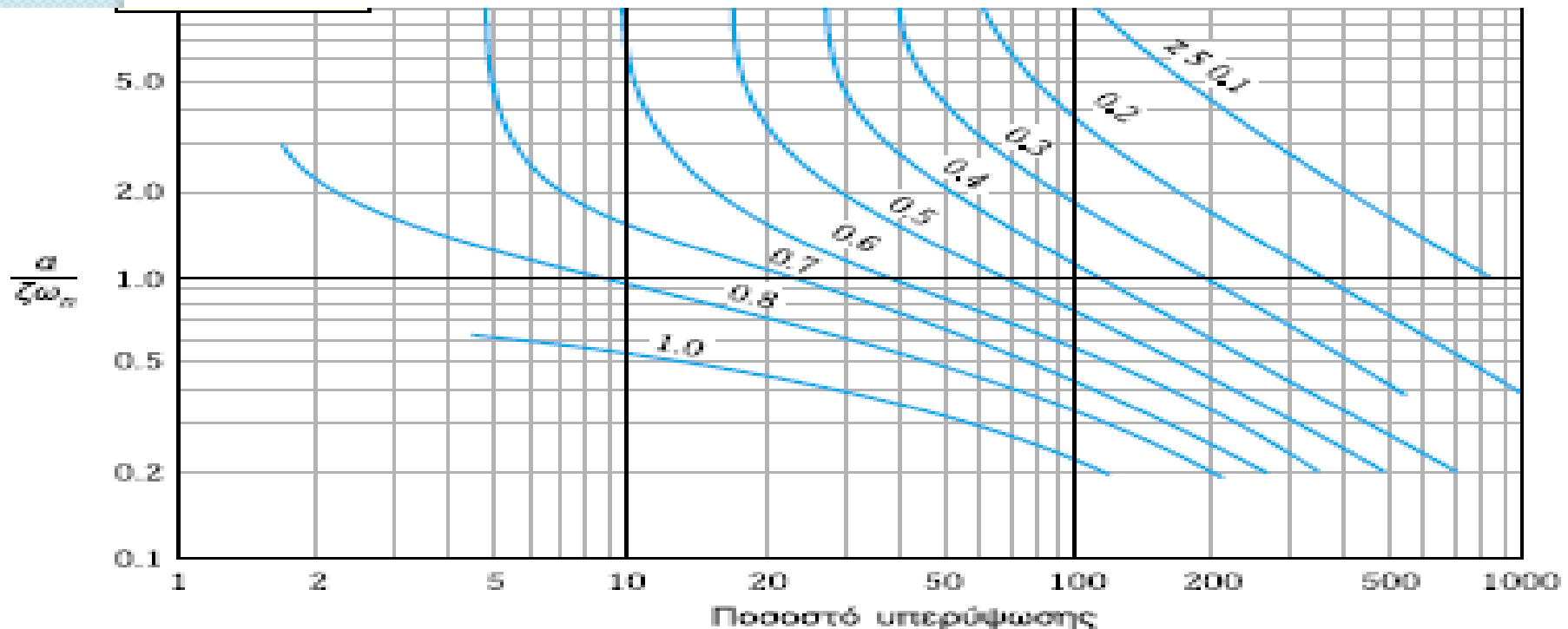


Επίδραση πεπερασμένου μηδενικού στην απόκριση ενός συστήματος δεύτερης τάξης

Η ύπαρξη ενός μηδενικού έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση της υπερύψωσης η οποία και παρουσιάζεται νωρίτερα.

Όσο μικρότερη είναι η τιμή του α , δηλαδή όσο πλησιέστερα είναι το μηδενικό ($-\alpha$) στον φανταστικό άξονα, τόσο μεγαλύτερη είναι η υπερύψωση.

Για $\alpha > 5\zeta\omega_n$ δεν υπάρχει επίδραση στο ποσοστό υπερύψωσης, οπότε τότε προσεγγιστικά μπορούμε να αμελήσουμε την επίδραση του μηδενικού.



Επίδραση του τρίτου πόλου στην απόκριση ενός συστήματος τρίτης τάξης

Η απόκριση ενός συστήματος τρίτης τάξης προσεγγίζεται με τους κυρίαρχους πόλους του συστήματος δεύτερης τάξης, όταν το πραγματικό μέρος των κυρίαρχων πόλων είναι μικρότερο του **1/10** του πραγματικού μέρους του τρίτου πόλου.

Η παρουσία τρίτου πόλου γενικά εξασθενεί την υπερύψωση και αυξάνει τον χρόνο αποκατάστασης.

Έστω σύστημα τρίτης τάξης με συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου:

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(\gamma s + 1)}$$

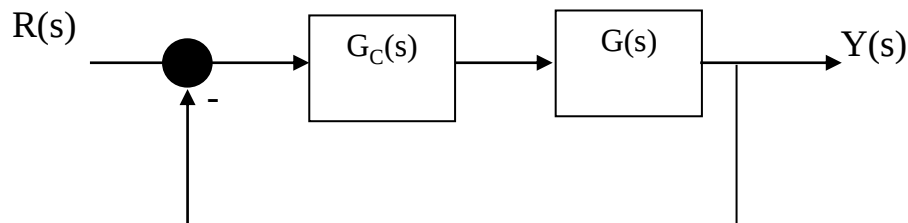
Εξακριβώθηκε πειραματικά ότι η **συμπεριφορά του συστήματος** (όπως προδιαγράφεται από το ποσοστό υπερύψωσης και τον χρόνο αποκατάστασης T_s), αντιπροσωπεύεται από τις αντίστοιχες καμπύλες συστήματος δεύτερης τάξης με ικανοποιητική ακρίβεια όταν ισχύει:

$$1/\gamma \geq 10\zeta\omega_n.$$

Παραδείγματα

1. Σύστημα Κλειστού Βρόγχου (Σ.Κ.Β.) με μοναδιαία αρνητική ανάδραση έχει Συνάρτηση Μεταφοράς (Σ.Μ.) $G_c(s) = \frac{s+\gamma}{s}$ και συνδέεται με ελεγκτή σειράς με Σ.Μ. $G(s) = \frac{4}{s+2}$.

Να εκλεγεί κατάλληλη τιμή για την παράμετρο γ , έτσι ώστε το ποσοστό υπερύψωσης της αντίστοιχης βηματικής απόκρισης να είναι 5% (αμελώντας την επίδραση του μηδενικού).



$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s) \cdot G_c(s)}{1 + G(s) \cdot G_c(s) \cdot H(s)} = \frac{\frac{4}{s+2} \cdot \frac{s+\gamma}{s}}{1 + \frac{4}{s+2} \cdot \frac{s+\gamma}{s} \cdot 1} = \frac{\frac{4(s+\gamma)}{s(s+2)}}{\frac{s(s+2) + 4(s+\gamma)}{s(s+2)}} = \\ &= \frac{4(s+\gamma)}{s(s+2) + 4(s+\gamma)} = \frac{4(s+\gamma)}{s^2 + 6s + 4\gamma} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{4(s + \gamma)}{s^2 + 6s + 4\gamma} = \frac{\frac{\omega_n^2}{\alpha}(s + a)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \Rightarrow 2\zeta\omega_n = 6 \quad (1) \quad \& \quad \omega_n^2 = 4\gamma \quad (2)$$

$$P.O. = 100 \cdot e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} = 5\% \Rightarrow e^{-3.14\cdot\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} = 0,05 \Rightarrow \ln e^{-3.14\cdot\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} = \ln 0,05 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2,9957 = \frac{-3,14 \cdot \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow -2,9957\sqrt{1-\zeta^2} = -3,14 \cdot \zeta$$

$$\Rightarrow \left(-2,9957\sqrt{1-\zeta^2}\right)^2 = (-3,14 \cdot \zeta)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8,9744(1-\zeta^2) = 9,86\zeta^2 \Rightarrow 8,9744 - 8,9744\zeta^2 = 9,86\zeta^2$$

$$\Rightarrow 18,8344\zeta^2 = 8,9744 \Rightarrow \Rightarrow \zeta^2 = 0,4765 \Leftrightarrow \zeta = 0,69$$

$$\text{ή κάνοντας χρήση του τύπου } \zeta = \frac{\left| \ln \frac{P.O.}{100} \right|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 \left(\frac{P.O.}{100} \right)}}$$

$$(1) \Rightarrow 2 \cdot 0,69 \cdot \omega_n = 6 \Rightarrow \omega_n = 4,348 \text{ rad / sec}$$

$$(2) \Rightarrow 4,348^2 = 4 \cdot \gamma \Rightarrow \gamma = 4,726 \text{ (δεν ισχύει η σχέση } \alpha > 5\zeta\omega_n \text{)}$$

2. Σε ένα Σ.Κ.Β. με μοναδιαία αρνητική ανάδραση, το ελεγχόμενο σύστημα έχει Σ.Μ.

$$G(s) = \frac{8(s+8)}{s(s+1,6)}$$

Να προσδιοριστούν οι ρίζες του Σ.Κ.Β., η ποσοστιαία υπερέψωση και ο χρόνος μεγίστου της χρονικής απόκρισης του για μοναδιαία βηματική είσοδο.

$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{\frac{8(s+8)}{s(s+1,6)}}{1+\frac{8(s+8)}{s(s+1,6)}} = \frac{8(s+8)}{s(s+1,6)+8(s+8)} = \frac{8(s+8)}{s^2+1,6s+8s+64} = \frac{8(s+8)}{s^2+9,6s+64}$$

Χ.Π. – τυπικής μορφής $-s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$

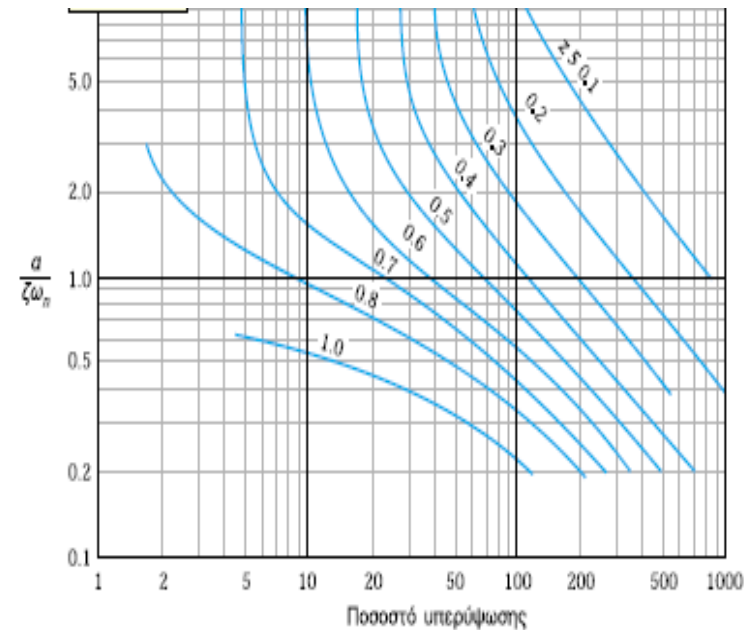
$$\omega_n^2 = 64 \Rightarrow \omega_n = 8 \text{ rad / sec}$$

$$2\zeta\omega_n = 9,6 \Rightarrow \zeta = \frac{4,8}{\omega_n} \Rightarrow \zeta = 0,6$$

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -4,8 \pm j8\sqrt{1-0,6^2} = -4,8 \pm j6,4$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\alpha}{\zeta\omega_n} &= \frac{8}{4,8} = 1,66 \Rightarrow \text{P.O.} = 20\% \\ \zeta &= 0,6 \end{aligned} \right\} \text{(διάγραμμα)}$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{3,14}{6,4} = 0,49 \text{ sec}$$



3. Ένα Σ.Κ.Β. με μοναδιαία αρνητική ανάδραση, έχει Σ.Μ.:

$$T(s) = \frac{62,5(s + 2,5)}{(s^2 + 6s + 25)(s + 6,25)}$$

Να προσδιοριστούν η ποσοστιαία υπερένωση και ο χρόνος αποκατάστασης της χρονικής απόκρισης του για μοναδιαία βηματική είσοδο. Θεωρείστε ότι το σύστημα έχει συμπεριφορά 2^{ης} τάξης (ή δύο κυρίαρχους πόλους Σ.Κ.Β.)

$$T(s) = \frac{10(s + 2,5)}{s^2 + 6s + 25}$$

Χ.Π. – τυπικής μορφής – $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$

$$\omega_n^2 = 25 \Rightarrow \omega_n = 5 \text{ rad / sec}$$

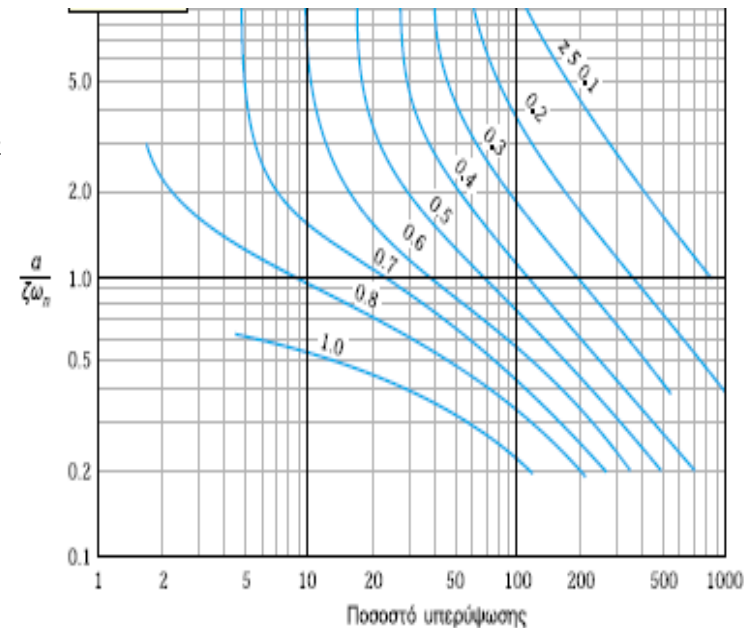
$$2\zeta\omega_n = 6 \Rightarrow \zeta = \frac{3}{\omega_n} \Rightarrow \zeta = 0,6$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\alpha}{\zeta\omega_n} = \frac{2,5}{3} = 0,833 \\ \zeta = 0,6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{P.O.} = 55\%$$

(διάγραμμα)

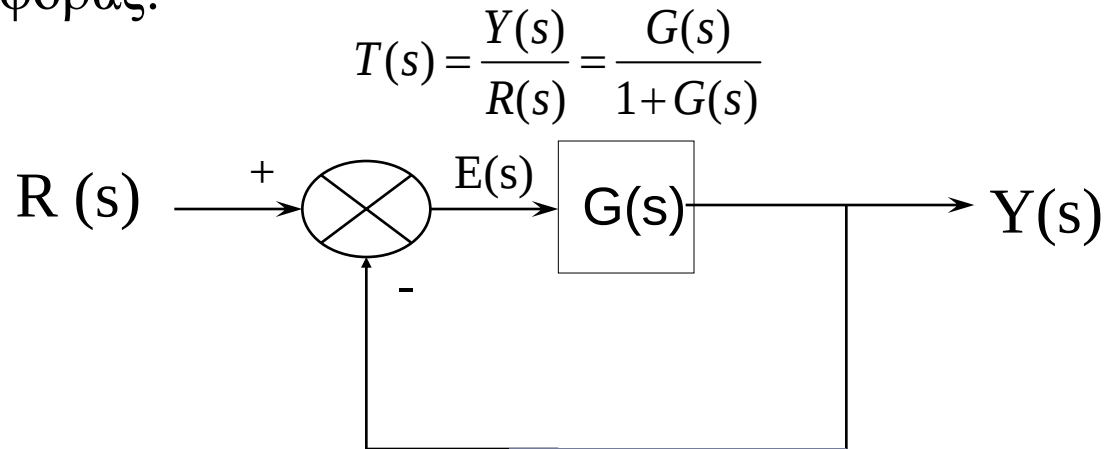
$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{3} = 1,33 \text{ sec}$$

προσομοίωση P.O. = 38% και $T_s = 1,6 \text{ sec}$



Τύποι συστημάτων και σταθερές σφαλμάτων

Το παρακάτω σύστημα ελέγχου κλειστού βρόγχου έχει συνάρτηση μεταφοράς:



Η συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόγχου είναι ($H(s)=1$):

$$G_o(s) = G(s)H(s) = \frac{\prod_{i=1}^m |s + z_i|}{s^r \prod_{j=1}^k |s + p_j|}$$

όπου r ο αριθμός των μηδενικών ριζών του πολυνύμου του παρονομαστή της συνάρτησης.

***Ένα σύστημα ονομάζεται τύπου r , αν έχει r πόλους στο σημείο $s=0$**

Ο ορισμός του σφάλματος δίνεται από τη σχέση:

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)}$$

Το σφάλμα στη μόνιμη κατάσταση ορίζεται από τη σχέση:

$$e_{ss} = e_{\mu\sigma\nu} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

Ορίζουμε:

Σταθερά σφάλματος θέσης την τιμή:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$$

Σταθερά σφάλματος ταχύτητας την τιμή:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$$

Σταθερά σφάλματος επιτάχυνσης την τιμή:

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)$$

Οι τιμές των σφαλμάτων για τις περιπτώσεις της κύριας διαγωνίου της παρακάτω γραφικής απεικόνισης που δίνεται σε μορφή πίνακα 3X3 είναι οι εξής:

1. Είσοδος $R(s) = \frac{P}{s}$ και σύστημα τύπου 0

$$e_{ss} = e_{\mu ov} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{P}{s}}{1 + G(s)} = \frac{P}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)} = \frac{P}{1 + K_p}$$

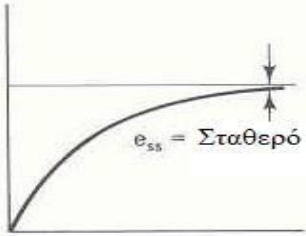
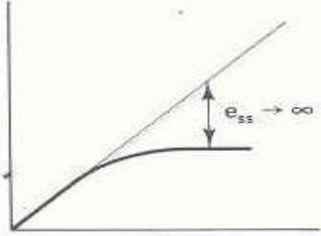
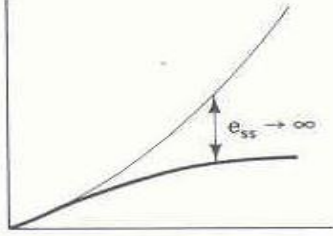
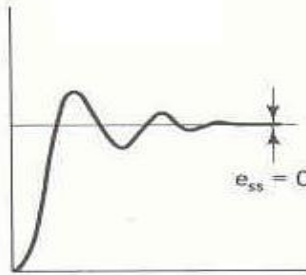
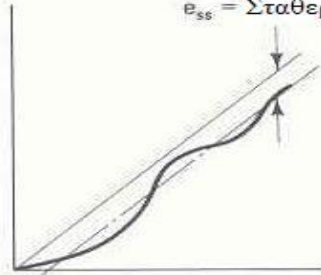
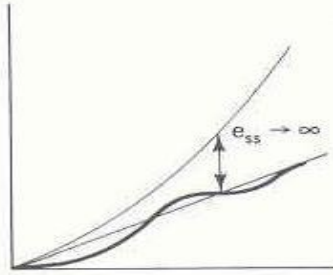
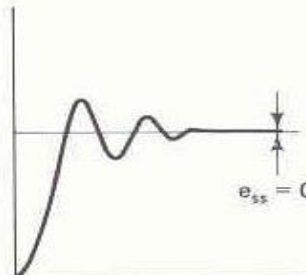
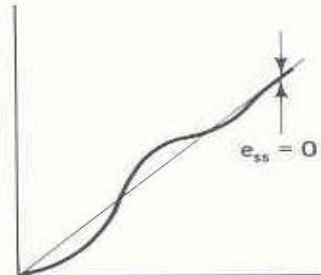
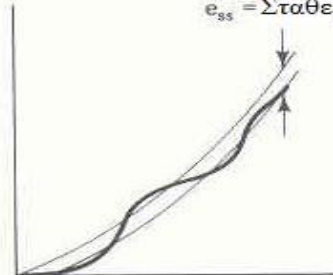
2. Είσοδος $R(s) = \frac{V}{s^2}$ και σύστημα τύπου 1

$$e_{ss} = e_{\mu ov} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{V}{s^2}}{1 + G(s)} = \frac{V}{\lim_{s \rightarrow 0} (s + sG(s))} = \frac{V}{K_v}$$

3. Είσοδος $R(s) = \frac{A}{s^3}$ και σύστημα τύπου 2

$$e_{ss} = e_{\mu ov} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{A}{s^3}}{1 + G(s)} = \frac{A}{\lim_{s \rightarrow 0} (s^2 + s^2G(s))} = \frac{A}{K_a}$$

Γραφική αναπαράσταση μονίμου σφάλματος συστήματος ελέγχου για συγκεκριμένες συναρτήσεις εισόδου και τύπους συστημάτων

ΤΥΠΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ	ΕΙΣΟΔΟΣ		
	Step	Ramp	Parabolic
0			
1			
2			

Ανεξαρτήτως από το είδος της ανάδρασης (μοναδιαίας ή μη) ισχύει γενικά ο τύπος $E(s)=[1-T(s)]R(s)$, όπου $T(s)$ η συνάρτηση μεταφοράς (Σ.Μ.) κλειστού βρόχου, η οποία στην πιο ολοκληρωμένη της μορφή είναι ίση με:

$$T(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_o(s)}$$

όπου $G_o(s)=G_c(s)G(s)H(s)$ η συνάρτηση **ανοικτού βρόχου**, $G_c(s)$ η Σ.Μ. του ελεγκτή, $G(s)$ η Σ.Μ. του ελεγχόμενου συστήματος και $H(s)$ η Σ.Μ. της ανάδρασης.

Παραδείγματα

1. Δίνεται το Σύστημα Κλειστού Βρόγχου (Σ.Κ.Β.) με μοναδιαία αρνητική ανάδραση και με Συνάρτηση Μεταφοράς (Σ.Μ.) του ελεγχόμενου συστήματος :

$$G(s) = \frac{k(s+2)}{s^n(s+1)(s+4)}$$

A) Να υπολογιστούν οι παράμετροι k και n , ώστε η έξοδος του Σ.Κ.Β. να έχει στη μόνιμη κατάσταση ισορροπίας σφάλματα θέσης, ταχύτητας μηδενικά και επιτάχυνσης ίσο με 0,5.

B) Να υπολογιστεί το σφάλμα στη μόνιμη κατάσταση ισορροπίας για είσοδο ίση με $4u(t)+3r(t)+2p(t)$, όπου $u(t)$, $r(t)$, $p(t)$ είναι αντίστοιχα η βηματική, ράμπας και παραβολική συνάρτηση.

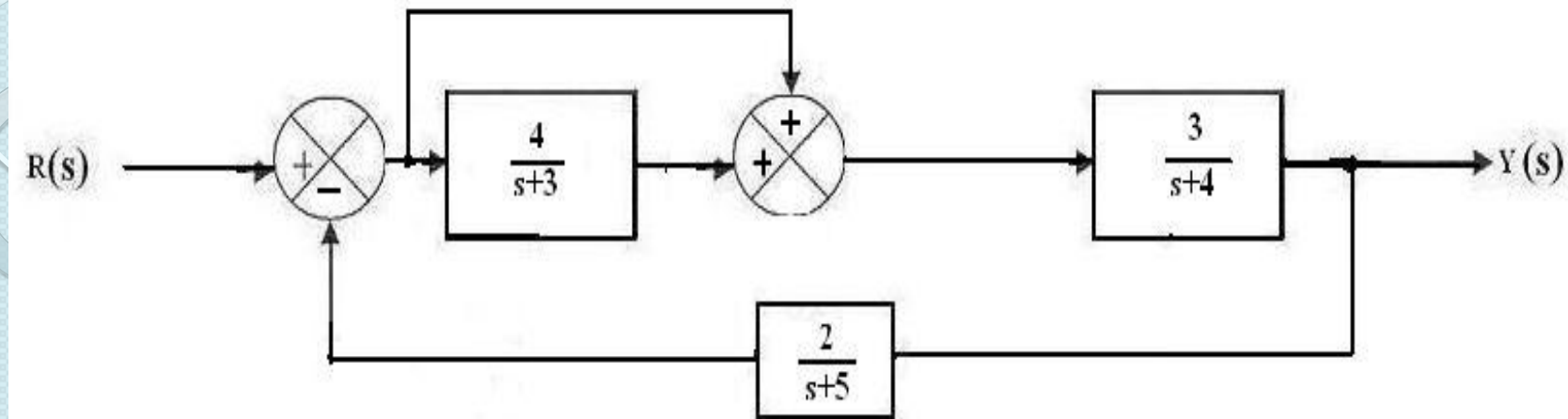
$$A) K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{k(s+2)}{s^n(s+1)(s+4)} = \frac{2k}{1 \cdot 4} = \frac{k}{2}$$

(για $n=2$ ώστε K_a πεπερασμένο $\neq 0$)

$$e_{ssa} = \frac{1}{K_a} = \frac{1}{\frac{k}{2}} = \frac{2}{k} \Rightarrow k = 4$$

$$B) 4u(t) + 3r(t) + 2p(t) \xrightarrow{\text{υπέρθεση}} 4e_{sspos} + 3e_{ssv} + 2e_{ssa} = 0 + 0 + 2 \cdot 0,5 = 1$$

2. Δίνεται το παρακάτω λειτουργικό διάγραμμα ενός συστήματος ελέγχου:



Για μοναδιαία βηματική είσοδο να βρεθεί το σφάλμα μόνιμης κατάστασης e_{ss} .

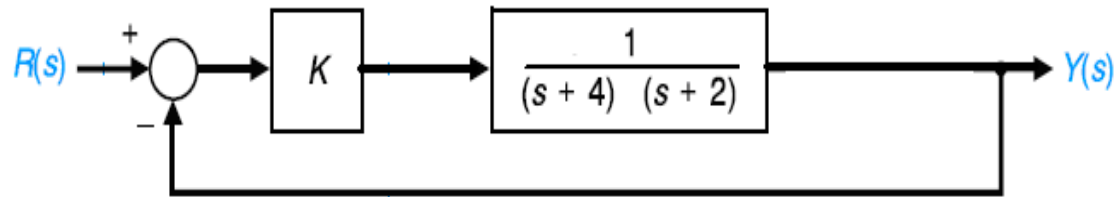
$$G_1(s) = \frac{4}{s+3} + 1 = \frac{s+7}{s+3}$$

$$G_2(s) = G_1(s) \frac{3}{s+4} = \frac{s+7}{s+3} \frac{3}{s+4} = \frac{3(s+7)}{(s+3)(s+4)}$$

$$T(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)H(s)} = \frac{\frac{3(s+7)}{(s+3)(s+4)}}{1 + \frac{3(s+7)}{(s+3)(s+4)} \frac{2}{s+5}} = \frac{3(s+5)(s+7)}{s^3 + 12s^2 + 53s + 102} \Leftrightarrow 1 - T(s) = \frac{s^3 + 9s^2 + 17s - 3}{s^3 + 12s^2 + 53s + 102}$$

$$R(s) = \frac{1}{s} \rightarrow E(s) = [1 - T(s)]R(s) = [1 - T(s)]\frac{1}{s} \Rightarrow e_{sspos} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = 1 - T(0) = -\frac{3}{102}$$

3. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ένα σύστημα ελέγχου:



Για σταθερά σφάλματος θέσης ίση με 1,25 να υπολογίσετε την τιμή K , το σφάλμα μόνιμης κατάστασης, και το ποσοστό υπέρψωσης για μοναδιαία βηματική είσοδο.

$$K_{pos} = \lim_{s \rightarrow 0} G_o(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{(s+2)(s+4)} = \frac{K}{2 \cdot 4} = \frac{K}{8} = 1,25 \Rightarrow k = 10$$

$$e_{sspos} = \frac{1}{1 + K_{pos}} = \frac{1}{1 + 1,25} = 0,44$$

$$T(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} = \frac{(s+2)(s+4)}{1 + \frac{k}{(s+2)(s+4)}} = \frac{k}{s^2 + 6s + 8 + k} \xrightarrow{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \omega_n^2 = 18 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ rad/sec}$$

$$2\zeta\omega_n = 6 \xrightarrow{\omega_n = 3\sqrt{2}} \zeta = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707$$

$$P.O. = 100e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 4,5\%$$