

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

Ένα από τα βασικά πρακτικά προβλήματα της επιστήμης των συστημάτων αυτομάτου ελέγχου είναι η σχεδίαση ενός συστήματος τέτοιου ώστε η έξοδος του να "ακολουθεί" την είσοδο του, όσο γίνεται πιο πιστά.

Τα ασταθή συστήματα δεν μπορούν να μας εξασφαλίσουν μία τέτοια συμπεριφορά και επομένως δεν είναι χρήσιμα. Γι' αυτό, κατά τη σχεδίαση ενός συστήματος αυτομάτου ελέγχου, επιδιώκεται **πρώτα και πάνω απ' όλα** η εξασφάλιση της ευστάθειας του συστήματος.

Μετά την εξασφάλιση της ευστάθειας επιδιώκεται η ικανοποίηση άλλων απαιτήσεων σχεδίασης, όπως η ταχύτητα και η ακρίβεια απόκρισης, το εύρος ζώνης, το σφάλμα στη μόνιμη κατάσταση, κ.λπ..

Ένα σύστημα είναι ευσταθές, αν η έξοδός του για οποιαδήποτε είσοδο τείνει σε μια πεπερασμένη σταθερή τιμή μετά την απομάκρυνση της εισόδου.

Σε ένα σύστημα που βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία (μηδενική κατάσταση) εξετάζουμε την απόκρισή του $y(t)$ σε μια πεπερασμένη είσοδο διαταραχής (είσοδος που δρα για ορισμένο χρονικό διάστημα) καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο. Τρεις είναι οι δυνατές περιπτώσεις:

1) Σύστημα ευσταθές:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$$

δηλαδή ένα σύστημα ευσταθές επιστρέφει τελικά στην αρχική του κατάσταση που είχε πριν την διαταραχή.

2) Σύστημα οριακά ευσταθές:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= \lambda \quad \text{μια σταθερά} \\ &\text{ή} \quad = \Theta(t) \text{ ταλαντώσεις σταθερού πλάτους} \\ &\text{ή} \quad = \lambda + \Theta(t) \end{aligned}$$

3) Σύστημα ασταθές:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty$$

ή ταλαντώσεις άπειρου πλάτους

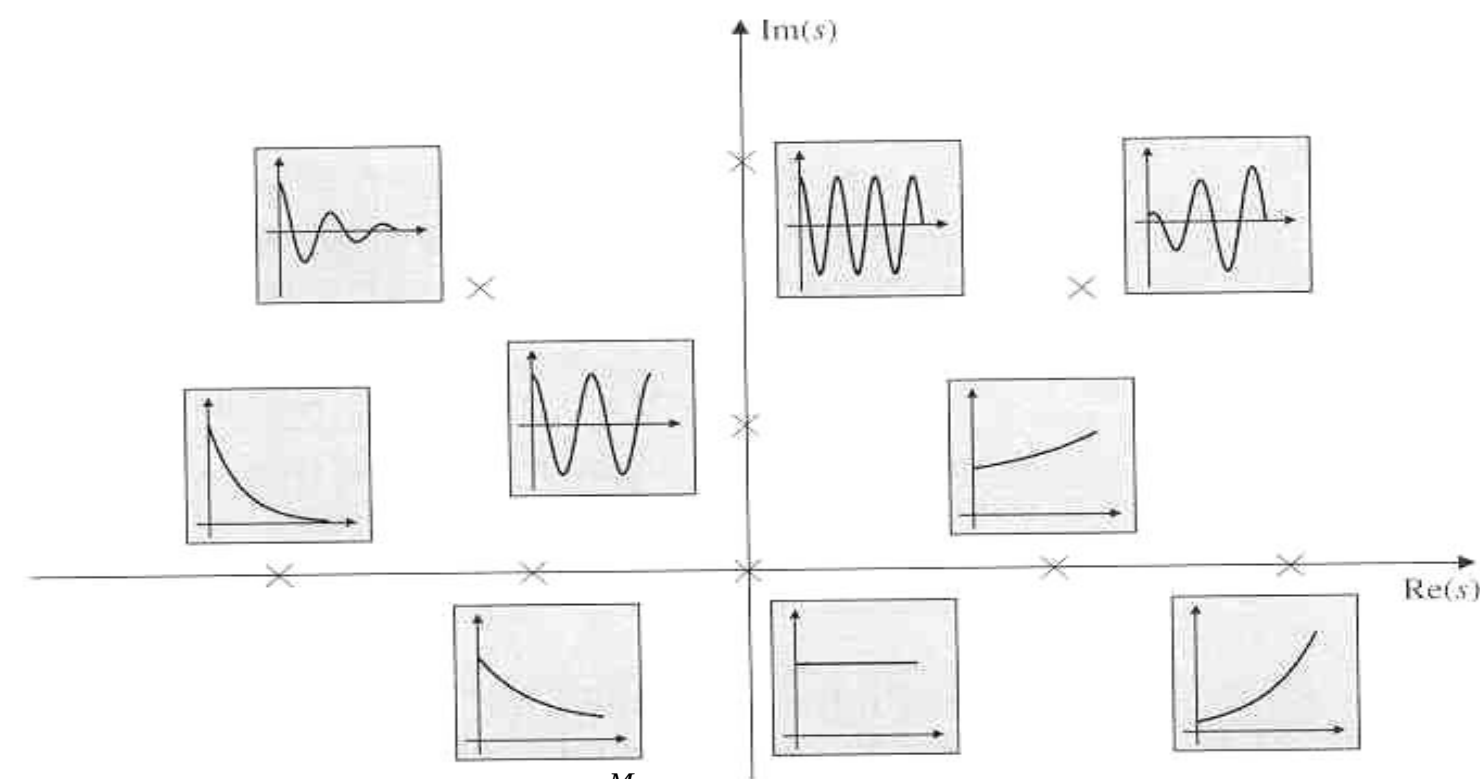
Από θεωρητικής πλευράς, η έννοια της ευστάθειας έχει μελετηθεί σε βάθος και έχουν προταθεί διάφοροι ορισμοί και κριτήρια ευστάθειας. Π.χ. για την κατηγορία των γραμμικών μη χρονικά μεταβαλλόμενων συστημάτων, ισχύει το πολύ γνωστό γεγονός, ότι η ευστάθεια συνδέεται με τη θέση των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης στο μιγαδικό επίπεδο.

Στην περίπτωση αυτή, ένα σύστημα είναι ευσταθές αν όλες οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο.

Αν έστω και μια ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης βρίσκεται στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο ή αν υπάρχει πολλαπλή ρίζα στον φανταστικό άξονα, το σύστημα είναι ασταθές.

Το σύστημα είναι οριακά ευσταθές αν υπάρχει μια ή περισσότερες μη πολλαπλές ρίζες στον φανταστικό άξονα.

Σχέση μεταξύ της θέσης των πόλων και των μηδενικών στο πεδίο-s και την αντίστοιχη απόκριση στο πεδίο του χρόνου για είσοδο μοναδιαία κρούση



$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K \prod_{i=1}^M (s + z_i)}{s^N \prod_{k=1}^Q (s + \sigma_k) \prod_{m=1}^R [s^2 + 2a_m s + (a_m^2 + \omega_m^2)]}$$

κρουστική απόκριση →

$$y(t) = \sum_{k=1}^Q A_k e^{-\sigma_k t} + \sum_{m=1}^R B_m \left(\frac{1}{\omega_m}\right) e^{-\sigma_m t} \sin(\omega_m t + \vartheta_m)$$

ΣΧΕΤΙΚΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

Ένα σύστημα κλειστού βρόχου πρέπει να είναι ευσταθές, ακόμη και όταν μεταβάλλονται οι τιμές των παραμέτρων του, γιατί μπορεί με μια μικρή αλλαγή των τιμών να καταστεί ασταθές.

Η σχετική ευστάθεια συνδέεται άμεσα με την θέση των πόλων του Σ.Κ.Β. σε σχέση με τον φανταστικό άξονα. **Βελτιώνεται, όσο οι πόλοι απομακρύνονται από τον φανταστικό άξονα.**

Οι προδιαγραφές για την σχετική ευστάθεια δίνονται στο πεδίο του χρόνου με την υπερύψωση στη βηματική απόκριση. Όσο μεγαλύτερη είναι τόσο μικρότερη η σχετική ευστάθεια. Μια τιμή υπερύψωσης πάνω από 1,5 δηλώνει ένα ζεύγος πόλων κοντά στον φανταστικό άξονα.

Για συστήματα δεύτερης τάξης ο συντελεστής απόσβεσης ζ (συνδέεται άμεσα με την υπερύψωση) είναι ένα επίσης μέτρο της σχετικής ευστάθειας.

Ο χρόνος αποκατάστασης για ένα ζεύγος συζυγών μιγαδικών πόλων ή ενός πόλου στον πραγματικό άξονα είναι αντιστρόφως ανάλογος του πραγματικού μέρους των ριζών ή της πραγματικής ρίζας. Επομένως η σχετική ευστάθεια συνδέεται άμεσα και με τον χρόνο αποκατάστασης, ο οποίος μπορεί να αποτελέσει μέτρο της.

Υπάρχουν κριτήρια ευστάθειας που μας βοηθούν να διαπιστώσουμε για ποιες τιμές των παραμέτρων έχουμε ευστάθεια.

Τα γνωστότερα είναι:

- 1) Το κριτήριο Routh-Hurwitz,
- 2) Γεωμετρικού Τόπου Ριζών (Γ.Τ.Ρ.),
- 3) Bode,
- 4) Nyquist, κ.λπ.

* *Κριτήριο Routh -Hurwitz*

Το κριτήριο ευστάθειας Routh, προσδιορίζει τον αριθμό των πόλων της συνάρτησης μεταφοράς κλειστού βρόχου που βρίσκονται στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο-s και δίνει απάντηση στο ερώτημα: «είναι το σύστημα ευσταθές;», χωρίς να προσδιορίζει τη σχετική ευστάθεια του συστήματος, όπως συμβαίνει με άλλα κριτήρια, όπως του Γ.Τ.Ρ..

Ας θεωρήσουμε ότι η Χ.Ε. $1 + G(s)H(s) = 0$ της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος έχει τη παρακάτω γενική μορφή:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

όπου όλοι οι συντελεστές $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbf{R}$ και είναι $\neq 0$

Εφ' όσον όλοι οι συντελεστές είναι **ΟΜΟΣΗΜΟΙ**, σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα του Routh-Hurwitz.

Πίνακας Routh-Hurwitz

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	.	.	.
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	.	.	.
s^{n-2}	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	.	.	.	.
s^{n-3}	c_n	c_{n-1}	c_{n-2}	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
s^1	e_n	e_{n-1}	.	.	.	.	.
s^0	f_n	f_{n-1}	.	.	.	.	.

Όπου οι όροι, $b_n, b_{n-1}, \dots, c_n, c_{n-1}, \dots, e_n \dots$ υπολογίζονται ως εξής:

$$b_n = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_{n-1} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$b_{n-2} = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

$$c_n = \frac{b_n a_{n-3} - b_{n-1} a_{n-1}}{b_n}$$

$$c_{n-1} = \frac{b_n a_{n-5} - b_{n-2} a_{n-1}}{b_n}$$

Σύμφωνα με το ΚΡΙΤΗΡΙΟ του Routh-Hurwitz για να είναι ευσταθές ένα σύστημα πρέπει **οι όροι της πρώτης στήλης** του πίνακα Routh να είναι **ΟΜΟΣΗΜΟΙ**.

Ο αριθμός των ριζών της Χ.Ε. που βρίσκονται στο δεξιό ημιεπίπεδο s ισούται με τον αριθμό αλλαγών του πρόσημου των συντελεστών της πρώτης στήλης του πίνακα Routh-Hurwitz.

Ειδικές περιπτώσεις για την συμπλήρωση του πίνακα Routh

- α.** Όταν ένας όρος της πρώτης στήλης είναι μηδέν, ενώ οι υπόλοιποι όροι της σειράς είναι διάφοροι του μηδενός ή δεν υπάρχουν, τότε, αντικαθίσταται ο μηδενικός όρος, από ένα πολύ μικρό αριθμό ομόσημο με τους προηγούμενους της πρώτης στήλης, και συνεχίζεται η ανάπτυξη του πίνακα.
- β.** Όταν όλοι οι όροι μίας σειράς του πίνακα Routh είναι μηδενικοί, ο πίνακας συμπληρώνεται με την τοποθέτηση, αντί των μηδενικών όρων με τους όρους της παραγωγισμένης βοηθητικής εξίσωσης της αμέσως προηγούμενης σειράς.
- γ.** Όταν τουλάχιστον δύο σειρές έχουν μηδενικούς όρους, τότε το σύστημα είναι ασταθές και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει δύο αντίθετους πραγματικούς πόλους με πολλαπλότητα 2.
- δ.** Για την εύρεση της κρίσιμης (οριακής) τιμής του K για ευστάθεια αρκεί να μηδενιστεί ο όρος της σειράς s^1 και να λυθεί η εξίσωση ως προς $K=K_{cr}$.
- ε.** Για την εύρεση της οριακής συχνότητας ταλαντώσεων του συστήματος αρκεί να λυθεί η βοηθητική εξίσωση της σειράς s^2 ως προς $\omega=\omega_{cr}$. Αυτή θα έχει τη μορφή: $\lambda_n s^2 + \lambda_{n-1} = 0$ όπου λ_n, λ_{n-1} οι συντελεστές της σειράς s^2 και όπου k θα τεθεί η τιμή K_{cr} που βρέθηκε.

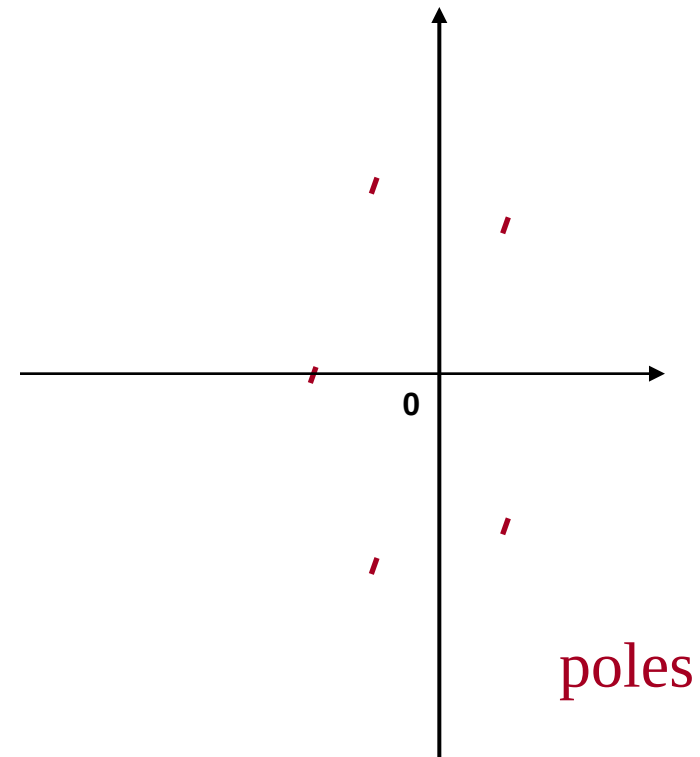
Παράδειγμα 1 : Κριτήριο Routh-Hurwitz

Χαρακτηριστική εξίσωση $s^5 + s^4 + 6s^3 + 5s^2 + 12s + 20 = 0$
(με τις ρίζες της)

Πίνακας Routh

$s^5:$	1	6	12	0
$s^4:$	1	5	20	0
$s^3:$	1	-8	0	
$s^2:$	13	20	0	
$s^1:$	$-\frac{124}{13}$	0		
$s^0:$	20	0		

$(-0,5986 \pm j2,1011$
 $0,7311 \pm j1,6667$
 $-1.2649)$



2 πόλοι στο δεξιό ημιεπίπεδο

**Παράδειγμα 2 : Κριτήριο Routh-Hurwitz (μηδέν στην πρώτη στήλη
και όχι μηδέν κάπου στην υπόλοιπη γραμμή)**

**Χαρακτηριστική εξίσωση
(με τις ρίζες της)**

Πίνακας Routh

$s^5:$	1	5	12	0
$s^4:$	1	5	10	0
$s^3:$	ε	2	0	
$s^2:$	c_1	10	0	
$s^1:$	d_1	0		
$s^0:$	10	0		

$$s^5 + s^4 + 5s^3 + 5s^2 + 12s + 10 = 0$$

$$(0,6519 \pm j1,7486$$

$$-0,7126 \pm j1,6617$$

$$-0,8784)$$

$$c_1 = \frac{5\varepsilon - 2}{\varepsilon} \approx \frac{-2}{\varepsilon}$$

$$d_1 = \frac{2c_1 - 10\varepsilon}{c_1} \approx 2$$

2 πόλοι στο δεξιό ημιεπίπεδο

Παράδειγμα 3 : Κριτήριο Routh-Hurwitz (όλα τα στοιχεία γραμμής μηδέν)

Χαρακτηριστική εξίσωση
(με τις ρίζες της)

$$s^3 + 10s^2 + 16s + 160 = 0$$
$$(\pm j4, -10)$$

Πίνακας Routh

$$s^3 \mid \quad 1 \quad 16 \quad 0$$

$$s^2 \mid \quad 10 \quad 160 \quad 0$$

$$s^1 \mid \quad 0 \quad 0$$

$$\frac{d}{ds}(10s^2 + 160) = 20s + 0$$



$$s^3 \mid \quad 1 \quad 16$$

$$s^2 \mid \quad 10 \quad 160$$

$$s^1 \mid \quad 20 \quad 0$$

$$s^0 \mid \quad 160 \quad 0$$

Δεν υπάρχουν ρίζες στο δεξί ημιεπίπεδο.

Οι συμμετρικές φανταστικές ρίζες βρίσκονται από την λύση της εξίσωσης που προκύπτει **πάντοτε** από την σειρά s^2 δηλ. $10s^2 + 160 = 0$ και είναι $\pm j4$.

Παράδειγμα 4 :Κριτήριο Routh-Hurwitz (παραμετρική εξίσωση)

Χαρακτηριστική εξίσωση

$$s^3 + 3s^2 + (2-k)s + k = 0$$

Πίνακας Routh

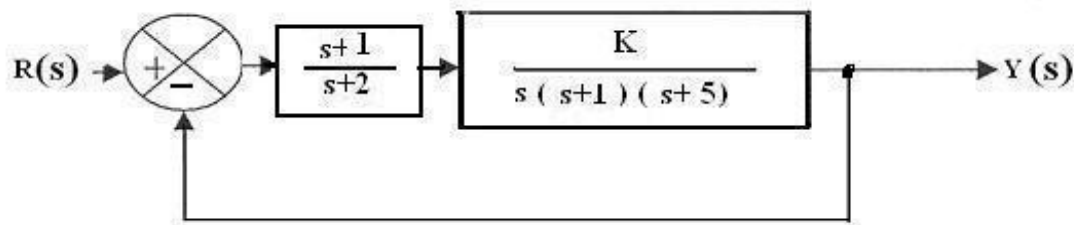
$$\begin{array}{l|lll} s^3 & 1 & 2-k & 0 \\ s^2 & 3 & k & 0 \\ s^1 & c & 0 & \\ s^0 & k & & \end{array}$$

$$c = \frac{3(2-k) - k}{3} = \frac{6-4k}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{6-4k}{3} > 0 \Leftrightarrow k < \frac{3}{2} \\ k > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{0 < k < \frac{3}{2}}$$

$$k_{cr} = 1,5 \Rightarrow 3s^2 + 1,5 = 0 \Leftrightarrow s^2 = -0,5 \Leftrightarrow s = \pm j0.707$$

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ένα σύστημα ελέγχου:



Ζητείται ο προσδιορισμός του συντελεστή κέρδους K , για το οποίο το Σ.Κ.Β. είναι ευσταθές και το σφάλμα στη μόνιμη κατάσταση ισορροπίας για σήμα εισόδου μοναδιαία συνάρτηση ράμπας να είναι μικρότερο ή ίσο με 20% του πλάτους της εισόδου.

$$G_o(s) = G_c(s)G(s) = \frac{s+1}{s+2} \frac{K}{s(s+1)(s+5)} = \frac{K}{s(s+2)(s+5)} \quad (\text{απλοποίηση})$$

$$T(s) = \frac{G_o(s)}{1+G_o(s)} = \frac{\frac{K}{s(s+2)(s+5)}}{1 + \frac{K}{s(s+2)(s+5)}} = \frac{K}{s^3 + 7s^2 + 10s + K}$$

$$s^3 \quad 1 \quad 10 \quad 0$$

$$s^2 \quad 7 \quad K \quad 0$$

$$s^1 \quad \frac{70-K}{7} \quad 0 \quad \left. \begin{array}{l} 70-K > 0 \Leftrightarrow K < 70 \\ K > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 < K < 70$$

$$s^0 \quad K$$

$$e_{ss} = \frac{A}{K_v} \leq 0,2A \Rightarrow K_v \geq 5$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_o(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K}{s(s+2)(s+5)} = \frac{K}{2 \cdot 5} = \frac{K}{10} \geq 5 \Leftrightarrow K \geq 50$$

$$\Rightarrow \boxed{50 \leq K < 70}$$