

Κεφάλαιο 1

Επανάληψη των Μαθηματικών για Τεχνικούς

ERNEST A. JOERG

Professor and Chairperson, Electrical Technology Department,
Westchester Community College, Valhalla, N.Y.

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο κεφάλαιο αυτό επαναλαμβάνονται τα βασικά Μαθηματικά, που είναι τόσο απαραίτητα σε Μηχανικούς και Τεχνικούς. Τα θέματα που εξετάζονται είναι οι μιγαδικοί αριθμοί, η στοιχειώδης άλγεβρα, οι δυνάμεις, οι λογάριθμοι, η τριγωνομετρία και η μιγαδική άλγεβρα. Εφαρμογή της τεχνικής των μαθηματικών στην λύση των προβλημάτων αυτών φαίνεται με 38 λυμένα προβλήματα.

1.2 ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Οποιοσδήποτε αριθμός μπορεί να θεωρηθεί μιγαδικός. Ένας μιγαδικός αριθμός ορίζεται σαν ο αριθμός που αποτελείται από δύο τμήματα: το ένα πραγματικό και το άλλο φανταστικό. Γενικά, γράφεται σαν $a + bi$ ή, στην μηχανολογία, σαν $a + jb$, όπου είναι $i = j = \sqrt{-1}$. Ο όρος j (ή i) ονομάζεται φανταστική μονάδα. Στο Σχ. 1-1, το a είναι το πραγματικό τμήμα και το jb το φανταστικό τμήμα του μιγαδικού αριθμού. Ο όρος j εξετάζεται σαν μεταβλητή και είναι $j^2 = -1$.

Οι μιγαδικοί αριθμοί που περιέχουν a και b διάφορα του μηδενός μ μπορούν να προστεθούν ή να αφαιρεθούν όπως ακριβώς οι πραγματικοί αριθμοί. Όμως, μόνο οι πραγματικές ποσότητες μπορούν να συνδυασθούν με πραγματικές ποσότητες και μόνον οι φανταστικές με φανταστικές.

πρόβλημα 1.1 Να προστεθούν οι αριθμοί $2 + j6$ και $5 - j8$ και το άθροισμα να ονομασθεί Y .

$$\begin{aligned} \text{λύση} \quad Y &= 2 + j6 + (5 - j8) = (2 + 5) + j(6 - 8) \\ &= 7 - j2. \end{aligned}$$

πρόβλημα 1.2 Να αφαιρεθεί ο $3 - j6$ από τον $-1 + j8$ και η διαφορά να ονομασθεί Z .

$$\begin{aligned} \text{λύση} \quad Z &= -1 + j8 - (3 - j6) = -1 + j8 - 3 + j6 = (-1 - 3) + j(8 + 6) \\ &= -4 + j14. \end{aligned}$$

πρόβλημα 1.3 Να πολλαπλασιασθεί ο $7 - j2$ επί $-4 - j14$ και το γινόμενο να ονομασθεί L .

$$\begin{aligned} \text{λύση} \quad L &= (Y)(Z) = (7 - j2)(-4 - j14) \\ &= (7)(-4) + (7)(j14) + (-j2)(-4) + (-j2)(j14) \\ &= -28 + j98 + j8 - j^2 \times 28 \\ &= -28 + j98 + j8 + 28 = (-28 + 28) + j(98 + 8) \\ &= 0 + j106 = j106 \text{ (καθαρός φανταστικός αριθμός)} \end{aligned}$$

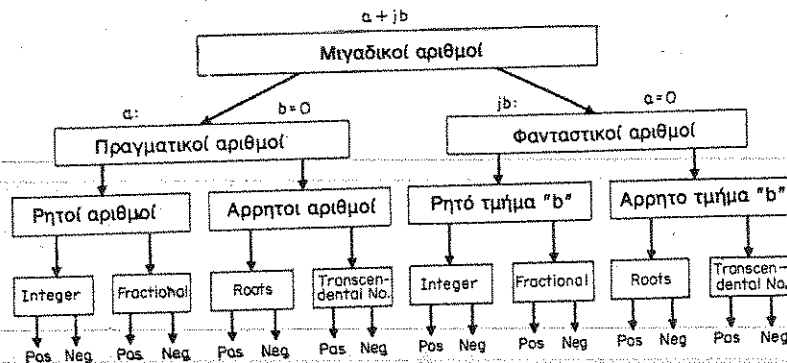
πρόβλημα 1.4 Να βρεθεί το αντίστροφο του Y και να ονομασθεί Q .

λύση $Q = 1/Y = 1/(7 - j2)$. Πολλαπλασιάζουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή με τον συζυγή (μιγαδικό) του παρονομαστή. Ο συζυγής (μιγαδικός) ενός μιγαδικού αριθμού βρίσκεται αν αλλάξουμε μόνον το πρόσημο του φανταστικού τμήματος. Για το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι $7 + j2$. Έτσι είναι:

$$Q = \frac{1}{7 - j2} = \frac{1}{7 - j2} \cdot \frac{7 + j2}{7 + j2} = \frac{7 + j2}{(7)(7) + (-j2)(j2) + j14 - j14}$$

$$\frac{7+j2}{49+4} = \frac{7+j2}{53} = \frac{7}{53} + j \frac{2}{53} \approx 0.132 + j0.038$$

Αν ένας μιγαδικός αριθμός $(a + jb)$ πολλαπλασιασθεί με τον συζυγή του $(a - jb)$ το αποτέλεσμα είναι πάντοτε ο πραγματικός αριθμός $a^2 + b^2$.

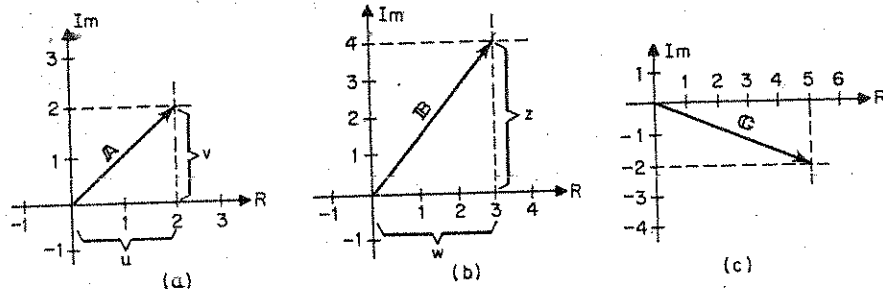


Σχ. 1-1 Οικογενειακά δένδρα των μιγαδικών αριθμών.

Γραφική Παράσταση

Η γραφική παράσταση των μιγαδικών αριθμών γίνεται στο μιγαδικό επίπεδο (γραφική παράσταση Argand). Ο κατακόρυφος άξονας ονομάζεται *άξονας των φανταστικών αριθμών* και ο οριζόντιος άξονας *άξονας των πραγματικών αριθμών* με τα + και - στις συμβατικές κατευθύνσεις.

πρόβλημα 1.5 Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των (α) $A = 2 + j2$ (β) $B = 3 + j4$ (γ) $C = 5 - j2$ (δ) $D = A + B$ (ε) $E = -2 + j4$ (στ) $F = -3 - j5$.
Λύση (α) Βλ. Σχ. 1-2α (β) Βλ. Σχ. 1-2β (γ) Βλ. Σχ. 1-2γ (δ) Βλ. Σχ. 1-2δ (ε) Βλ. Σχ. 1-2ε (στ) Βλ. Σχ. 1-2f.



Σχ. 1-2 Λύση Προβλήματος 1-5 (βλ. κείμενο).

1.3 ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑ

Στην άλγεβρα ένα γράμμα παριστάνει ένα συγκεκριμένο ποσό ή ποσότητα, ενός συγκεκριμένου πράγματος. Για παράδειγμα η σχέση $V = RI$ (Νόμος του Ohm) αναφέρει ότι η τάση σε volt (V) είναι ίση με το γινόμενο της αντίστασης σε Ohm (R) με το ρεύμα σε Ampere (I).

Η αλγεβρική έκφραση είναι ένας συνδυασμός συμβόλων που παριστάνουν πράξεις, μεταβλητές και συντελεστές. Γενικά, έχει την μορφή:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n x^0 = 0 \quad (1-1)$$

όπου τα a είναι οι συντελεστές της μεταβλητής x . Η έκφραση (1-1) ονομάζεται πολυώνυμο του x βαθμού n . Ένας πολυώνυμο μπορεί να αποτελείται από έναν ή περισσότερους όρους, οι οποίοι διαχωρίζονται με τις πράξεις + ή -. Το πολυώνυμο με ένα όρο ονομάζεται μονώνυμο, με τρεις

όρους τριώνυμο, κλπ. Ο συντελεστής του όρου x^0 , που είναι ο a_n , γενικά ονομάζεται σταθερός όρος.

Πρόσθεση και Αφαίρεση Πολυωνύμων

πρόβλημα 1.6 Να προστεθούν τα $5x^2 - 8x - 3$, $2x^2 + 9x - 2$ και $4x^2 + 6x - 7$.

λύση

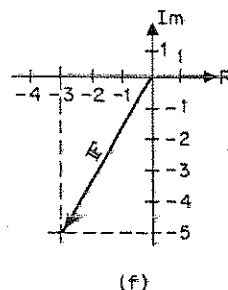
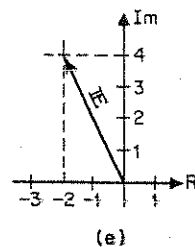
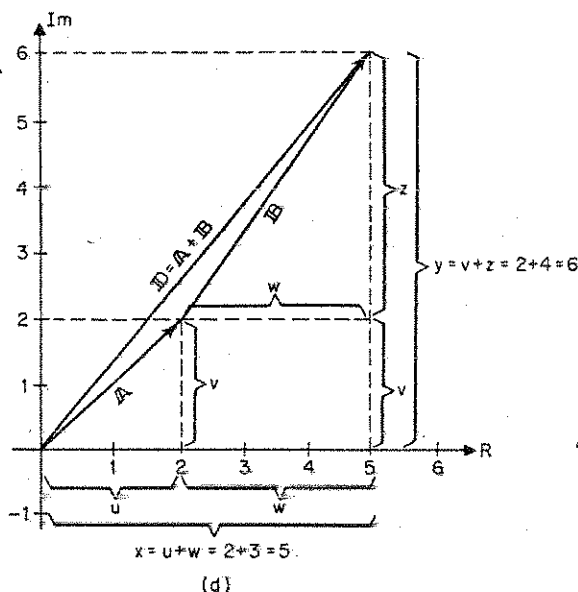
$$\begin{array}{r} 5x^2 - 8x - 3 \\ 2x^2 + 9x - 2 \\ 4x^2 + 6x - 7 \\ \hline 11x^2 + 7x - 12 \end{array}$$

πρόβλημα 1.7 Να αφαιρεθεί το $5x^2 - 8x + 2$ (αφαιρέτης) από το $-2x + 8x^2 + 9$ (αφαιρετέος).

λύση

$$\begin{array}{r} 8x^2 - 2x + 9 \\ -(5x^2 - 8x + 2) \\ \hline 3x^2 + 6x + 7 \end{array}$$

Παρατηρήστε ότι αλλάχθηκε το πρόσημο κάθε όρου του αφαιρέτη και ύστερα προστέθηκε στον αφαιρετέο. Ακόμη, ότι ο αφαιρετέος ξαναγράφηκε κατά τις κατιούσες δυνάμεις του x πριν λυθεί το πρόβλημα. Και στην πρόσθεση και στην αφαίρεση, συνδυάζονται μόνον οι όμοιοι όροι: οι όροι x^2 με τους όρους x^2 , οι όροι x με τους όρους x και οι σταθεροί όροι με τους σταθερούς όρους.



Σχ. 1-2 (Συνέχεια)

Πολλαπλασιασμός και Διαίρεση Πολυωνύμων

πρόβλημα 1.8 Να γίνουν οι πράξεις: (α) Πολλαπλασιασμός του $x + 3$ με το $x - 4$ (β) Πολλαπλασιασμός του $4x^3$ με τον $-6x^2 + 5$.

λύση

(α)

$$\begin{aligned} (x+3)(x-4) &= x^2 - 4x + 3x + (3)(-4) \\ &= x^2 + x(-4+3) - 12 \\ &= x^2 - x - 12 \end{aligned}$$

(β)

$$\begin{aligned} (4x^3)(-6x^2+5) &= (4)(-6)(x^3)(x^2) + (4)(5)(x^3) \\ &= -24x^5 + 20x^3 \end{aligned}$$

Στον πολλαπλασιασμό βάσης, έστω x , που είναι υψωμένη σε κάποια δύναμη m με την ίδια βάση που είναι υψωμένη σε κάποια άλλη δύναμη n , η βάση παραμένει η ίδια και οι δυνάμεις προστίθενται.

πρόβλημα 1.9 Να γίνουν οι διαιρέσεις: (α) $-15x^4$ δια $3x^3$. (β) $x^2 + 6x + 8$ δια $x + 2$ (γ) $x^2 - 30$ δια $8 + x$.

λύση

$$(α) \quad \frac{-15x^4}{3x^3} = -5x^1 = -5x$$

Στην διαίρεση βάσης, έστω x , που είναι υψωμένη σε δύναμη p (αριθμητής) με την ίδια βάση x που είναι υψωμένη σε κάποια άλλη δύναμη q (παρονομαστής), η βάση παραμένει η ίδια και η δύναμη του παρονομαστή αφαιρείται από την δύναμη του αριθμητή: $x^p/x^q = x^{p-q}$.

$$(β) \quad \frac{x^2 + 6x + 8}{x + 2} = x + 2 \quad \begin{array}{r} x + 4 \\ \underline{x^2 + 2x} \\ 4x + 8 \\ \underline{4x + 8} \\ 0 \end{array}$$

Στην διαίρεση, γράφουμε τους διαιρετέο και διαιρέτη κατά τις κατιούσες δυνάμεις της συγκεκριμένης μεταβλητής. Στη συνέχεια, διαδοχικά:

1. Διαιρούμε τον πρώτο όρο του διαιρετέου με τον πρώτο όρο του διαιρέτη για να πάρουμε τον πρώτο όρο του πηλίκου.

2. Πολλαπλασιάζουμε με όλον τον διαιρέτη.

3. Αφαιρούμε από τον διαιρετέο.

4. Κατεβάζουμε τον επόμενο όρο από τον διαιρετέο.

5. Επαναλαμβάνουμε το ίδιο μέχρι να τελειώσουν οι όροι.

Αν, μετά την τελευταία αφαίρεση, υπάρχει ποσότητα που παραμένει, αυτή ονομάζεται υπόλοιπο.

$$(γ) \quad \frac{x^2 - 30 + 5x}{8 + x} = x + 8 \quad \begin{array}{r} x - 3 \\ \underline{x^2 + 5x - 30} \\ - 3x - 30 \\ \underline{- 3x - 24} \\ -6 \end{array} \quad \text{υπόλοιπο}$$

Παρατηρήστε ότι είναι πηλίκο $Q(x) = x - 3$ και υπόλοιπο $R = -6$. Η πλήρης απάντηση είναι:

$$x - 3 + -6/x + 8 = Q(x) + R/\text{διαιρέτης}$$

Αλγεβρικές Εξισώσεις και Τύποι

Μια αλγεβρική εξίσωση είναι μια μαθηματική πρόταση που δηλώνει την ισότητα δύο αλγεβρικών εκφράσεων. Για παράδειγμα, η $3x - 7 = x + 1$ δηλώνει ότι το διώνυμο (πολυώνυμο δύο όρων) στην αριστερή πλευρά της εξίσωσης είναι ίσο με το διώνυμο της δεξιάς πλευράς της εξίσωσης.

Λύση Εξισώσεων Πρώτου Βαθμού

Εδώ, η x ή οποιαδήποτε άλλη μεταβλητή επιλεγεί, είναι υψωμένη στην μονάδα (1). Μπορεί να προστεθεί ή να αφαιρεθεί μια ποσότητα και στις δύο πλευρές της εξίσωσης. Ο κάθε όρος και στις δύο πλευρές της εξίσωσης μπορεί να πολλαπλασιασθεί ή να διαιρεθεί με την ίδια ποσότητα (εκτός από το 0).

πρόβλημα 1.10 Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις ως προς x ή y : (α) $x + 2 = 9$. (β) $2x - 1 = 15$.

$$(γ) (y - 9)/2 = (y + 12)/9. (δ) (2x + 5)/6 = (2x)/3 - 1/2$$

Λύση

(α) $x + 2 = 9$ Αφαιρούμε το 2 και από τις δύο πλευρές:

$$x + 2 - 2 = 9 - 2$$

$$x = 7$$

(β) $2x - 1 = 15$ Προσθέτουμε το 1 και στις δύο πλευρές:

$$2x - 1 + 1 = 15 + 1$$

$$2x = 16 \text{ Διαιρούμε και τις δύο πλευρές δια 2:}$$

$$2x/2 = 16/2$$

$$x = 8$$

Η λύση μπορεί να επαληθευθεί αν η τιμή του x που βρέθηκε αντικατασταθεί στην αρχική εξίσωση. Για παράδειγμα, είναι

$$2(8) - 1 = 15$$

$$16 - 1 = 15$$

$$15 = 15$$

(γ) $\frac{y - 9}{2} = \frac{y + 12}{9}$ Πολλαπλασιάζουμε και τις δύο πλευρές με 18:

$$\left(\frac{y - 9}{2}\right)(18) = \left(\frac{y + 12}{9}\right)(18)$$

$$(y - 9)(9) = (y + 12)(2) \text{ Βγάζουμε τις παρενθέσεις:}$$

$$9y - 81 = 2y + 24 \text{ Προσθέτουμε το 81 και στις δύο πλευρές:}$$

$$9y - 81 + 81 = 2y + 24 + 81 \text{ Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων:}$$

$$9y = 2y + 105 \text{ Αφαιρούμε το } 2y \text{ και από τις δύο πλευρές:}$$

$$9y - 2y = 2y - 2y + 105 \text{ Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων:}$$

$$7y = 105 \text{ Διαιρούμε και τις δύο πλευρές δια 7:}$$

$$7y/7 = 105/7$$

$$y = 15$$

Η εξίσωση στο πρόβλημα αυτό ονομάζεται και *κλασματική εξίσωση*. Στην αρχή, και οι δύο πλευρές μιας τέτοιας εξίσωσης πολλαπλασιάζονται με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) ή με τον ελάχιστο κοινό διαιρέτη του παρονομαστή.

(δ) $\frac{2x + 5}{6} = \frac{2x}{3} - \frac{1}{2}$ Πολλαπλασιάζουμε με το ΕΚΠ = 6

$$\left(\frac{2x + 5}{6}\right)(6) = \left(\frac{2x}{3}\right)(6) - \frac{1}{2}(6)$$

$$2x + 5 = 2x(2) - 3 \text{ Βγάζουμε τις παρενθέσεις:}$$

$$2x + 5 = 4x - 3 \text{ Αφαιρούμε το 5 και από τις δύο πλευρές:}$$

$$2x + 5 - 5 = 4x - 3 - 5 \text{ Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων:}$$

$$2x = 4x - 8 \text{ Αφαιρούμε το } 4x \text{ και από τις δύο πλευρές:}$$

$$2x - 4x = 4x - 4x - 8 \text{ Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων:}$$

$$-2x = -8 \text{ Διαιρούμε και τις δύο πλευρές δια -2:}$$

$$\frac{-2x}{-2} = \frac{-8}{-2} \text{ Τα όμοια πρόσημα δίνουν θετικό αριθμό:}$$

$$x = +4$$

Αλφαβητικές Εξισώσεις

Η αλφαβητική εξίσωση είναι η εξίσωση εκείνη στην οποία οι σταθερές παριστάνονται με γράμματα του αλφαβήτου. Μερικές φορές χρειάζεται αναδιάταξη της εξίσωσης και λύση ως προς κάποιο συγκεκριμένο γράμμα.

πρόβλημα 1.11 Αν είναι $V = ZI$, να βρεθεί το I .

Λύση Αν και οι δύο πλευρές της εξίσωσης διαιρεθούν δια Z , τότε έχουμε:

$$\frac{V}{Z} = \frac{ZI}{Z} \\ = I$$

Η ποσότητα $1/Z$ είναι μια σύνθετη αντίσταση και συμβολίζεται με το γράμμα Y . Έτσι, η τελική λύση μπορεί να γραφεί $I = YV$. Η μορφή αυτή μερικές φορές ονομάζεται δεύτερος τὸ πὸς του Νόμου του Ohm.

πρόβλημα 1.12 Αν είναι $^{\circ}F = (9/5)^{\circ}C + 32$, να υπολογισθεί το $^{\circ}C$.

Λύση Αφαιρούμε το 32 και από τις δύο πλευρές: Είναι $^{\circ}F - 32 = (9/5)^{\circ}C + 32 - 32 = (9/5)^{\circ}C$. Πολλαπλασιάζουμε και τις δύο πλευρές επί $5/9$: $5(^{\circ}F - 32)/9 = ^{\circ}C$.

Γραφική Παράσταση Γραμμικών Εξισώσεων

Η γραμμική εξίσωση περιέχει τα x και y σε πρώτο βαθμό. Έχει άπειρο αριθμό λύσεων ή ζεύγη τιμών που ονομάζονται και συντεταγμένα ζεύγη (x, y) . (Παρατηρήστε ότι η λέξη γραμμή βρίσκεται στην λέξη γραμμικός.) Η εξίσωση σχεδιάζεται σε ορθογώνιες (καρτεσιανές) συντεταγμένες.

Πρόχειρη Απεικόνιση

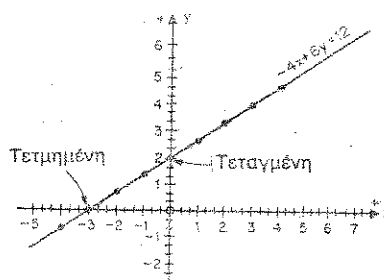
Με την τεχνική αυτή επιλέγονται αρκετές τιμές του x (της ανεξάρτητης μεταβλητής) και στη συνέχεια προσδιορίζονται οι αντίστοιχες τιμές y (της εξαρτημένης μεταβλητής). Για την ευθεία γραμμή χρειάζονται δύο σημεία, μερικές φορές, όμως για εξασφάλιση είναι επιθυμητά και επιπλέον σημεία.

πρόβλημα 1.13 Να γίνει η γραφική παράσταση της $-4x + 6y = 12$.

Λύση Πριν γίνει ο πίνακας τιμών, μπορεί να απλοποιηθεί η εξίσωση με διαίρεση δια 2 και των δύο πλευρών, πράγμα που δίνει $-2x + 3y = 6$, που θα χρησιμοποιηθεί για την γραφική παράσταση. Οι τιμές του x που επιλέγονται (αφού πρόκειται για την ανεξάρτητη μεταβλητή) είναι 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3 και -4. Η κάθε τιμή εισάγεται στην εξίσωση, η οποία λύνεται ως προς y . Παρακάτω φαίνονται τα αποτελέσματα:

x	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
y	14/3	4	10/3	8/3	2	4/3	2/3	0	-2/3

Στο Σχ. 1-3 φαίνεται η γραφική παράσταση. Το σημείο (0,2) ονομάζεται τετμημένη και το σημείο (-3,0) ονομάζεται τεταγμένη.



Σχ. 1-3 Γραφική παράσταση της $-4x + 6y = 12$ (Πρόβλημα 1.13).

Η Μέθοδος της Κλίσης Η μέθοδος της κλίσης επιτρέπει την ταχύτερη σχεδίαση των γραμμικών εξισώσεων. Όλες οι γραμμικές εξισώσεις μπορούν να γραφούν στην μορφή:

$$y = mx + b$$

(1-2)

όπου m είναι η κλίση ($\Delta y / \Delta x$), ή το πηλίκο της κατακόρυφης μεταβολής δια της οριζόντιας μεταβολής και b είναι η τετμημένη ($0, b$). Η (1-2) ονομάζεται εξίσωση ευθείας.

πρόβλημα 1.14 Να γίνει η γραφική παράσταση της $3y - 6x = 12$ με την μέθοδο της κλίσης.
λύση Αν οι δύο πλευρές διαιρεθούν δια 3 (κοινός παράγοντας) έχουμε:

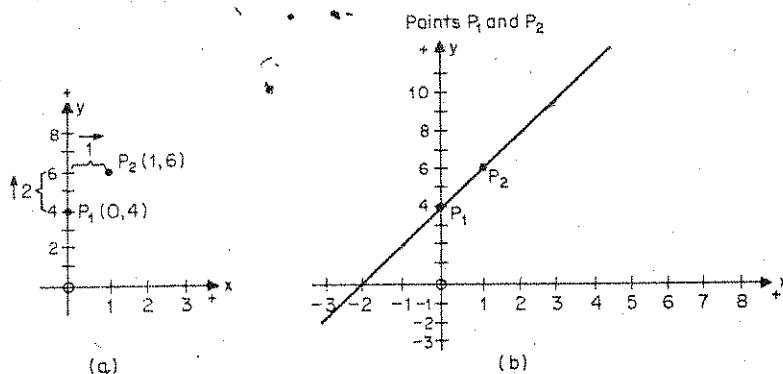
$$y = \frac{6x + 12}{3}$$

Αν γίνει σύγκριση με την (1-2)

$$y = 2x + 4$$

$$y = mx + b$$

φαίνεται εύκολα ότι είναι $m = 2$, $b = 4$. Σαν αρχικό σημείο της γραφικής παράστασης παίρνουμε το $P_1 = (0, 4)$. Η κλίση m είναι $+2$, ή $+2 / +1$. Από το αρχικό σημείο, προχωρούμε κατά δύο μονάδες προς τα επάνω στην κατεύθυνση του y και κατά μια μονάδα προς τα δεξιά στην κατεύθυνση του x στο νέο σημείο $(1, 6) = P_2$ (Σχ. 1-4α). Επειδή δύο σημεία ορίζουν μια ευθεία, στο Σχ. 1-4b παίρνουμε μια ακριβή γραφική παράσταση της ευθείας.



Σχ. 1-4 Λύση του Προβλήματος 1.14 (βλ. κείμενο).

Εξισώσεις Δευτέρου Βαθμού

Η εξίσωση δευτέρου βαθμού είναι μια εξίσωση που περιέχει το τετράγωνο και όχι μεγαλύτερη δύναμη του αγνώστου. Το τετράγωνο δεν πρέπει να συγχέεται με την τετάρτη δύναμη. Η γενική εξίσωση δευτέρου βαθμού έχει την μορφή:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1-3)$$

Η εξίσωση δευτέρου βαθμού έχει πάντοτε δύο ρίζες. Η λύση βρίσκεται με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων, με τον τύπο της λύσης της εξίσωσης δευτέρου βαθμού και με άλλους τρόπους. Θα περιγράψουμε τις δύο πρώτες μεθόδους.

Μέθοδος Ανάλυσης σε Γινόμενο Παραγόντων Πρέπει να ακολουθηθούν τα παρακάτω βήματα: 1. Μεταφορά όλων των όρων στην αριστερή πλευρά της εξίσωσης, οπότε η δεξιά πλευρά ισούται με μηδέν. 2. Η αριστερή πλευρά γίνεται γινόμενο παραγόντων (αν αυτό δεν είναι εύκολο, χρησιμοποιείται ο τύπος της λύσης της εξίσωσης δευτέρου βαθμού). 3. Εξισώνουμε με το μηδέν κάθε όρο του γινομένου που περιέχει τον άγνωστο. 4. Λύνουμε τις δύο εξισώσεις που προκύπτουν και παίρνουμε τις ρίζες.

πρόβλημα 1.15 Να λυθεί ως προς x η $3x^2 - 6x = 0$

λύση Βγάζουμε κοινό παράγοντα το $3x$:

$$(3x)(x - 2) = 0$$

Επειδή το γινόμενο δύο ποσοτήτων είναι μηδέν, τότε ή ο ένας ή ο άλλος όρος είναι ίσος με μηδέν. Έτσι είναι

$$\begin{array}{ll} 3x = 0 & x - 2 = 0 \\ x = 0 & x = 2 \end{array}$$

Οι δύο ρίζες είναι πραγματικές και διαφορετικές.

πρόβλημα 1.16 Να βρεθούν οι ρίζες της $y^2 - y - 6 = 0$.

Λύση Αν η αριστερή πλευρά αναλυθεί σε γινόμενο έχουμε

$$(y - 3)(y + 2) = 0$$

Αν ο κάθε όρος λυθεί ξεχωριστά, έχουμε

$$\begin{array}{ll} y - 3 = 0 & y + 2 = 0 \\ y = 3 & y = -2 \end{array}$$

Οι δύο ρίζες είναι πραγματικές και διαφορετικές.

Τύπος Λύσης Εξίσωσης Δευτέρου Βαθμού Εστω ότι δίνεται η εξίσωση δευτέρου βαθμού $ax^2 + bx + c = 0$. Οι δύο ρίζες της εξίσωσης βρίσκονται από τον τύπο:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (1-4)$$

Αυτή η μέθοδος λύσης ισχύει για όλες τις εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

πρόβλημα 1.17 Στην εξίσωση $3w^2 + 24w - 33 = 0$ να βρεθεί το w .

Λύση Αν διαιρέσουμε δια 3 έχουμε

$$w^2 + 8w - 11 = 0$$

Αν αυτή συγκριθεί με την γενική μορφή της εξίσωσης, θα είναι

$$a = 1, b = 8, c = -11$$

Με αντικατάσταση στην (1-4), όπου είναι $x = w$, έχουμε

$$\begin{aligned} w &= \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4(1)(-11)}}{2(1)} \\ &= \frac{-8 \pm \sqrt{68}}{2} \\ &= -4 \pm \frac{6\sqrt{3}}{2} = -4 \pm 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

Τότε είναι $w_1 \approx 9.196$ και $w_2 \approx -1.196$. Και οι δύο ρίζες είναι πραγματικές και διαφορετικές.

πρόβλημα 1.18 Να βρεθούν οι ρίζες της $z^2 + 8z + 25 = 0$.

Λύση $a = 1, b = 8, c = 25$. Ετσι είναι

$$\begin{aligned} z &= \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \times 1 \times 25}}{2 \times 1} \\ &= \frac{-8 \pm \sqrt{-36}}{2} = -4 \pm \frac{\sqrt{36}\sqrt{-1}}{2} \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια είναι $z_1 = -4 + j3$ και $z_2 = -4 - j3$. Οι δύο ρίζες είναι μιγαδικές. Θυμηθείτε ότι αν είναι $z = a + jb$, τότε ο συζυγής μιγαδικός του είναι $a - jb$. Αυτή είναι και η περίπτωση του προβλήματος για τα z_1 και z_2 . Η κάθε ρίζα είναι συζυγής μιγαδική της άλλης. Με μαθηματική μορφή αυτό γράφεται $z_1 = z_2^*$ ή $z_2 = z_1^*$. Το πρόβλημα αυτό δείχνει την τρίτη δυνατή λύση της εξίσωσης δευτέρου βαθμού δηλαδή ένα ζεύγος μιγαδικών ριζών.

Η διακρίνουσα της (1-4), $b^2 - 4ac$, δείχνει την φύση των ριζών:

1. Ρίζες πραγματικές και διαφορετικές: διακρίνουσα > 0
2. Ρίζες πραγματικές και ίσες: διακρίνουσα $= 0$
3. Ρίζες μιγαδικές: διακρίνουσα < 0

1.4 ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΣ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ

Ο εκθέτης δείχνει πόσες φορές χρησιμοποιείται ένας παράγοντας. Για παράδειγμα, έστω ότι έχουμε $y \cdot y \cdot y = y^4$. Ο εκθέτης 4 μας λέγει ότι το y πολλαπλασιάζεται με τον εαυτό του τέσσερις φορές. Οι ιδιότητες των δυνάμεων είναι:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (1-5)$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} = \frac{1}{a^{q-p}} \quad \text{όπου } a \neq 0 \quad (1-6)$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a^{-k} = \frac{1}{a^k} \quad \text{όπου } a \neq 0 \quad (1-7)$$

$$a^0 = 1 \quad \text{όπου } a \neq 0 \quad (1-8)$$

$$a^w \cdot b^w = (a \cdot b)^w \quad (1-9)$$

$$\frac{a^z}{b^z} = \left(\frac{a}{b}\right)^z \quad \text{όπου } b \neq 0 \quad (1-10)$$

$$(a^u)^v = a^{uv} \quad (1-11)$$

$$a^{P/R} = \sqrt[R]{a^P} = (R\sqrt{a})^P \quad \text{όπου } a > 0 \text{ εκτός αν το } R \text{ είναι περιττό} \quad (1-12)$$

$$a^{1/R} = \sqrt[R]{a}$$

πρόβλημα 1.19 Να απλοποιηθεί το $27^{2/3}$.
 λύση Από την (1-12): $27^{2/3} = (\sqrt[3]{27})^2 = (3)^2 = 9$.

πρόβλημα 1.20 Να απλοποιηθεί το $(c^3 d^2)/(c^{-2} d^{-1} f)$.
 λύση Από τις (1-7) και (1-5):

$$\frac{c^3 d^2}{c^{-2} d^{-1} f} = \frac{c^3 d^2 c^2 d^1}{f} = \frac{c^5 d^3}{f}$$

πρόβλημα 1.21 Να απλοποιηθεί το $(\sqrt{5} a^3 b^7)^0 \cdot 7(a^2 b^4)^0$.
 λύση Από την (1-8), (1), (7)(1) = 7.

πρόβλημα 1.22 Να απλοποιηθεί η

$$\left(\frac{3x^2 y^4}{5z^5}\right)^3$$

λύση Από τις (1-9) και (1-11):

$$\left(\frac{3x^2 y^4}{5z^5}\right)^3 = \frac{3^3 \cdot (x^2)^3 \cdot (y^4)^3}{5^3 \cdot (z^5)^3} = \frac{27x^6 y^{12}}{125 z^{15}}$$

πρόβλημα 1.23 Να απλοποιηθεί η $^{-5}\sqrt{32}$

λύση Από τις (1-7) και (1-13): $^{-5}\sqrt{32} = 32^{-1/5} = 1/32^{1/5} = 1/\sqrt[5]{32} = 1/2$.

Πρότυπος Επιστημονικός Συμβολισμός

Ο επιστημονικός συμβολισμός επιτρέπει στον μηχανικό και επιστήμονα να εκφράζει πολύ μικρούς ή πολύ μεγάλους αριθμούς σε συνεκτιγμένη μορφή. Γίνεται λοιπόν να χρησιμοποιηθεί και στους υπολογισμούς. Για παράδειγμα, τα εξήντα οκτώ εκατομμύρια μπορούν να γραφούν 68.000.000 ή 68×10^6 , όπου το 10^6 παριστάνει το 1 εκατομμύριο. Αυτός είναι ο επιστημονικός συμβολισμός. Όμως, στον πρότυπο επιστημονικό συμβολισμό (ΠΕΣ), η υποδιαστολή μπαίνει στα δεξιά του πρώτου σημαντικού μη μηδενικού ψηφίου. Έτσι ο ΠΕΣ για τα 68.000.000 είναι 6.8×10^7 . Τα συνηθισμένα προθέματα για τα πολλαπλάσια ή υποπολλαπλάσια του 10 είναι:

$$10^1 \rightarrow \text{deca}$$

$$10^2 \rightarrow \text{hecto}$$

$$10^{12} \rightarrow \text{tera}$$

$$10^{-1} \rightarrow \text{deci}$$

$$10^{-9} \rightarrow \text{nano}$$

$$10^{-12} \rightarrow \text{pico}$$

$10^3 \rightarrow$ kilo	$10^{-2} \rightarrow$ centi	$10^{-15} \rightarrow$ femto
$10^6 \rightarrow$ mega	$10^{-3} \rightarrow$ milli	$10^{-18} \rightarrow$ atto
$10^9 \rightarrow$ giga	$10^{-6} \rightarrow$ micro	

πρόβλημα 1.24 Να εκφρασθεί η κάθε μια από τις παρακάτω εκφράσεις σε ΠΕΣ: (α) Το angstrom είναι το ένα δεκάκις εκατομμυριοστό του μέτρου. (β) Η ταχύτητα του φωτός c είναι περίπου τριάντα γιγαεκατοστά του μέτρου ανά δευτερόλεπτο. (γ) Το μήκος κύματος λ του κίτρινου φωτός είναι περίπου 0.0000228 ίντσες. (δ) Ένα κουλόμπ φορτίου περιέχει περίπου 6.250.000.000.000.000 ηλεκτρόνια. (ε) Η μουσική ροκ ακούγεται στα 99X ή 99 μεγαχέρτζ στα FM.

Λύση (α) $1 \text{ \AA} = 1/(10 \times 10^9) = 1/10^{10} = 1 \times 10^{-10} \text{ m}$. (β) $c = 30 \times 10^9 \text{ cm/sec} = 3 \times 10^{10} \text{ cm/sec} = 3 \times 10^{10} \times 10^{-2} \text{ m/sec} = 3 \times 10^8 \text{ m/sec}$. (γ) $\lambda = 228 \times 10^{-5} \text{ ίντσες}$. Σε άλλο συμβολισμό, η ποσότητα αυτή γράφεται $22.8 \times 10^{-6} \text{ ίντσες}$ ή 22.8 μίντσες . (δ) Αν το N_e παριστάνει τον αριθμό των ηλεκτρονίων, τότε είναι $N_e = 6.25 \times 10^{18} \text{ e/Cb}$. (ε) $99 \times 10^6 = 99 \times 10^7 \text{ Hz}$.

1.5 ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

Υπάρχουν, γενικά, δύο είδη λογαρίθμων: οι κοινοί και οι φυσικοί λογάριθμοι. Ο κοινός λογάριθμος ενός αριθμού N είναι ο εκθέτης ή η δύναμη στην οποία πρέπει να υψωθεί η βάση 10 για να δώσει τον αριθμό. Εστω ότι για τον εκθέτη χρησιμοποιείται το σύμβολο x . Τότε θα είναι

$$N = 10^x \quad (1-14)$$

$$\log_{10} N = \lg N = x \quad (1-15)$$

Ο φυσικός λογάριθμος ενός αριθμού N είναι ο εκθέτης ή η δύναμη στην οποία πρέπει να υψωθεί ο αριθμός e για να δώσει τον αριθμό. Εστω ότι για τον εκθέτη χρησιμοποιείται το σύμβολο y . Τότε θα είναι

$$N = e^y \quad (1-16)$$

$$\log_e N = \ln N = y \quad (1-17)$$

Ο αριθμός e είναι περίπου ίσος με 2.72. Ο φυσικός λογάριθμος ονομάζεται και Νεπέρσιος λογάριθμος.

Οι ιδιότητες των λογαρίθμων, που ισχύουν για οποιαδήποτε βάση, είναι:

$$\log AB = \log A + \log B \quad (1-18)$$

$$\log \frac{C}{D} = \log C - \log D \quad (1-19)$$

$$\log F^P = P \cdot \log F \quad (1-20)$$

$$\log \sqrt[n]{G} = \frac{1}{n} \cdot \log G \quad (1-21)$$

$$\log H^{P/Q} = \frac{P}{Q} \cdot \log H \quad (1-22)$$

$$\log 1 = 0 \quad (1-23)$$

Κοινοί Λογάριθμοι ή Λογάριθμοι Briggs

Αν ένας αριθμός N γραφεί σε ΠΕΣ, τότε η δύναμη του 10 είναι το χαρακτηριστικό του. Στους πίνακες λογαρίθμων είναι γραμμένο το δεκαδικό τμήμα. Ο πλήρης λογάριθμος είναι το χαρακτηριστικό συν το δεκαδικό τμήμα. Τα χαρακτηριστικά των κοινών λογαρίθμων ποτέ δεν γράφονται στους πίνακες. Ο ταχύτερος τρόπος για να βρεθεί ο λογάριθμος ενός αριθμού είναι με ένα υπολογιστή χειρός.

πρόβλημα 1.25 (α) Να βρεθεί το χαρακτηριστικό του $N = 240.000$. (β) Να βρεθεί ο πλήρης κοινός λογάριθμος του $P = 8.230.000$. (γ) Να βρεθεί ο κοινός λογάριθμος του $Q = 0.00036$. (δ) Αν είναι

$\log R = 4.8825$, να βρεθεί το R . Με χρήση λογαρίθμων, να βρεθούν τα (ε) $S = (246) \cdot (583)$ και (στ) $\sqrt{3.56} = T$.

Λύση (α) Αν γράψουμε τον N σε ΠΕΣ, είναι $N = 2.4 \times 10^5$. Έτσι το χαρακτηριστικό είναι 5. (β) Σε ΠΕΣ είναι $P = 8.23 \times 10^6$ και έτσι το χαρακτηριστικό είναι 6. Το δεκαδικό τμήμα από τον Πίνακα (Παράρτημα) είναι 0.9154. Ο πλήρης λογάριθμος είναι 6.9154. (γ) Αν ο Q γραφεί σε ΠΕΣ, είναι $Q = 3.6 \times 10^{-4}$. Έτσι το χαρακτηριστικό είναι -4. Από τον πίνακα το δεκαδικό τμήμα είναι 0.5563. Στην περίπτωση αυτή, η απάντηση είναι $\log Q = 6.5563 - 10$. (δ) $R = \text{antilog}(4.8825)$. Στους πίνακες ψάχνουμε το 0.8825 (σειρά 76, στήλη 3). Επειδή το χαρακτηριστικό που δόθηκε ήταν 4, πρέπει να υπάρχουν πέντε θέσεις στα αριστερά της υποδιαστολής στον αρχικό αριθμό R . Έτσι είναι $R = 76.300$. (ε) $\log S = \log 246 + \log 583 = 2.3909 + 2.7657 = 5.1566$. Θα είναι $S = \text{antilog}(5.1566) = 143000$ χωρίς παρεμβολή. (στ) $\log T = \log (3.56)^{1/2} = 1/2 \log 3.56 = 1/2(0.5514) = 0.2757$. Τότε είναι $T = \text{antilog}(0.2757) = 1.89$.

πρόβλημα 1.26 Να βρεθεί η εξωτερική διάμετρος του εσωτερικού αγωγού μιας αερόψυκτης ομοαξονικής γραμμής μετάδοσης αν η σύνθετη αντίσταση της γραμμής είναι 50Ω και η εσωτερική διάμετρος του εξωτερικού αγωγού είναι 1.02 cm . Είναι γνωστό ότι η χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση δίνεται από την $Z_0 = 138 \log(d_0/d_i)$, όπου d_0 και d_i είναι η εξωτερική και η εσωτερική διάμετροι της γραμμής, αντίστοιχα.

Λύση Με αντικατάσταση των τιμών, είναι

$$50 = 138 \cdot \log 1.02/d_i$$

$$\log = \frac{1.02}{d_i} = 0.3623$$

$$\frac{1.02}{d_i} = \text{antilog}(0.3623)$$

$$\frac{1.02}{d_i} = 2.303$$

Αν λύσουμε ως προς d_i , έχουμε

$$d_i = 0.443 \text{ cm}$$

Η βάση των Νεπεριών Λογαρίθμων

Ο αριθμός e , όταν χρησιμοποιείται σαν βάση, υπακούει στις ίδιες ιδιότητες των (1-5) μέχρι (1-13). Για παράδειγμα, είναι $e^0 = 1$, $e^A e^B = e^{A+B}$. Το e ονομάζεται και αριθμός του Euler. Η ταυτότητα του Euler συνδέει τις δυνάμεις με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις:

$$e^{\pm j\theta} = \cos \theta \pm j \sin \theta = a \pm jb \quad (1-24)$$

όπου είναι $a = \cos \theta$ και $b = \sin \theta$.

Η βάση e δίνεται με την παρακάτω σειρά:

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots \quad (1-25)$$

όπου είναι $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2 \times 1$, $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ κλπ. Αριθμός όπως ο $3!$ ονομάζεται 3 παραγοντικό.

Ο Φυσικός Λογάριθμος

Όταν χρησιμοποιούνται οι πίνακες λογαρίθμων, μπορούν να βρεθούν οι πλήρεις φυσικοί λογάριθμοι. Για την μετατροπή από $\log N$ σε $\ln M$, πολλαπλασιάζουμε το $\log N$ με 2.303. Για την μετατροπή από $\ln M$ σε $\log N$, πολλαπλασιάζουμε το $\ln M$ με 0.434. Οι φυσικοί λογάριθμοι ακολουθούν τις ιδιότητες των (1-18) μέχρι (1-23).

1.6 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Μια γωνία κατασκευάζεται όταν περιστρέφεται μια γραμμή γύρω από ένα σημείο. Η αρχική

θέση της γραμμής ονομάζεται *θέση αναφοράς της ακτίνας* και η τελική θέση ονομάζεται *τελική θέση της ακτίνας της γραμμής*. Και οι δύο θέσεις ονομάζονται *πλευρές της γωνίας* και το σημείο τομής ονομάζεται *κορυφή* (Σχ. 1-5). Οι γωνίες μετρούνται σε μίρες, ακτίνια (rad) και βαθμούς (grad).

Ένα τρίγωνο με μια ορθή γωνία (ίση με 90°) ονομάζεται *ορθογώνιο* (Σχ. 1-6). Από το σχήμα φαίνεται ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με 180° , ή

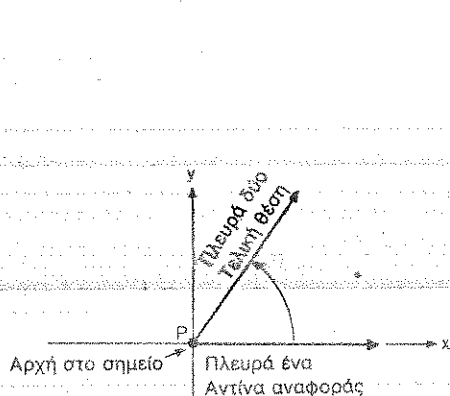
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad (1-26)$$

Επειδή είναι $\gamma = 90^\circ$,

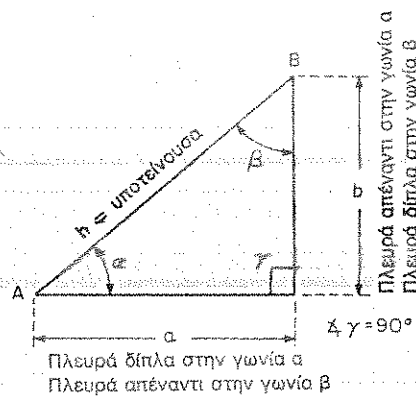
$$\alpha + \beta = 90^\circ \quad (1-27)$$

Το Πυθαγόρειο Θεώρημα αναφέρει ότι το άθροισμα των τετραγώνων των δύο καθέτων πλευρών του τριγώνου είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας. Στο Σχ. 1-6, είναι

$$a^2 + b^2 = h^2 \quad (1-28)$$



Σχ. 1-5 Κατασκευή γωνίας



Σχ. 1-6 Ορθογώνιο τρίγωνο

Ημίτονο, Συνημίτονο και Εφαπτομένη
Στο Σχ. 1-6, είναι

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{\text{α πέναντι πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} \\ &= \frac{b}{h} \end{aligned} \quad (1-29)$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\text{προσκειμένη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} \\ &= \frac{a}{h} \end{aligned} \quad (1-30)$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{α πέναντι πλευρά}}{\text{προσκειμένη πλευρά}} \quad (1-31a)$$

$$= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (1-31b)$$

Άλλες Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις δευτερεύουσας σημασίας είναι η τέμνουσα (sec), η συνεφαπτομένη (cot) και η συντέμνουσα (csc):

$$\sec = \frac{\text{υποτείνουσα}}{\text{προσκειμένη πλευρά}} \quad (1-32a)$$

$$\cot = \frac{\text{προσκεείμενη πλευρά}}{\text{απέναντι πλευρά}} \quad (1-32b)$$

$$\csc = \frac{\text{υποτείνουσα}}{\text{απέναντι πλευρά}} \quad (1-32c)$$

Οι συναρτήσεις αυτές είναι αντίστροφες των τριών βασικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \quad (1-33a)$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} \quad (1-33b)$$

$$\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} \quad (1-33c)$$

Αν οι γωνίες α και β είναι συμπληρωματικές, τότε ισχύουν οι παρακάτω ισότητες (Σχ. 1-6):

$$\sin \alpha = \cos \beta \quad (1-34a)$$

$$\tan \alpha = \cot \beta \quad (1-34b)$$

$$\sec \alpha = \csc \beta \quad (1-34c)$$

Αντίστροφες Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Μια αντίστροφη συνάρτηση υπάρχει όταν αναστραφούν ή ανταλλάγουν οι ρόλοι της ανεξάρτητης και της εξαρτημένης μεταβλητών. Μια συνηθισμένη αντίστροφη φράση μπορεί να είναι η "30° είναι η γωνία της οποίας το ημίτονο είναι 1/2". Η αρχική ευθεία φράση είναι "το ημίτονο των 30° είναι ίσο με 1/2". Θέλουμε τις παρακάτω φράσεις:

1. η α είναι ίση με μια γωνία που έχει ημίτονο ίσο με b/h .
2. η α είναι ίση με μια γωνία που έχει συνημίτονο ίσο με b/h .
3. η α είναι ίση με μια γωνία που έχει εφαπτομένη ίση με b/h .

Σε μαθηματική έκφραση, μια φράση όπως η "γωνία της οποίας το ημίτονο είναι" μπορεί να συντομευθεί σε δύο εκφράσεις, $\arcsin$ ή $\sin^{-1}$. Αν οι βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις γραφούν σαν αντίστροφες συναρτήσεις, τότε είναι

$$\alpha = \arcsin \frac{b}{h} = \sin^{-1} \frac{b}{h} \quad (1-35a)$$

$$\alpha = \arccos \frac{a}{h} = \cos^{-1} \frac{a}{h} \quad (1-35b)$$

$$\alpha = \arctan \frac{b}{a} = \tan^{-1} \frac{b}{a} \quad (1-35c)$$

Αντίστροφες συναρτήσεις έχουν και οι δευτερεύουσες τριγωνομετρικές συναρτήσεις:

$$\alpha = \operatorname{arcsec} \frac{h}{a} \quad (1-36a)$$

$$\alpha = \operatorname{arccot} \frac{a}{b} \quad (1-36b)$$

$$\alpha = \operatorname{arccsc} \frac{h}{b} \quad (1-36c)$$

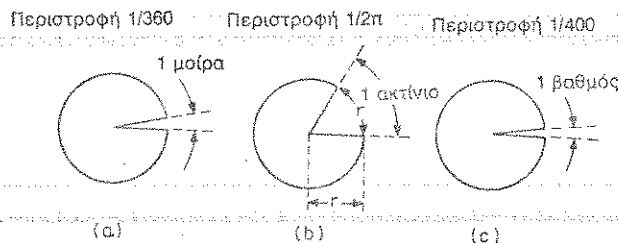
Στο Παράρτημα δίνονται οι τιμές των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Γωνίες και Τεταρτημόρια

Οι γωνίες είναι θετικές όταν μετρούνται από την ακτίνα αναφοράς με φορά αντίστροφη από

την φορά των δεικτών του ωρολογίου (ΑΔΩ) και αρνητικές όταν μετρούνται από την ακτίνα αναφοράς με φορά κατά την φορά των δεικτών του ωρολογίου (ΑΩ). Συνήθως, η θετική κατεύθυνση x (οριζόντια και προς τα δεξιά) είναι η ακτίνα αναφοράς. Οι γωνίες μεταξύ 0° και 90° ονομάζονται οξείες. Οι γωνίες των 90° ονομάζονται ορθές. Οι γωνίες μεταξύ 90° και 180° ονομάζονται αμβλείες. Η ευθεία γραμμή έχει ακριβώς 180° .

Η μια μοίρα, που γράφεται 1° , είναι η γωνία με κορυφή στο κέντρο του κύκλου που τέμνει τόξο ίσο με το $1/360$ της περιφέρειας (Σχ. 1-7α). Υπάρχουν δύο τρόποι υποδιαίρεσης της μοίρας. Μια μέθοδος είναι στο εξηνταδικό σύστημα όπου η μοίρα διαιρείται σε 60 πρώτα λεπτά και κάθε λεπτό διαιρείται σε 60 δεύτερα λεπτά (δευτερόλεπτα). Η άλλη μέθοδος είναι στο δεκαδικό σύστημα όπου η μοίρα διαιρείται και υποδιαίρεται σε δεκάδες, εκατοντάδες, χιλιάδες κλ π.



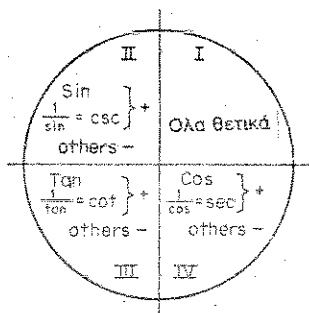
Σχ. 1-7 Μέτρηση γωνίας. (α) Μοίρες. (β) Ακτίνια. (γ) Βαθμοί.

Οι γωνίες μπορούν να μετρηθούν και με ακτίνια. Η μέθοδος διαιρεί την πλήρη περιστροφή σε 2π ή περίπου 6.28 ίσα τμήματα (Σχ. 1-7b). Το ακτίνιο είναι η γωνία που τέμνει τόξο ίσο σε μήκος με την ακτίνα του κύκλου και που έχει κορυφή στο κέντρο του κύκλου. Μια ακόμη μέθοδος μέτρησης γωνίας χρησιμοποιεί τον βαθμό όπου η μια περιστροφή διαιρείται σε 400 βαθμούς (Σχ. 1-7c). Στον Πίνακα 1-1 φαίνεται ο τρόπος μετατροπής στα τρία συστήματα μέτρησης γωνιών.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1-1 Μετατροπές Μετρήσεων Γωνιών

Μοίρες	Ακτίνια	Βαθμοί
1°	17.45×10^{-3}	1.11
57.296° ή $57^\circ 17' 45''$		63.662
0.9° ή $0^\circ 54' 00''$	15.71×10^{-3}	1

Ενας κύκλος μπορεί να διαιρεθεί σε τέσσερα τμήματα που ονομάζονται τεταρτημόρια. Το τεταρτημόριο I βρίσκεται μεταξύ 0° και 90° . Το τεταρτημόριο II βρίσκεται μεταξύ 90° και 180° . Το τεταρτημόριο III βρίσκεται μεταξύ 180° και 270° . Και το τεταρτημόριο IV βρίσκεται μεταξύ 270° και 360° . Οι γωνίες 0° , 90° , 180° και 270° ονομάζονται και γωνίες τεταρτημορίων. Στο Σχ. 1-8 φαίνονται τα πρόσημα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων σε όλα τα τεταρτημόρια.



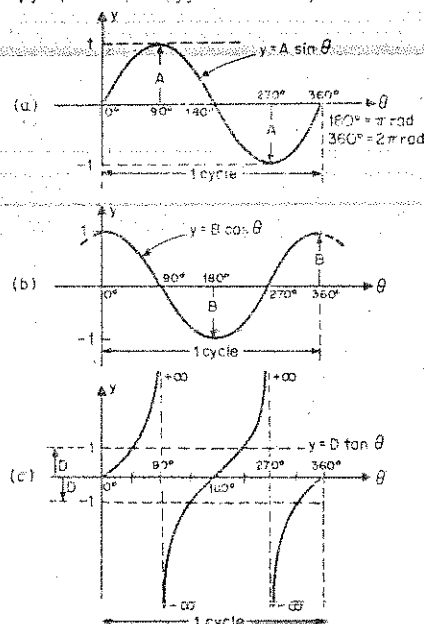
Σχ. 1-8 Τεταρτημόρια και πρόσημα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Γραφικές Παραστάσεις των Κύριων Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων

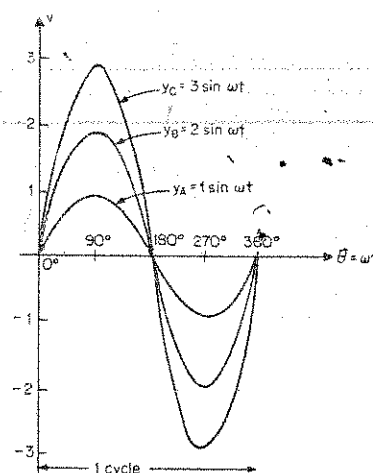
Η Ημιτονοειδής Κυματομορφή Στο Σχ. 1-9α φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης του ημιτόνου $y = A \sin \theta$, όπου $A = 1$.

Η Συνημιτονοειδής Κυματομορφή Στο Σχ. 1-9β φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης του συνημιτόνου $y = B \cos \theta$, όπου $B = 1$.

Η Εφαπτομενική Κυματομορφή Στο Σχ. 1-9c φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης της εφαπτομένης $y = D \tan \theta$, όπου $D = 1$.



Σχ. 1-9 Γραφικές παραστάσεις των βασικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων. (α) Ημιτόνου. (β) Συνημιτόνου. (γ) Εφαπτομένης.



Σχ. 1-10 Επίδραση της μεταβολής του πλάτους ημιτονοειδούς κυματομορφής.

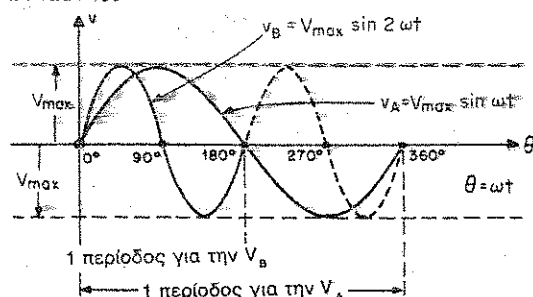
Πλάτος, Συχνότητα και Φάση Στο Σχ. 1-10 όπου έχουν σχεδιασθεί ταυτόχρονα οι $y_A = \sin \omega t$, $y_B = 2 \sin \omega t$ και $y_C = 3 \sin \omega t$ φαίνονται διάφορα πλάτη. Στο Σχ. 1-11 φαίνεται το αποτέλεσμα των μεταβολών συχνότητας (με σταθερό το πλάτος) με γραφική παράσταση των $v_A = V_{\max} \sin \omega t$ και $v_B = V_{\max} \sin 2\omega t$. Στο Σχ. 1-12 φαίνεται η επίδραση της γωνίας φάσης ϕ , εκτός από 0° , όπου σαν κυματομορφή αναφοράς χρησιμοποιείται η $\theta = V_{\max} \sin(\omega t + \phi)$.

Η γενική ημιτονοειδής εξίσωση (με μεταβλητή την v) μπορεί να γραφεί:

$$v = V_{\max} \sin [\omega t - (\pm \phi)] \quad (1-37)$$

όπου είναι

- $V_{\max}$ = το μέγιστο πλάτος
- ω = η κυκλική συχνότητα σε rad/sec
- t = ο χρόνος
- ϕ = η γωνία φάσης



Σχ. 1-11 Επίδραση της μεταβολής της συχνότητας σε ημιτονοειδή κυματομορφή.