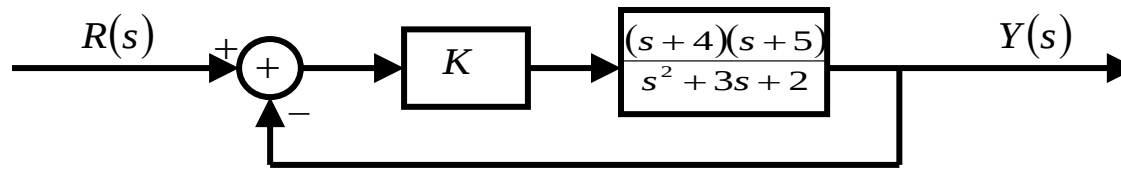
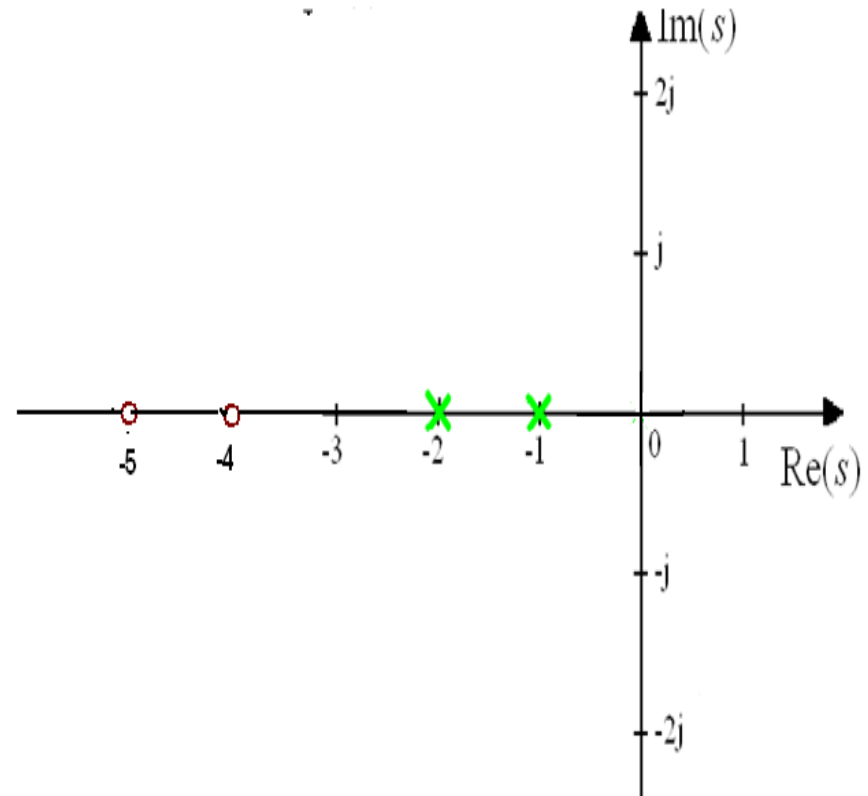


Γ.Τ.Ρ.: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1



ΒΗΜΑ 1^ο : ΑΦΟΥ ΒΡΩ ΤΟΥΣ ΠΟΛΟΥΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΗΔΕΝΙΚΑ ΤΗΣ $G_o(s)=G(s)H(s)$, ΤΑ ΣΧΕΔΙΑΖΩ ΠΑΝΩ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ-S ΣΥΜΒΟΛΙΖΟΝΤΑΣ ΤΟΥΣ ΠΟΛΟΥΣ ΜΕ (x) ΚΑΙ ΤΑ ΜΗΔΕΝΙΚΑ ΜΕ (o).

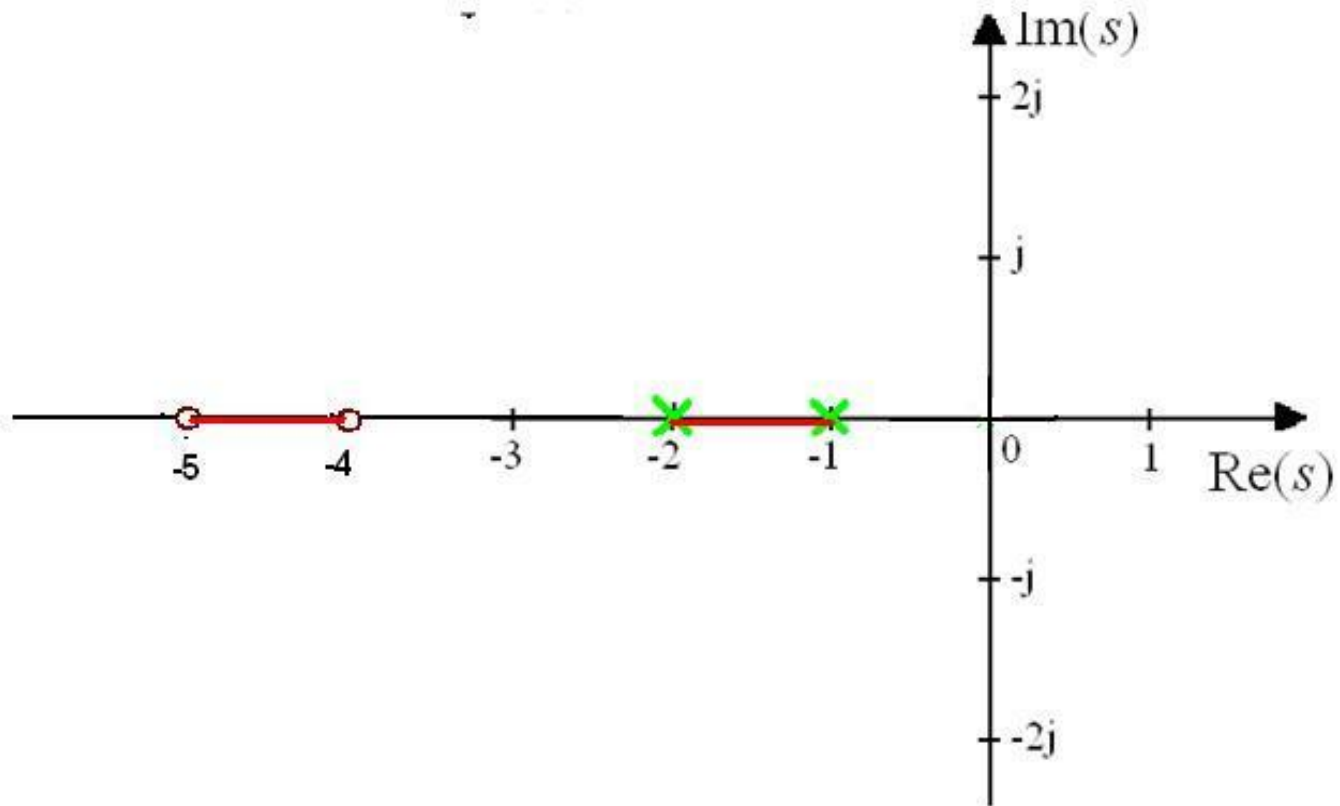
$$G_o(s) = G(s)H(s) = \frac{K(s+4)(s+5)}{(s+1)(s+2)}$$



n=2, πόλοι $-p_1 = -1; -p_2 = -2$

m=2, μηδενικά $-z_1 = -4; -z_2 = -5$

ΒΗΜΑ 2° : Ένα τμήμα του άξονα των πραγματικών αριθμών μπορεί να είναι κλάδος του Γ.Τ.Ρ. αν το πλήθος των πόλων και των μηδενικών που βρίσκονται δεξιά του κλάδου είναι περιττό. (για $K \geq 0$).



ΒΗΜΑ 3ο: Υπολογισμός των ασύμπτωτων

$$n - m = 2 - 2 = 0$$

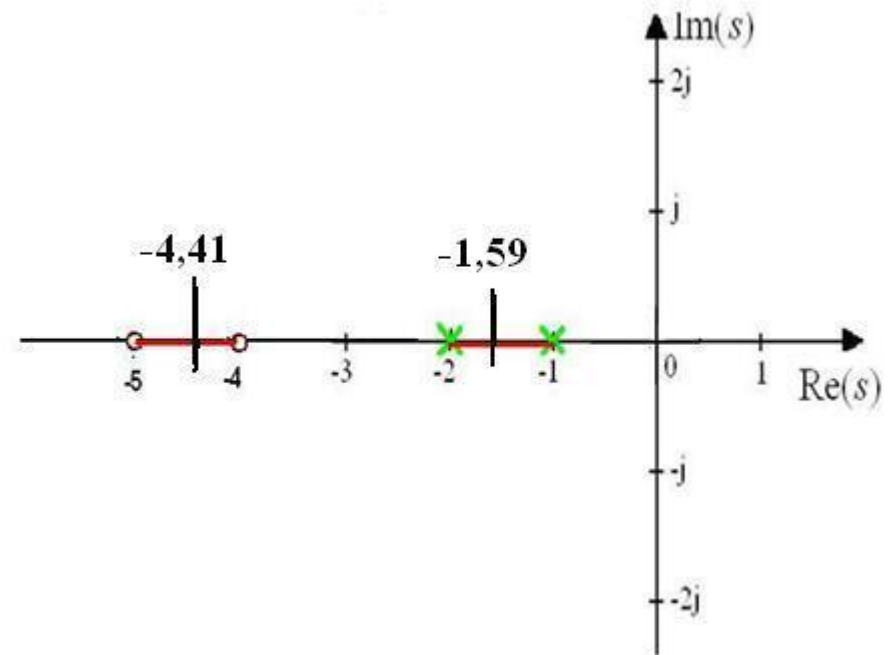
ΔΕΝ υπάρχουν ασύμπτωτες

ΒΗΜΑ 4ο: Υπολογισμός σημείων αποχώρησης

$$K = \frac{-1}{G(s)H(s)} = -\frac{(s+1)(s+2)}{(s+4)(s+5)}$$

$$\frac{dK}{ds} = 0$$

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{6(s^2 + 6s + 7)}{(s+4)^2 (s+5)^2} = 0$$



$$s^2 + 6s + 7 = 0 \Rightarrow s_1 = -1,59 \text{ και } s_2 = -4,41$$

Χαρακτηριστική εξίσωση

$$\text{X.E. } 1 + G(s)H(s) = 0 \text{ επειδή } G(s) = \frac{K(s+4)(s+5)}{(s+1)(s+2)} \text{ και } H(s) = 1 \Rightarrow$$

$$(1 + K)s^2 + (3 + 9K)s + (2 + 20K) = 0$$

Πίνακας Routh-Hurwitz

$$1 + K > 0 \Rightarrow K > -1$$

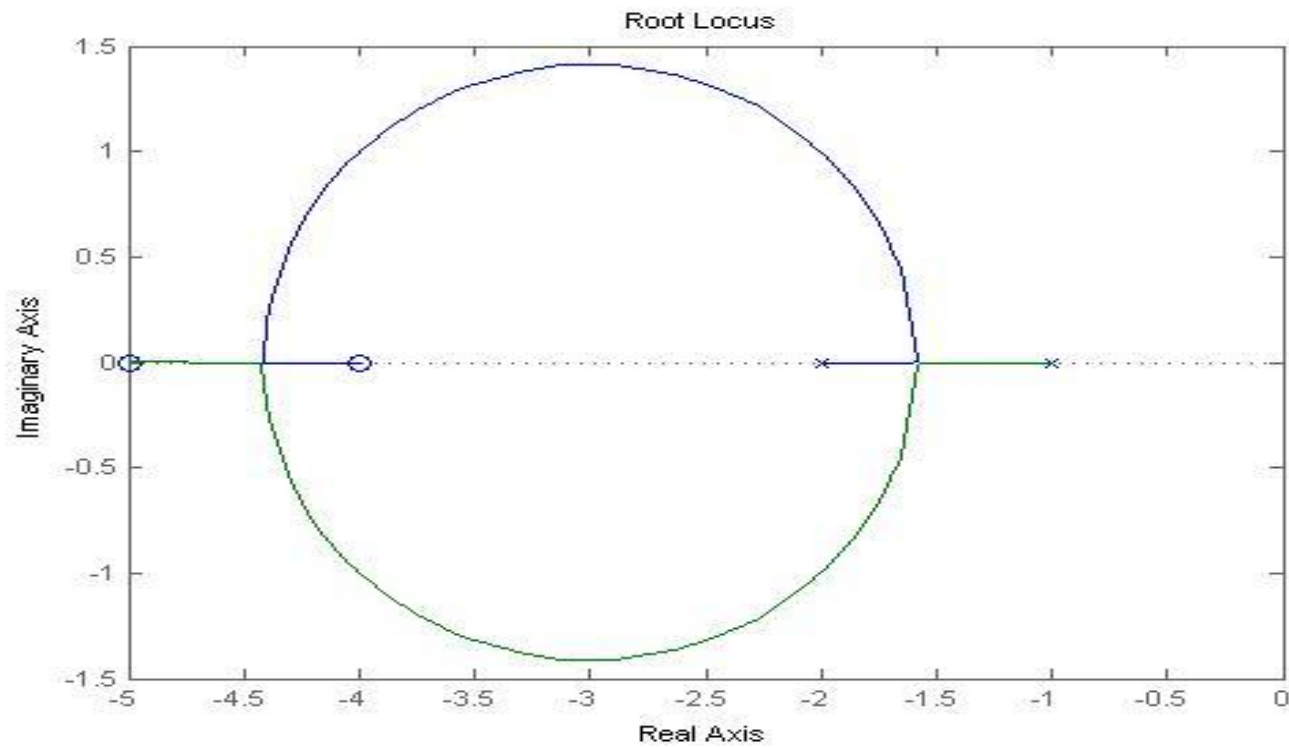
$$3 + 9K > 0 \Rightarrow K > -0,33$$

$$2 + 20K > 0 \Rightarrow K > -0,1$$

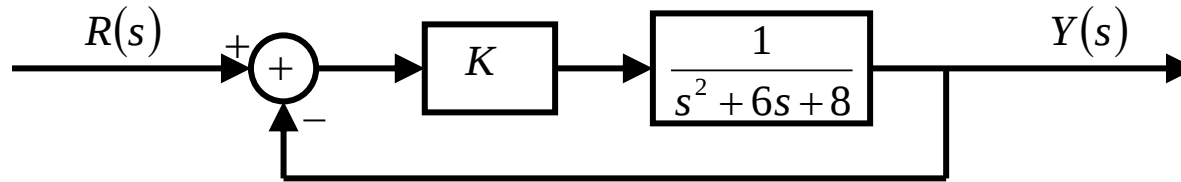
για $K > 0$

s^2	$1 + K$	$2 + 20K$	0
s^1	$3 + 9K$	0	
s^0	$2 + 20K$	0	

Σύστημα ευσταθές για: $K > 0$



Γ.Τ.Ρ.: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2



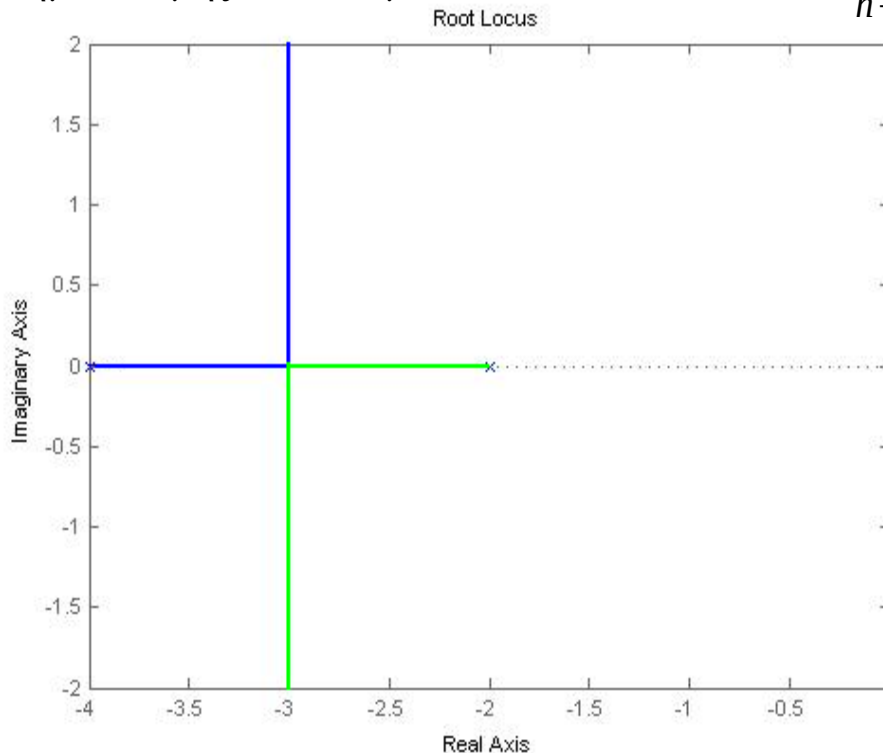
Από την $G_o(s)$ βρίσκω τους πόλους και τα μηδενικά και τα τοποθετώ πάνω στο μιγαδικό επίπεδο.

Αυτά είναι: $-p_1 = -2$, $-p_2 = -4$, $n=2$, $m=0$.

Οι κλάδοι είναι δύο, όσοι και πόλοι.

Το σημείο τομής των ασύμπτωτων:

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n (-p_i) - \sum_{j=1}^m (-z_j)}{n-m} = \frac{-2-4}{2-0} = \frac{-6}{2} = -3$$



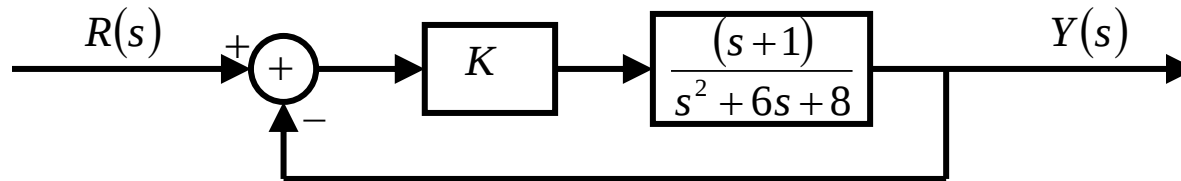
Οι γωνίες που σχηματίζουν οι ασύμπτωτες ($n-m=2$) είναι για $\rho=0,1$ ($(n-m)-1=1$):

$$\varphi_{\alpha_0} = \frac{(2\rho+1)\pi}{n-m} = \frac{(2 \cdot 0 + 1)180^\circ}{2-0} = 90^\circ$$

$$\varphi_{\alpha_1} = \frac{(2\rho+1)\pi}{n-m} = \frac{(2 \cdot 1 + 1)180^\circ}{2-0} = 270^\circ$$

Το τμήμα $-4 < \sigma < -2$ του πραγματικού άξονα είναι και τμήμα του Γ.Τ.Ρ..

Γ.Τ.Ρ.: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3



Από την $G_o(s)$ βρίσκω τους πόλους και τα μηδενικά και τα τοποθετώ πάνω στο μιγαδικό επίπεδο. Αυτά είναι: $-p_1=-2$, $-p_2=-4$, $-z_1=-1$, $n=2$, $m=1$.

Οι κλάδοι είναι δύο, όσοι και πόλοι.

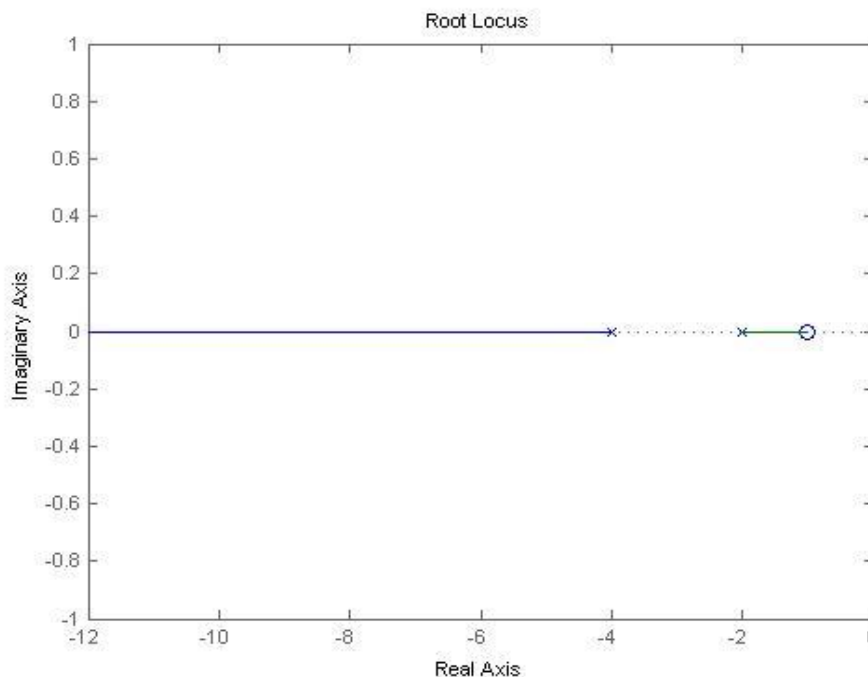
Το σημείο τομής των ασύμπτωτων:

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n (-p_i) - \sum_{j=1}^m (-z_j)}{n-m} = \frac{-2-4-(-1)}{2-1} = \frac{-5}{1} = -5$$

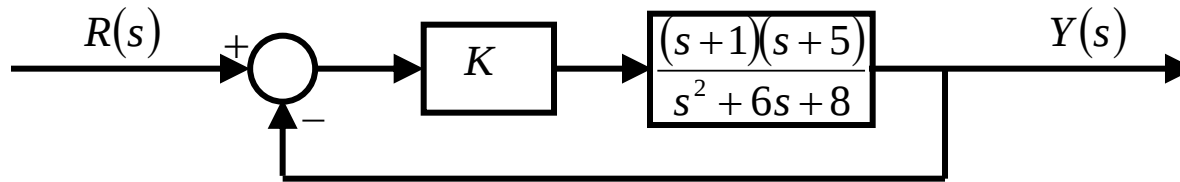
Η γωνία που σχηματίζει η ασύμπτωτη ($n-m=1$) είναι για $\rho=0$ ($(n-m)-1=0$):

$$\varphi_{a_0} = \frac{(2\rho+1)\pi}{n-m} = \frac{(2\cdot 0+1)180^\circ}{2-1} = 180^\circ$$

Τα τμήματα $\sigma < -4$ και $-2 < \sigma < -1$ του πραγματικού άξονα είναι και τμήματα του Γ.Τ.Ρ..



Γ.Τ.Ρ.: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

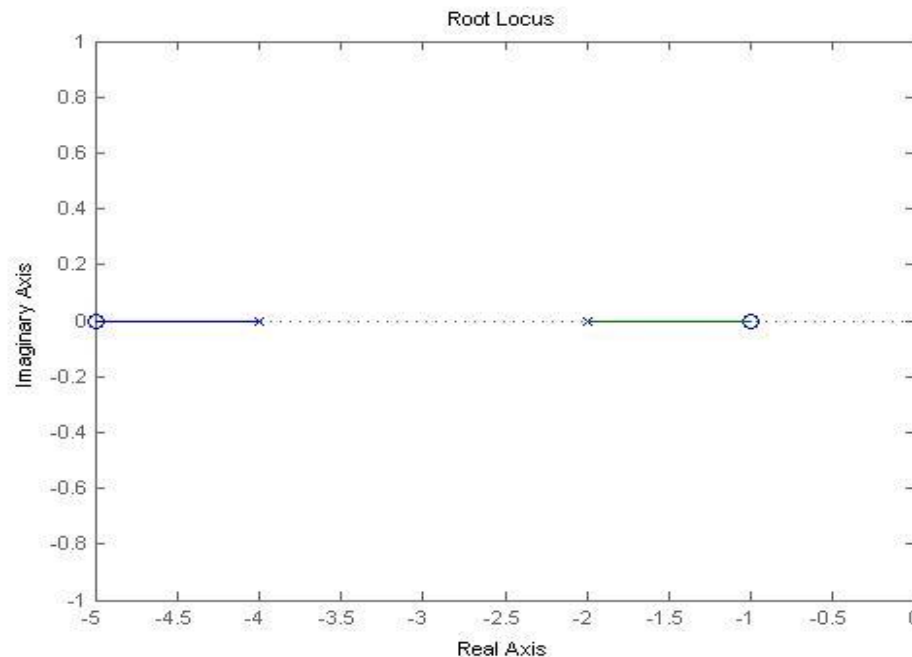


Από την $G_o(s)$ βρίσκω τους πόλους και τα μηδενικά και τα τοποθετώ πάνω στο μιγαδικό επίπεδο. Αυτά είναι: $-p_1=-2$, $-p_2=-4$, $-z_1=-1$, $-z_2=-5$, $n=2$, $m=2$.

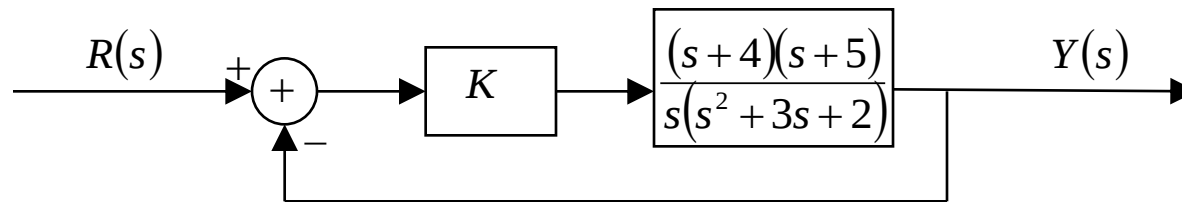
Οι κλάδοι είναι δύο, όσοι και πόλοι.

Δεν υπάρχουν ασύμπτωτες ($n-m=0$).

Τα τμήματα $-5 < \sigma < -4$ και $-2 < \sigma < -1$ του πραγματικού άξονα είναι και τμήματα του Γ.Τ.Ρ..



Γ.Τ.Ρ.: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

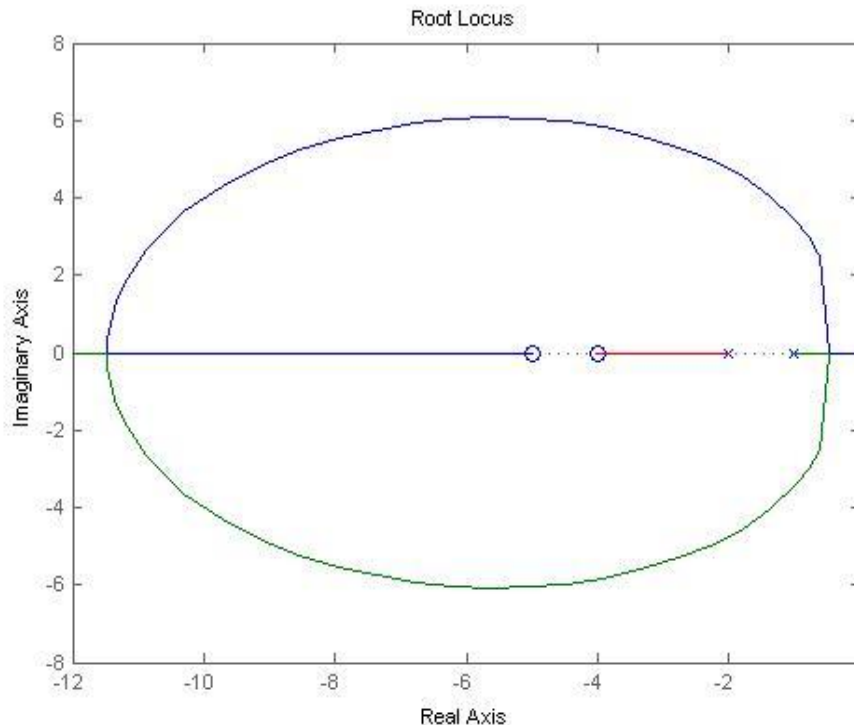


Από την $G_o(s)$ βρίσκω τους πόλους και τα μηδενικά και τα τοποθετώ πάνω στο μιγαδικό επίπεδο. Αυτά είναι: $-p_1=0$, $-p_2=-1$, $-p_3=-2$, $-z_1=-4$, $-z_2=-5$, $n=3$, $m=2$.

Οι κλάδοι είναι τρεις, όσοι και πόλοι.

Το σημείο τομής των ασύμπτωτων:

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n (-p_i) - \sum_{j=1}^m (-z_j)}{n-m} = \frac{0-1-2-(-4-5)}{3-2} = \frac{6}{1} = 6$$



Η γωνία που σχηματίζει η ασύμπτωτη ($n-m=1$) είναι για $\rho=0$ ($\rho=(n-m)-1=0$):

$$\varphi_{\alpha_0} = \frac{(2\rho+1)\pi}{n-m} = \frac{(2\cdot 0+1)180^\circ}{2-1} = 180^\circ$$

Τα τμήματα $\sigma < -5$, $-4 < \sigma < -2$ και $-1 < \sigma < 0$ του πραγματικού άξονα είναι και τμήματα του Γ.Τ.Ρ..

Γ.Τ.Ρ.: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Να κατασκευαστεί ο Γ.Τ.Ρ. του συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόγχου:

$$G_o(s) = G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-3)} \quad (1)$$

Από την (1) βρίσκω τους πόλους και τα μηδενικά και τα τοποθετώ πάνω στο μιγαδικό επίπεδο.
Αυτά είναι: $-p_1=0$, $-p_2=3$, $-z_1=-1$, $n=2$, $m=1$.

Οι κλάδοι είναι δύο, όσοι και πόλοι.

Το σημείο τομής των ασύμπτωτων:

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n (-p_i) - \sum_{j=1}^m (-z_j)}{n-m} = \frac{0+3-(-1)}{2-1} = \frac{4}{1} = 4$$

Οι γωνίες που σχηματίζουν οι ασύμπτωτες είναι:

$$\phi_{\alpha_\rho} = \frac{(2\rho+1)\pi}{n-m}$$

το $\rho=0$ (διότι $(n-m)-1=0$)

$$\phi_{\alpha_0} = \frac{(2\rho+1)\pi}{n-m} = \frac{(2 \cdot 0 + 1)180^\circ}{2-1} = 180^\circ$$

Τα τμήματα $\sigma < -1$ και $0 < \sigma < 3$ του πραγματικού άξονα είναι και τμήματα του Γ.Τ.Ρ..

$$X.E. \quad 1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K(s+1)}{s(s-3)} = 0 \Leftrightarrow \frac{K(s+1)}{s(s-3)} = -1 \Leftrightarrow K = -\frac{s(s-3)}{(s+1)}$$

$$\frac{dK}{ds} = \frac{d}{ds} \left[-\frac{s(s-3)}{(s+1)} \right] = -\frac{\frac{d}{ds}[s(s-3)](s+1) - s(s-3)\frac{d}{ds}(s+1)}{(s+1)^2} = \frac{(2s-3)(s+1) - s(s-3)}{(s+1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow s^2 + 2s - 3 = 0 \Leftrightarrow (s-1)(s+3) = 0 \Leftrightarrow s_1 = 1 \text{ και } s_2 = -3 \text{ σημεία θλάσης}$$

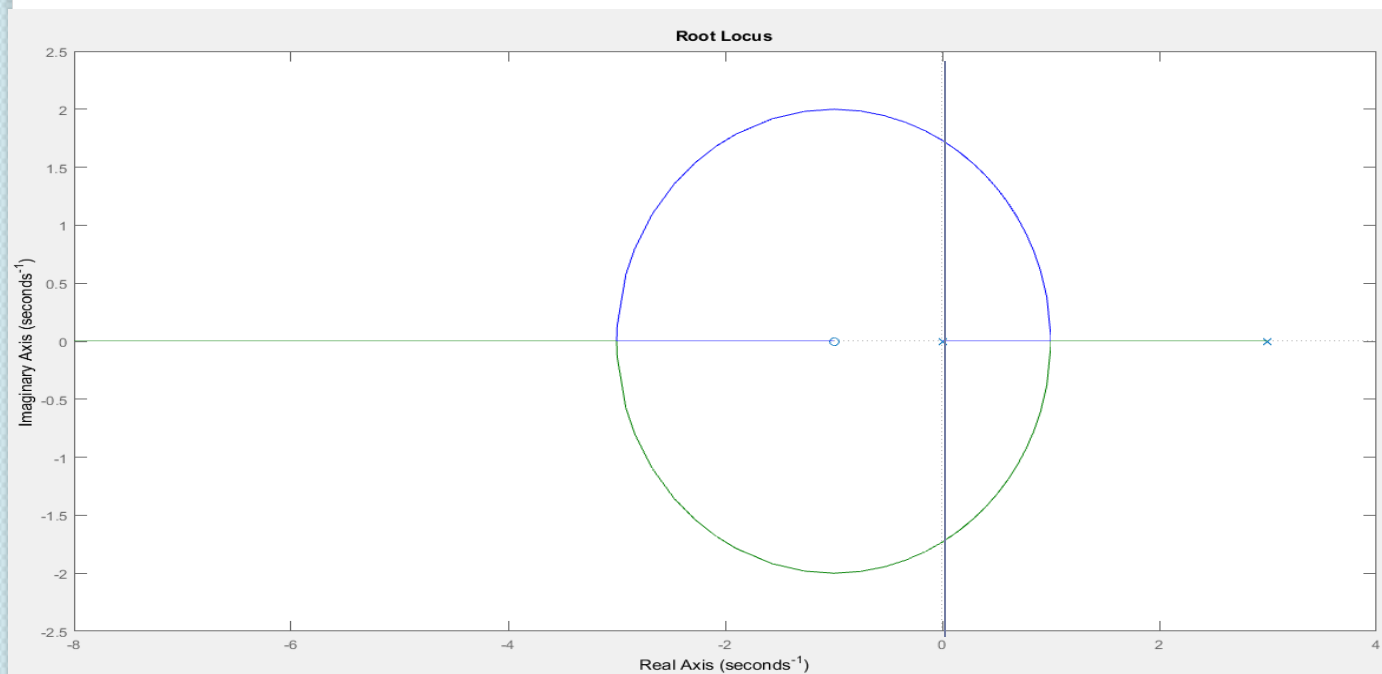
$$X.E. 1+G(s)H(s)=1+\frac{K(s+1)}{s(s-3)}=\frac{s(s-3)+K(s+1)}{s(s-3)}=0 \Rightarrow$$

$$X.E. s(s-3)+K(s+1)=s^2+(K-3)s+K=0 \quad (2)$$

πίνακας Routh-Hurwitz

$$\left. \begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & K \\ s^1 & K-3 & 0 \\ s^0 & K & \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} K-3 > 0 \Rightarrow K > 3 \\ K > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ευσταθές για} \\ K > 3 \end{array}$$

$$(j\omega)^2 + 3 = 0 \Rightarrow \omega^2 = 3 \Rightarrow \omega = \pm\sqrt{3} = \pm 1,73$$



Γ.Τ.Ρ.: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Να κατασκευαστεί ο Γ.Τ.Ρ. του συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόγχου:

$$Go(s) = G(s)H(s) = \frac{K}{(s+1)(s+3)(s+5)(s+7)} \quad (1)$$

Από την (1) βρίσκω τους πόλους και τα μηδενικά και τα τοποθετώ πάνω στο μιγαδικό επίπεδο.

Αυτά είναι: $-p_1 = -1$, $-p_2 = -3$, $-p_3 = -5$, $-p_4 = -7$, $n=4$, $m=0$.

Οι κλάδοι είναι τέσσερεις, όσοι και πόλοι.

Το σημείο τομής των ασύμπτωτων :

$$\sigma_\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n (-p_i) - \sum_{j=1}^m (-z_j)}{n-m} = \frac{-1-3-5-7}{4-0} = \frac{-16}{4} = -4$$

Οι γωνίες που σχηματίζουν οι ασύμπτωτες είναι:

$$\phi_{\alpha_\rho} = \frac{(2\rho+1)\pi}{n-m}$$

το $\rho = 0, 1, 2, 3$ (γιατί $(n-m)-1=3$)

$$\phi_{\alpha_0} = \frac{(2\rho+1)\pi}{n-m} = \frac{(2 \cdot 0 + 1)180^\circ}{4-0} = 45^\circ$$

$$\phi_{\alpha_1} = \frac{(2\rho+1)\pi}{n-m} = \frac{(2 \cdot 1 + 1)180^\circ}{4-0} = 135^\circ$$

$$\phi_{\alpha_2} = \frac{(2\rho+1)\pi}{n-m} = \frac{(2 \cdot 2 + 1)180^\circ}{4-0} = 225^\circ$$

$$\phi_{\alpha_3} = \frac{(2\rho+1)\pi}{n-m} = \frac{(2 \cdot 3 + 1)180^\circ}{4-0} = 315^\circ$$

Τα τμήματα $-3 < \sigma < -1$ και $-7 < \sigma < -5$ του πραγματικού άξονα είναι και τμήματα του Γ.Τ.Ρ..

$$X.E. 1+G(s)H(s)=1+\frac{K}{(s+1)(s+3)(s+5)(s+7)}=\frac{(s+1)(s+3)(s+5)(s+7)+K}{(s+1)(s+3)(s+5)(s+7)}=0 \Rightarrow$$

$$X.E. (s+1)(s+3)(s+5)(s+7)+K=s^4+16s^3+86s^2+176s+105+K=0 \quad (2)$$

πίνακας Routh-Hurwitz

$$\left. \begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 86 & 105+K \\ s^3 & 16 & 176 & 0 \\ s^2 & 75 & 105+K & 0 \\ s^1 & \frac{11520-16K}{75} & 0 & \\ s^0 & 105+K & & \end{array} \right\} \begin{array}{l} 11520-16K \geq 0 \Rightarrow 11520 \geq 16K \Rightarrow 720 \geq K \\ K > 0 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 86 & 105+K \\ s^3 & 16 & 176 & 0 \\ s^2 & 75 & 105+K & 0 \\ s^1 & \frac{11520-16K}{75} & 0 & \\ s^0 & 105+K & & \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{ευσταθές για} \\ 0 < K \leq 720 \end{array}$$

$$75(j\omega)^2 + 825 = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{825}{75} = 11 \Rightarrow \omega = \pm\sqrt{11} = \pm 3,316$$

