5)(s+10)} = 0 \Rightarrow$$

$$X.E. = s^3 + 15s^2 + (50 + K)s + 3K = 0, (2)$$

Γ) Από την (1) βρίσκω τους πόλους και τα μηδενικά και τα τοποθετώ πάνω στο μιγαδικό επίπεδο. Αυτά είναι: $Z_1 = -3$ και $P_1 = 0$, $P_2 = -5$, $P_3 = -10$.

Δ) Οι κλάδοι είναι τρεις όσοι και πόλοι.

Ε) Τα τμήματα του πραγματικού άξονα που είναι κλάδοι του Γ.Τ.Ρ. είναι εκείνα μεταξύ των σημείων $(0, -3)$ και $(-5, -10)$, διότι είναι αυτά που ικανοποιούν την ιδιότητα του να έχουν δεξιά τους περιττό αριθμό πόλων και μηδενικών.

Ζ) Το σημείο τομής των ασύμπτωτων

$$\sigma_\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m} = \frac{-10 - 5 - (-3)}{3 - 1} = \frac{-12}{2} = -6$$

ΣΤ) Οι γωνίες που σχηματίζουν οι ασύμπτωτες είναι:

$$\phi_{\alpha_\mu} = \frac{(2\mu+1)\pi}{n-m} \text{ το } \mu = 0, 1, 2, \quad ((n-m)-1) \text{ άρα το } \mu \text{ θα πάρει τις τιμές}$$

0 και 1 διότι $((n-m)-1) = 1$

$$\phi_{\alpha_0} = \frac{(2\mu+1)\pi}{n-m} = \frac{(2 \cdot 0 + 1)180}{3-1} = 90^\circ$$

$$\phi_{\alpha_1} = \frac{(2\mu+1)\pi}{n-m} = \frac{(2 \cdot 1 + 1)180}{3-1} = 270^\circ$$

Η κρίσιμη τιμή του κέρδους K θα υπολογισθεί εφαρμόζοντας το κριτήριο του ROUTH

Από τη σχέση (2) σχηματίζουμε τον πίνακα του ROUTH.

s^3	1	$50 + K$
s^2	15	$3K$
s^1	$\frac{15(50 + K) - 3K}{15}$	0
s^0	$3K$	

$$\frac{15(50 + K) - 3K}{15} \geq 0 \Rightarrow 15(50 + K) - 3K \geq 0 \Rightarrow K \geq -62,5 \dots \text{και} \dots K > 0$$

Συστήματα Αυτόματου Ελέγχου (Σ.Α.Ε. Ι)

άρα το σύστημα είναι ευσταθές για οποιαδήποτε $K > 0$ και ο Γ.Τ.Ρ δεν τέμνει τον φανταστικό άξονα.

