ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ο

Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης:

$$F(s)=\frac{s+3}{(s+1)(s^2+4s+5)}$$

ΛΥΣΗ.

$$s^2+4s+5=0$$

$$s_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2}=\frac{-4\pm 2j}{2} \quad \begin{cases} s_1=-2+j \\ s_2=-2-j \end{cases}$$

Επομένως η

$$F(s)=\frac{s+3}{(s+1)(s^2+4s+5)}=\frac{s+3}{(s+1)(s+2-j)(s+2+j)}$$

ή

$$F(s)=\frac{s+3}{(s+1)(s+2-j)(s+2+j)}\equiv\frac{K_1}{s+1}+\frac{K_2}{s+(2-j)}+\frac{K_3=\overline{K_2}}{s+(2+j)}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΥΠΟΛΟΙΠΩΝ.

$$K_1=\left[\cancel{(s+1)}\cdot\frac{(s+3)}{\cancel{(s+1)}(s^2+4s+5)}\right]_{s=-1}=\frac{-1+3}{(-1)^2+4(-1)+5}=\frac{2}{1-4+5}=\frac{2}{2}=1$$

$$K_2=\left[\cancel{(s+2-j)}\cdot\frac{(s+3)}{(s+1)\cancel{(s+2-j)}(s+2+j)}\right]_{s=-2+j}=$$

$$= \frac{(-2+j+3)}{(-2+j+1)(-2+j+2+j)} = \frac{1+j}{(-1+j)\cdot 2j} = \frac{1+j}{-2j+2j^2}$$

$$= \frac{1+j}{-2j+2(-1)} = \frac{1+j}{-2-2j} = \frac{\cancel{1+j}}{-2(\cancel{1+j})} = -\frac{1}{2} = -0,5$$

Επομένως $K_3 = \overline{K_2} = -0,5$

$$F(s') = \frac{1}{s'+1} + \frac{(-0,5)}{s'+(2-j)} + \frac{-0,5}{s'+(2+j)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{F(s') = \frac{1}{s'+1} - 0,5\frac{1}{s'+(2-j)} - 0,5\frac{1}{s'+(2+j)}}$$

ΠΕΔΙΟ s'
ΛΥΣΗ
ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ
ΕΞΙΣΩΣΗΣ.

$$L^{-1}\{F(s')\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s'+1}\right\} + L^{-1}\left\{-0,5\frac{1}{s'+(2-j)}\right\} + L^{-1}\left\{-0,5\frac{1}{s'+(2+j)}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{F(s')\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s'+1}\right\} - 0,5\,L^{-1}\left\{\frac{1}{s'+(2-j)}\right\} - 0,5\,L^{-1}\left\{\frac{1}{s'+(2+j)}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t) = e^{-t} - 0,5e^{-(2-j)t} - 0,5e^{-(2+j)t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t) = e^{-t} - 0,5e^{-2t}\cdot e^{jt} - 0,5e^{-2t}\cdot e^{-jt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t) = e^{-t} - 0{,}5\, e^{-2t}\left(e^{jt} + e^{-jt}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t) = e^{-t} - 0{,}5\, e^{-2t} \cdot 2\cos t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t) = e^{-t} - e^{-2t}\cos t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f(t) = e^{-t}\left(1 - e^{-t}\cos t\right)}$$