

ΜΑΘΗΜΑ 3

ορίζουσες 3^{ης} τάξης

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε κύρια με **ορίζουσες 3^{ης} τάξης**, δηλαδή ορίζουσες 3x3 πινάκων.

Το ενδιαφέρον μας για τις ορίζουσες δικαιολογείται από το γεγονός ότι αυτές αποτελούν το εργαλείο με τη βοήθεια του οποίου μπορούμε να λύσουμε γραμμικά συστήματα.

Ας είναι λοιπόν

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

έναν 3x3 πίνακα.

Ονομάζουμε **ορίζουσα** του A και τη συμβολίζουμε

$$\det A \text{ ή } \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

Τον πραγματικό αριθμό

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \beta_2 \gamma_3 + \beta_1 \gamma_2 \alpha_3 + \gamma_1 \alpha_2 \beta_3 - \\ & - \gamma_1 \beta_2 \alpha_3 - \alpha_1 \gamma_2 \beta_3 - \beta_1 \alpha_2 \gamma_3 \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\det A = \alpha_1 \beta_2 \gamma_3 + \beta_1 \gamma_2 \alpha_3 + \gamma_1 \alpha_2 \beta_3 - \\ - \gamma_1 \beta_2 \alpha_3 - \alpha_1 \gamma_2 \beta_3 - \beta_1 \alpha_2 \gamma_3$$

ή

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_1 \beta_2 \gamma_3 + \beta_1 \gamma_2 \alpha_3 + \gamma_1 \alpha_2 \beta_3 - \\ - \gamma_1 \beta_2 \alpha_3 - \alpha_1 \gamma_2 \beta_3 - \beta_1 \alpha_2 \gamma_3$$

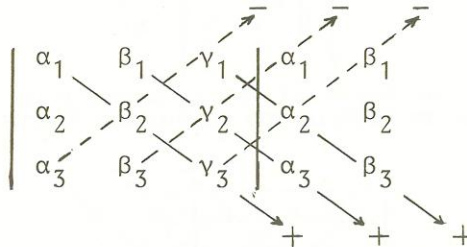
— Καλά, θα πεί κάποιος, και πως θα θυμόμαστε απέξω αυτόν τον σιδηρόδρομο;

— Μην ανησυχείτε και έχουμε φροντίσει για αυτό. Υπάρχει ένας εύκολος κανόνας με την βοήθεια του οποίου μπορούμε να υπολογίσουμε μία ορίζουσα $3^{\text{ης}}$ τάξης:

γράφουμε δεξιά της τις δύο πρώτες στήλες της

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

και παίρνουμε τα γινόμενα των στοιχείων που συνδέονται με ένα συνεχές βέλος με + μπροστά, ενώ τα γινόμενα των στοιχείων που συνδέονται με ένα διακεκομένο βέλος με - μπροστά:

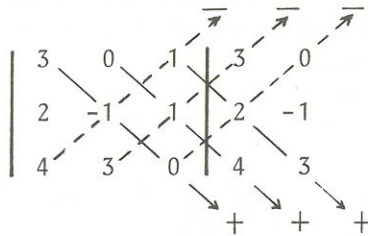


Ο κανόνας αυτός είναι γνωστός ως κανόνας του Sarrus.

Παράδειγμα 1^ο. Να υπολογίσετε την ακόλουθη ορίζουσα

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

Λύση. Εφαρμόζουμε τον κανόνα του Sarrus: γράφουμε δηλαδή τις δύο πρώτες στήλες της δεξιάς της και παίρνουμε τα γινόμενα των στοιχείων που συνδέονται με ένα συνεχές βέλος με + μπροστά, ενώ τα γινόμενα των στοιχείων που συνδέονται με ένα διακεκομμένο βέλος με - μπροστά:



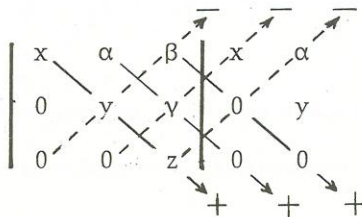
δηλαδή

$$\begin{aligned} \Delta &= 3 \cdot (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 3 - \\ &- 4 \cdot (-1) \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 3 - 0 \cdot 2 \cdot 0 = 1. \blacksquare \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2^ο Κάθε "τριγωνική" ορίζουσα είναι ίση με το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων της, δηλαδή

$$\begin{vmatrix} x & \alpha & \beta \\ 0 & y & \gamma \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix} = xyz$$

Πραγματικά με τη βοήθεια του κανόνα του Sarrus έχουμε



δηλαδή

$$\begin{vmatrix} x & \alpha & \beta \\ 0 & y & \gamma \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix} = x\gamma z + \alpha \cdot \gamma \cdot 0 + \beta \cdot 0 \cdot 0 - \\ - 0 \cdot \gamma \cdot \beta - 0 \cdot \gamma \cdot x - z \cdot 0 \cdot \alpha = x\gamma z$$

όπως ακριβώς το θέλαμε.

Όμοια βρίσκει κανείς ότι

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ \alpha & y & 0 \\ \beta & \gamma & z \end{vmatrix} = xyz \quad \blacksquare$$

Αν A είναι ένας 3×3 πίνακας, ονομάζουμε **ελάσωνα** ενός στοιχείου x του A , την $2^{\text{η}}$ τάξης ορίζουσα που προκύπτει από τον A αν διαγράψουμε την γραμμή και τη στήλη του x .

Για παράδειγμα, ας είναι

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 7 & 3 \\ 5 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

τότε η ελάσωνα του στοιχείου 2 είναι η $2^{\text{η}}$ τάξης ορίζουσα.

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}$$

που προκύπτει αν διαγράψουμε την $1^{\text{η}}$ γραμμή και την $1^{\text{η}}$ στήλη του A

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 0 & & \\ \hline 4 & 7 & 3 & & \\ 5 & 8 & -2 & & \end{array} \right)$$

Επίσης η ελάσωνα του στοιχείου 3 είναι η

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$$

που προκύπτει από τον A αν διαγράψουμε την 2^η γραμμή & την 3^η στήλη του

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 7 & 3 \\ 5 & 8 & -2 \end{array} \right)$$

Όμοια η ελάσσονα του στοιχείου 7 είναι η

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$$

που προκύπτει αν διαγράψουμε την 2^η γραμμή και 2^η στήλη του A:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 7 & 3 \\ 5 & 8 & -2 \end{array} \right)$$

Θα δώσουμε τώρα ένα άλλο απλό τρόπο υπολογισμού μίας 3^{ης} τάξης ορίζουσας.

Παίρνουμε ένα 3x3 πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix},$$

τα στοιχεία της 1^{ης} στήλης του και της ελάσσονες που αντιστοιχούν σ' αυτά:

$$\alpha_1 \quad \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$\alpha_2 \quad \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$\alpha_3 \quad \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

Τότε ισχύει

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \alpha_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

Πραγματικά από τον ορισμό έχουμε

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} &= \alpha_1 \beta_2 \gamma_3 + \beta_1 \gamma_2 \alpha_3 + \gamma_1 \alpha_2 \beta_2 - \\ &\quad - \alpha_3 \beta_2 \gamma_1 - \beta_3 \gamma_2 \alpha_1 - \gamma_3 \alpha_2 \beta_1 = \\ &= \alpha_1 (\beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2) - \alpha_2 (\beta_1 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_1) + \alpha_3 (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) = \\ &= \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \alpha_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

όπως το θέλαμε.

Ο τύπος που μόλις αποδείξαμε λέμε ότι μας δίνει το **ανάπτυγμα της ορίζουσας κατά τα στοιχεία της 1^{ης} στήλης της**.

Τώρα θα ρωτήσει κάποιος γιατί αυτή η προτίμηση στη πρώτη στήλη του πίνακα Α.

Με άλλα λόγια, αν πάρουμε τα στοιχεία της 2^{ης} στήλης και τις ελάχιστονες που αντιστοιχούν σ'αυτά, τότε ισχύει κάτι ανάλογο με τα προηγούμενα; Η απάντηση είναι καταφατική.

Πιο συγκεκριμένα αν πάρουμε

$$\beta_1 \quad \begin{vmatrix} \alpha_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$\beta_2 \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$\beta_3 \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

τότε έχουμε

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = -\beta_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \beta_2 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \beta_3 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

Ο παραπάνω τύπος λέμε ότι δίνει το **ανάπτυγμα της ορίζουσας κατά τα στοιχεία της 2^{ης} στήλης της**.

Η απόδειξη γίνεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως και πριν. Τέλος το ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία της 3^{ης} στήλης είναι

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \gamma_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} - \gamma_2 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} + \gamma_3 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

το που βάζουμε + και που - στα παραπάνω αναπτύγματα προκύπτει από το σχήμα

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{array}$$

Παράδειγμα 1^ο Να υπολογίσετε την ακόλουθη ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

αναπτύσσοντας την κατά τα στοιχεία της 2^{ης} στήλης της.

Λύση. Σύμφωνα με τα παραπάνω θα έχουμε

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2) \cdot 0 - 0 \cdot (-4) - 1 \cdot 16 = -16$$

Παράδειγμα 2^ο. Να υπολογίσετε την ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

αναπτύσσοντας την κατά τα στοιχεία της 1^{ης} στήλης της.

Λύση. Έχουμε

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 7 \cdot 0 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-4) = -6$$

Παράδειγμα 3^ο. Να δείξετε ότι

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

Λύση. Ας αναπτύξουμε την (3^{ης} τάξης) ορίζουσα κατά τα στοιχεία της 1^{ης} στήλης της:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} . \blacksquare$$

Αξιολογούμε το συμπέρασμα:

Αν σε μία ορίζουσα τα στοιχεία μίας στήλης της είναι όλα =0, τότε η ορίζουσα αυτή είναι =0.

Πραγματικά δεν έχουμε παρά να αναπτύξουμε την ορίζουσα κατά τα στοιχεία της στήλης που αποτελείται από μηδενικά:

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha & x \\ 0 & \beta & y \\ 0 & \gamma & z \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} \beta & y \\ \gamma & z \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} \alpha & x \\ \gamma & z \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} \alpha & x \\ \beta & y \end{vmatrix} = 0 . \blacksquare$$

Ότι κάναμε πριν για στήλες μπορούμε να το κάνουμε και για γραμμές. Έτσι αν πάρουμε τα στοιχεία της 1^{ης} γραμμής του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

και τις ελάσσονες που αντιστοιχούν σ' αυτά:

$$\alpha_1 \quad \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$\beta_1 \quad \begin{vmatrix} \alpha_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$\gamma_1 \quad \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

τότε ισχύει

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \beta_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \gamma_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

Η απόδειξη γίνεται όπως προηγούμενα:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} &= \alpha_1 \beta_2 \gamma_3 + \beta_1 \gamma_2 \alpha_3 + \gamma_1 \alpha_2 \beta_3 - \\ &\quad - \alpha_3 \beta_2 \gamma_1 - \beta_3 \gamma_2 \alpha_1 - \gamma_3 \alpha_2 \beta_1 = \\ &= \alpha_1 (\beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2) - \beta_1 (\alpha_2 \gamma_3 - \alpha_3 \gamma_2) + \gamma_1 (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) = \\ &= \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \beta_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \gamma_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Ανάλογους τύπους μπορούμε να γράψουμε και για τις άλλες γραμμές.

Παράδειγμα. Να υπολογίσουμε την ορίζουσα

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

αναπτύσσοντας την κατά τα στοιχεία

α) της 1^{ης} γραμμής της

β) της 2^{ης} γραμμής της

Λύση. Οι ελάσσονες των στοιχείων της 1^{ης} γραμμής είναι:

$$\text{του } 3 \text{ η } \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{του } 5 \text{ η } \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{του } -1 \text{ η } \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$$

οπότε

$$\Delta = 3 \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot 6 - 5 \cdot 8 - 12 = -34$$

Όμοια οι ελάσσονες των στοιχείων της 2^{ης} γραμμής είναι:

$$\text{του } 0 \text{ η } \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{του } 6 \text{ η } \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{του } 4 \text{ η } \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$$

οπότε

$$\Delta = -0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + 6 \cdot 1 - 4 \cdot 10 = -34.$$

ιδιοτιτες οριζουσων

Ι. Αν ανταλλάξουμε δύο στήλες μίας ορίζουσας, τότε αυτή αλλάζει σημείο, δηλαδή

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 & \alpha_2 \\ \gamma_3 & \beta_3 & \alpha_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \gamma_3 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

Θα αποδείξουμε την πρώτη (οι άλλες αποδεικνύονται ανάλογα) με την βοήθεια του κανόνα του Sarrus.

Έχουμε

$$\begin{aligned} - \begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} &= -(\beta_1 \alpha_2 \gamma_3 + \alpha_1 \gamma_2 \beta_3 + \gamma_1 \beta_2 \alpha_3 - \\ &\quad - \beta_3 \alpha_2 \gamma_1 - \alpha_3 \gamma_2 \beta_1 - \gamma_3 \beta_2 \alpha_1) = \\ &= \alpha_1 \beta_2 \gamma_3 + \beta_1 \gamma_2 \alpha_3 + \gamma_1 \alpha_2 \beta_3 - \\ &\quad - \alpha_3 \beta_2 \gamma_1 - \beta_3 \gamma_2 \alpha_1 - \gamma_3 \alpha_2 \beta_1 = \\ &= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2. Αν μία ορίζουσα έχει δύο στήλες ίσες, τότε αυτή είναι =0.

Ας πούμε Δ μία τέτοια ορίζουσα και ας ανταλλάξουμε τις δύο ίσες στήλες της· τότε η ορίζουσα που θα προκύψει θα είναι η ίδια η Δ . Από την άλλη μεριά όμως, σύμφωνα με την 1^η ιδιότητα, η Δ οφείλει να αλλάξει σημείο:

$$\Delta = -\Delta$$

άρα $2\Delta = 0$ και τελικά $\Delta = 0$. ■

3. Αν σε μία ορίζουσα όλα τα στοιχεία μίας στήλης της πολλαπλασιαστούν με λ , τότε η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με λ , δηλαδή

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \gamma_3 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

Θα αποδείξουμε την πρώτη (οι άλλες αποδεικνύονται ανάλογα) με την βοήθεια του κανόνα του Sarrus.

Έχουμε

$$\begin{aligned} - \begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} &= -(\beta_1 \alpha_2 \gamma_3 + \alpha_1 \gamma_2 \beta_3 + \gamma_1 \beta_2 \alpha_3 - \\ &\quad - \beta_3 \alpha_2 \gamma_1 - \alpha_3 \gamma_2 \beta_1 - \gamma_3 \beta_2 \alpha_1) = \\ &= \alpha_1 \beta_2 \gamma_3 + \beta_1 \gamma_2 \alpha_3 + \gamma_1 \alpha_2 \beta_3 - \\ &\quad - \alpha_3 \beta_2 \gamma_1 - \beta_3 \gamma_2 \alpha_1 - \gamma_3 \alpha_2 \beta_1 = \\ &= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2. Αν μία ορίζουσα έχει δύο στήλες ίσες, τότε αυτή είναι =0.

Ας πούμε Δ μία τέτοια ορίζουσα και ας ανταλλάξουμε τις δύο ίσες στήλες της· τότε η ορίζουσα που θα προκύψει θα είναι η ίδια η Δ . Από την άλλη μεριά όμως, σύμφωνα με την 1^η ιδιότητα, η Δ οφείλει να αλλάξει σημείο:

$$\Delta = -\Delta$$

άρα $2\Delta = 0$ και τελικά $\Delta = 0$. ■

3. Αν σε μία ορίζουσα όλα τα στοιχεία μίας στήλης της πολλαπλασιαστούν με λ , τότε η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με λ , δηλαδή

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \lambda\alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \lambda\alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \lambda\beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \lambda\beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \lambda\beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \lambda\gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \lambda\gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \lambda\gamma_3 \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

Ας αποδείξουμε την πρώτη απ' αυτές: Αναπτύσσοντας κατά τα στοιχεία της 1^{ης} στήλης παίρνουμε

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \lambda\alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \lambda\alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} &= (\lambda\alpha_1) \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} - (\lambda\alpha_2) \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + (\lambda\alpha_3) \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \\ &= \lambda \left\{ \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \alpha_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \right\} = \\ &= \lambda \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \quad \cdot \blacksquare \end{aligned}$$

4. Αν σε μία ορίζουσα τα στοιχεία μίας στήλης της είναι άθροισμα δύο προσθετών, τότε η ορίζουσα αυτή σπάει σε άθροισμα δύο οριζουσών ως εξής:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 + \alpha'_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 + \alpha'_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 + \alpha'_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha'_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha'_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha'_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 + \beta'_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 + \beta'_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 + \beta'_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta'_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta'_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta'_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 + \gamma'_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 + \gamma'_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 + \gamma'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma'_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma'_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma'_3 \end{vmatrix}$$

Ας αποδείξουμε την πρώτη απ'αυτές: Αναπτύσσοντας κατά τα στοιχεία της 1^{ης} στήλης παίρνουμε

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \alpha_1 + \alpha'_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 + \alpha'_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 + \alpha'_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} &= (\alpha_1 + \alpha'_1) \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} - (\alpha_2 + \alpha'_2) \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \\ &\quad + (\alpha_3 + \alpha'_3) \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \\ &= \left\{ \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \alpha_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \right\} + \\ &\quad + \left\{ \alpha'_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \alpha'_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha'_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \right\} = \\ &= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha'_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha'_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha'_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

όπως το θέλαμε. ■

5. Μία ορίζουσα μένει αμετάβλητη αν στα στοιχεία μίας στήλης της προσθέσουμε τα στοιχεία μίας άλλης στήλης της πολλαπλασιασμένα με ένα αριθμό λ , π.χ

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 + \lambda \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 + \lambda \alpha_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 + \lambda \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 + \lambda \alpha_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 + \lambda \alpha_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 + \lambda \alpha_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \kappa. \lambda. \pi.$$

Ας αποδείξουμε την πρώτη απ'αυτές: κάνοντας χρήση της ιδιότητας 4, έχουμε

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 + \lambda \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 + \lambda \alpha_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 + \lambda \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \lambda \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \lambda \alpha_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \lambda \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τις ιδιότητες 3 & 2 παίρνουμε

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \lambda \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \lambda \alpha_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \lambda \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \alpha_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \lambda \cdot 0 = 0$$

6. Μία ορίζουσα μένει αμετάβλητη αν τις γραμμές της τις κάνουμε στήλες, δηλαδή

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

Πραγματικά με τη βοήθεια του κανόνα του Sarrus έχουμε

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_1 \beta_2 \gamma_3 + \beta_1 \gamma_2 \alpha_3 + \gamma_1 \alpha_2 \beta_2 - \\ - \alpha_3 \beta_2 \gamma_1 - \beta_3 \gamma_2 \alpha_1 - \gamma_3 \alpha_2 \beta_1 \quad \text{και}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_1 \beta_2 \gamma_3 + \alpha_2 \beta_3 \gamma_1 + \alpha_3 \beta_1 \gamma_2 - \\ - \gamma_1 \beta_2 \alpha_3 - \gamma_2 \beta_3 \alpha_1 - \gamma_3 \beta_1 \alpha_3$$

Συγκρίνοντας τα δεύτερα μέλη διαπιστώνουμε ότι πρόκειται για τον ίδιο αριθμό, απ'όπου προκύπτει και η ζητούμενη ισότητα των οριζουσών.

Η ιδιότητα αυτή είναι πολύ σημαντική γιατί μας επιτρέπει να διατυπώσουμε για γραμμές ότι προηγούμενα αποδείξαμε για στήλες. Έτσι

- 1.** Αν ανταλλάξουμε δύο γραμμές μίας ορίζουσας, τότε η ορίζουσα αλλάζει σημείο.
- 2.** Αν μία ορίζουσα έχει δύο γραμμές ίσες τότε αυτή είναι $=0$.
- 3.** Αν σε μία ορίζουσα όλα τα στοιχεία μίας γραμμής της πολλαπλασιαστούν με λ , τότε η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με λ .
- 4.** Αν σε μία ορίζουσα τα στοιχεία μίας γραμμής της είναι άθροισμα δύο προσθετών, τότε η ορίζουσα σπάζει σε άθροισμα δύο οριζουσών.
- 5.** Μία ορίζουσα μένει αμετάβλητη αν στα στοιχεία μίας γραμμής της προσθέσουμε τα στοιχεία μίας άλλης γραμμής της πολλαπλασιασμένα με ένα αριθμό λ .

Ας αποδείξουμε για παράδειγμα την 3'. Έχουμε

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \lambda\alpha_2 & \lambda\beta_2 & \lambda\gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \stackrel{6)}{=} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \lambda\alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \lambda\beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \lambda\gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \stackrel{3)}{=} \lambda \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \stackrel{6)}{=} \\ = \lambda \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

Παράδειγμα 1^ο Χωρίς να υπολογίσετε τις παρακάτω ορίζουσες να δείξετε ότι

$$\begin{vmatrix} 1 & 11 & 111 \\ 2 & 22 & 222 \\ 3 & 33 & 333 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 22 & 33 & 11 \\ 222 & 333 & 111 \end{vmatrix}$$

Λύση. Έχουμε

$$\begin{vmatrix} 1 & 11 & 111 \\ 2 & 22 & 222 \\ 3 & 33 & 333 \end{vmatrix} = (\text{ανταλλάσσουμε τη 1^η γραμμή με τη 2^η}) \\ = - \begin{vmatrix} 2 & 22 & 222 \\ 1 & 11 & 111 \\ 3 & 33 & 333 \end{vmatrix} = (\text{ανταλλάσσουμε τη 2^η γραμμή με τη 3^η}) \\ = - \left\{ - \begin{vmatrix} 2 & 22 & 222 \\ 3 & 33 & 333 \\ 1 & 11 & 111 \end{vmatrix} \right\} = \begin{vmatrix} 2 & 22 & 222 \\ 3 & 33 & 333 \\ 1 & 11 & 111 \end{vmatrix} =$$

(κάνουμε τις γραμμές στήλες)

$$= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 22 & 33 & 11 \\ 222 & 333 & 111 \end{vmatrix}$$

Παράδειγμα 2^ο Να δείξετε ότι

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \\ 7 & 9 & 11 \end{vmatrix} = 0$$

χωρίς να υπολογίσετε την ορίζουσα

Λύση. Αν στην ορίζουσα

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \\ 7 & 9 & 11 \end{vmatrix}$$

αφαιρέσουμε από την 3^η στήλη την 2^η, τότε σύμφωνα με την ιδιότητα 5 η ορίζουσα δεν μεταβάλλεται, δηλαδή θα έχουμε

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 5 & 7 & 2 \\ 7 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

Όμοια αν στην παραπάνω ορίζουσα, αφαιρέσουμε από την 2^η στήλη την 1^η, θα βρούμε

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \\ 7 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Η τελευταία όμως ορίζουσα είναι =0 γιατί έχει δύο στήλες ίσες (ιδιότητα 3)

Παράδειγμα 3^ο Να υπολογίσετε την ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

Λύση. Προσθέτουμε την 2^η γραμμή στη 3^η (οπότε σύμφωνα με την ιδιότητα 5' η ορίζουσα δεν μεταβάλλεται):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha+\beta+\gamma & \alpha+\beta+\gamma & \alpha+\beta+\gamma \end{vmatrix} =$$

(βγάζουμε από τη 3^η γραμμή κοινό παράγοντα το $\alpha+\beta+\gamma$)

$$= (\alpha+\beta+\gamma) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma) \cdot 0 = 0$$

η παραπάνω ορίζουσα είναι $=0$, γιατί έχει δύο γραμμές ίσες.

Παράδειγμα 4^ο (Ορίζουσα Vandermonde)

Αν α, β & γ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε να δείξετε ότι

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} = (\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)$$

Λύση. Αφαιρούμε την 1^η στήλη από τις δύο άλλες (οπότε σύμφωνα με την ιδιότητα 5', η ορίζουσα δεν μεταβάλλεται)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta-\alpha & \gamma-\alpha \\ \alpha^2 & \beta^2-\alpha^2 & \gamma^2-\alpha^2 \end{vmatrix} =$$

(αναπτύσσουμε την τελευταία ορίζουσα κατά τα στοιχεία της 1^{ης} γραμμής)

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} \beta-\alpha & \gamma-\alpha \\ \beta^2-\alpha^2 & \gamma^2-\alpha^2 \end{vmatrix} = \\ &= \left[\text{όμως } \beta^2-\alpha^2 = (\beta-\alpha)(\beta+\alpha) \text{ \& } \gamma^2-\alpha^2 = (\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha) \right] \\ &= \begin{vmatrix} \beta-\alpha & \gamma-\alpha \\ (\beta-\alpha)(\beta+\alpha) & (\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha) \end{vmatrix} = (\beta-\alpha)(\gamma-\alpha) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \beta+\alpha & \gamma+\alpha \end{vmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha+\beta+\gamma & \alpha+\beta+\gamma & \alpha+\beta+\gamma \end{vmatrix} =$$

(βγάζουμε από τη 3^η γραμμή κοινό παράγοντα το $\alpha+\beta+\gamma$)

$$= (\alpha+\beta+\gamma) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma) \cdot 0 = 0$$

η παραπάνω ορίζουσα είναι $=0$, γιατί έχει δύο γραμμές ίσες.

Παράδειγμα 4^ο (Ορίζουσα Vandermonde)

Αν α, β & γ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε να δείξετε ότι

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} = (\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)$$

Λύση. Αφαιρούμε την 1^η στήλη από τις δύο άλλες (οπότε σύμφωνα με την ιδιότητα 5', η ορίζουσα δεν μεταβάλλεται)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta-\alpha & \gamma-\alpha \\ \alpha^2 & \beta^2-\alpha^2 & \gamma^2-\alpha^2 \end{vmatrix} =$$

(αναπτύσσουμε την τελευταία ορίζουσα κατά τα στοιχεία της 1^{ης} γραμμής)

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} \beta-\alpha & \gamma-\alpha \\ \beta^2-\alpha^2 & \gamma^2-\alpha^2 \end{vmatrix} = \\ &= \left[\begin{matrix} \text{όμως } \beta^2-\alpha^2 = (\beta-\alpha)(\beta+\alpha) \text{ \& } \gamma^2-\alpha^2 = (\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha) \end{matrix} \right] \\ &= \begin{vmatrix} \beta-\alpha & \gamma-\alpha \\ (\beta-\alpha)(\beta+\alpha) & (\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha) \end{vmatrix} = (\beta-\alpha)(\gamma-\alpha) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \beta+\alpha & \gamma+\alpha \end{vmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\beta - \alpha) (\gamma - \alpha) [\gamma + \alpha - \beta - \alpha] = \\
 &= (\beta - \alpha) (\gamma - \alpha) (\gamma - \beta)
 \end{aligned}$$

όπως το θέλαμε. ■

Πρίν κλείσουμε θα πρέπει να τονίσουμε **ότι όλες οι ιδιότητες που αποδείξαμε παραπάνω ισχύουν οι ίδιες και για ορίζουσες n τάξης.**

ασκησεις λυμενες

1

Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 8 & 3 & 14 \end{pmatrix}$$

Να βρήτε τις ελάσσονες των στοιχείων της 3^{ης} στήλης του A.

Πύση

Η ελάσσονα του στοιχείου -1 είναι η

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}$$

που προκύπτει από τον A αν διαγράψουμε την 3^η στήλη του και την 1^η γραμμή του

$$\begin{pmatrix} \boxed{3} & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 8 & 5 & \boxed{14} \end{pmatrix}$$

η ελάσσονα του στοιχείου 0 είναι η

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}$$

που προκύπτει από τον πίνακα A αν διαγράψουμε την 3^η στήλη του και την 2^η γραμμή του

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & \boxed{-1} \\ \boxed{0} & -2 & 0 \\ 8 & 3 & \boxed{14} \end{pmatrix}$$

Τέλος η ελάχισσα του στοιχείου 14 είναι η

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

που προκύπτει από τον A αν διαγράψουμε την 3^η στήλη του και την 3^η γραμμή του

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ \hline 8 & 3 & 14 \end{array} \right)$$

2

Να υπολογίσετε την ορίζουσα

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

- α) με τη μέθοδο του Sarrus.
 β) αναπτύσσοντας την κατά τα στοιχεία της τελευταίας της στήλης
 γ) αναπτύσσοντας την κατά τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής της.

Λύση

α) Γράφουμε τις δύο πρώτες στήλες δεξιά της ορίζουσας

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ - & - & - & & \end{array}$$

Στα γινόμενα των στοιχείων που συνδέονται με συνεχές βέλος βάζουμε το + μπροστά, ενώ στα γινόμενα των στοιχείων που συνδέονται με διακεκομένο βέλος βάζουμε το - μπροστά. Έτσι

$$\Delta = 1 \cdot 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \cdot 3 + (-1) \cdot (-2) \cdot 0 - 3 \cdot 1 \cdot (-1) - 0 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) \cdot 0 = 5$$

β) Μας χρειάζονται οι ελάσσονες των στοιχείων της τελευταίας στήλης.

η ελάσσονα του -1 είναι η $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3$

η ελάσσονα του 3 είναι η $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$

και η ελάσσονα του 2 είναι η $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Έτσι λοιπόν

$$\Delta = (-1) \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)(-3) - 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 5$$

γ) Έχουμε

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -(-2) \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 5$$

3

Να υπολογίσετε την ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 2 & 7^7 & 8^8 \\ 0 & 3 & 9^9 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Πύση

Όπως ξέρουμε κάθε "τριγωνική" ορίζουσα είναι ίση με το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων της. Η παραπάνω ορίζουσα είναι τριγωνική, έτσι

$$\begin{vmatrix} 2 & 7^7 & 8^8 \\ 0 & 3 & 9^9 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6$$

4

Να δείξετε ότι

$$\begin{vmatrix} 1+\lambda & 1+\mu & 1+\rho \\ 1+2\lambda & 1+2\mu & 1+2\rho \\ 1+3\lambda & 1+3\mu & 1+3\rho \end{vmatrix} = 0$$

Λύση

Στην ορίζουσα

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1+\mu & 1+\rho \\ 1+2\lambda & 1+2\mu & 1+2\rho \\ 1+3\lambda & 1+3\mu & 1+3\rho \end{vmatrix}$$

αφαιρούμε από την 3^η γραμμή της την 2^η, σύμφωνα με την ιδιότητα 5' η ορίζουσα δεν μεταβάλλεται:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1+\mu & 1+\rho \\ 1+2\lambda & 1+2\mu & 1+2\rho \\ \lambda & \mu & \rho \end{vmatrix}$$

Στην παραπάνω ορίζουσα αφαιρούμε από την 2^η γραμμή της την 1^η και πάλι σύμφωνα με την ιδιότητα 5' η ορίζουσα δεν μεταβάλλεται

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1+\mu & 1+\rho \\ \lambda & \mu & \rho \\ \lambda & \mu & \rho \end{vmatrix}$$

Η τελευταία ορίζουσα είναι ίση με 0 γιατί έχει δύο γραμμές ίσες (ιδιότητα 2').

5

Να υπολογίσετε την ορίζουσα

$$\Delta = \begin{vmatrix} \eta\mu^2\alpha & 1 & \sigma\upsilon\nu^2\alpha \\ \eta\mu^2\beta & 1 & \sigma\upsilon\nu^2\beta \\ \eta\mu^2\gamma & 1 & \sigma\upsilon\nu^2\gamma \end{vmatrix}$$

Λύση

Προσθέτουμε στην 1^η στήλη της Δ την 3^η στήλη της* σύμφωνα με την ιδιότητα 5 η ορίζουσα δεν μεταβάλλεται:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha & 1 & \sigma\upsilon\nu^2\alpha \\ \eta\mu^2\beta + \sigma\upsilon\nu^2\beta & 1 & \sigma\upsilon\nu^2\beta \\ \eta\mu^2\gamma + \sigma\upsilon\nu^2\gamma & 1 & \sigma\upsilon\nu^2\gamma \end{vmatrix}$$

Γνωρίζουμε όμως από την Τριγωνομετρία ότι

$$\eta\mu^2x + \sigma\upsilon\nu^2x = 1$$

έτσι η Δ γράφεται

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \sigma\upsilon\nu^2\alpha \\ 1 & 1 & \sigma\upsilon\nu^2\beta \\ 1 & 1 & \sigma\upsilon\nu^2\gamma \end{vmatrix}$$

Επειδή η παραπάνω ορίζουσα έχει δύο ίσες στήλες θα είναι $=0$, δηλαδή $\Delta=0$.

6

Χωρίς να υπολογίσετε τις παρακάτω ορίζουσες, να δείξετε ότι

$$\begin{vmatrix} 1 & 11 & 111 \\ 2 & 22 & 222 \\ 3 & 33 & 333 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -11 & 111 \\ -2 & 22 & -222 \\ 3 & -33 & 333 \end{vmatrix}$$

Λύση

Ας πάρουμε την ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & -11 & 111 \\ -2 & 22 & -222 \\ 3 & -33 & 333 \end{vmatrix}$$

και ας βγάλουμε από τη 2^η γραμμή της κοινό παράγοντα το -1·
θα έχουμε

$$\begin{vmatrix} 1 & -11 & 111 \\ -2 & 22 & -222 \\ 3 & -33 & 333 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & -11 & 111 \\ 2 & -22 & 222 \\ 3 & -33 & 333 \end{vmatrix} =$$

ας βγάλουμε τώρα από την 2^η στήλη της παραπάνω ορίζουσας το
-1

$$= (-1)(-1) \begin{vmatrix} 1 & 11 & 111 \\ 2 & 22 & 222 \\ 3 & 33 & 333 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 11 & 111 \\ 2 & 22 & 222 \\ 3 & 33 & 333 \end{vmatrix}$$

7

Αν

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 4$$

τότε

$$\begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ 2\alpha_1 & 2\alpha_2 & 2\alpha_3 \\ -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 \end{vmatrix} = ;$$

Λύση

Έχουμε

$$\begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ 2\alpha_1 & 2\alpha_2 & 2\alpha_3 \\ -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma_1 & 2\alpha_1 & -\beta_1 \\ \gamma_2 & 2\alpha_2 & -\beta_2 \\ \gamma_3 & 2\alpha_3 & -\beta_3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 & -\beta_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 & -\beta_2 \\ \gamma_3 & \alpha_3 & -\beta_3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_3 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 &= -(2 \cdot (-1)) \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \gamma_3 & \beta_3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \\
 &= 2 \cdot (-1) \cdot 4 = -8
 \end{aligned}$$

δηλαδή αρχικά κάναμε τις γραμμές στήλες στη δοθείσα ορίζουσα, μετά βγάλαμε κοινό παράγοντα από τη 2^η στήλη το 2 και από τη 3^η στήλη το -1 και τελικά ανταλλάξαμε την 1^η στήλη με τη 2^η και στη συνέχεια τη 2^η στήλη με την 3^η.

8

Να λύσετε την εξίσωση

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0$$

Λύση

Θα υπολογίσουμε πρώτα την ορίζουσα

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix}$$

Αφαιρώντας την 1^η στήλη της από την 2^η παίρνουμε

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 0 & 0 & 2-x \end{vmatrix}$$

Αφαιρώντας τώρα την 1^η στήλη από την 3^η βρίσκουμε

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -x & 0 \\ 1 & 0 & 1-x \end{vmatrix}$$

Η τελευταία ορίζουσα είναι "τριγωνική" οπότε

$$\Delta = (-x)(1-x)$$

Η αρχική εξίσωση λοιπόν γράφεται

$$-x(1-x)=0$$

και φανερά οι λύσεις της είναι

$$x=0 \quad \& \quad x=1.$$

9

Να λυθεί η εξίσωση

$$\begin{vmatrix} -1 & x & x \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Λύση

Θα υπολογίσουμε πρώτα την ορίζουσα

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & x & x \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix}$$

Ας προσθέσουμε στην 1^η στήλη της τις άλλες δύο* σύμφωνα με την ιδιότητα 5 η ορίζουσα δεν μεταβάλλεται, δηλαδή

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2x-1 & x & x \\ 2x-1 & -1 & x \\ 2x-1 & x & -1 \end{vmatrix} =$$

βγάζουμε το $2x-1$ από την 1^η στήλη (ιδιότητα 3)

$$= (2x-1) \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 1 & -1 & x \\ 1 & x & -1 \end{vmatrix} =$$

στην τελευταία ορίζουσα αφαιρούμε την 1^η γραμμή της από τις δύο άλλες

$$= (2x-1) \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 0 & -1-x & 0 \\ 0 & 0 & -1-x \end{vmatrix} =$$

έχουμε να κάνουμε με "τριγωνική" ορίζουσα οπότε

$$= (2x-1)(-1-x)^2 = (2x-1)(1+x)^2$$

Η αρχική λοιπόν εξίσωση γράφεται

$$(2x-1)(1+x)^2 = 0$$

και φανερά οι λύσεις της είναι

$$x = \frac{1}{2} \quad \& \quad x = -1 \quad (\text{διπλή})$$

10

Χωρίς να υπολογίσετε τις παρακάτω ορίζουσες να δείξετε ότι

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \frac{1}{2}\beta_1 & \frac{1}{4}\gamma_1 \\ 2\alpha_2 & \beta_2 & \frac{1}{2}\gamma_2 \\ 4\alpha_3 & 2\beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

Πύση

Ας πάρουμε την ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \frac{1}{2}\beta_1 & \frac{1}{4}\gamma_1 \\ 2\alpha_2 & \beta_2 & \frac{1}{2}\gamma_2 \\ 4\alpha_3 & 2\beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

και ας βγάλουμε από τη 2^η γραμμή κοινό παράγοντα το 2, θα έχουμε

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & 1/2 \beta_1 & 1/4 \gamma_1 \\ 2\alpha_2 & \beta_2 & 1/2 \gamma_2 \\ 4\alpha_3 & 2\beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1/2 \beta_1 & 1/4 \gamma_1 \\ \alpha_2 & 1/2 \beta_2 & 1/4 \gamma_2 \\ 4\alpha_3 & 2\beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} =$$

βγάζουμε τώρα το 4 κοινό παράγοντα από την 3^η γραμμή

$$= 2 \cdot 4 \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1/2 \beta_1 & 1/4 \gamma_1 \\ \alpha_2 & 1/2 \beta_2 & 1/4 \gamma_2 \\ \alpha_3 & 1/2 \beta_3 & 1/4 \gamma_3 \end{vmatrix} =$$

βγάζουμε τώρα το 1/2 κοινό παράγοντα από τη 2^η στήλη και 1/4 από την 3^η στήλη

$$= 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

11

Να υπολογίσετε τις ακόλουθες ορίζουσες

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \beta\gamma & \gamma\alpha & \alpha\beta \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \alpha+\beta \\ \beta\gamma & \gamma\alpha & \alpha\beta \end{vmatrix}$$

Λύση

Υπολογισμός της Δ_1 : αφαιρούμε την 1^η στήλη από τις δύο άλλες, οπότε παίρνουμε

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta-\alpha & \gamma-\alpha \\ \beta\gamma & \gamma\alpha-\beta\gamma & \alpha\beta-\beta\gamma \end{vmatrix} = \text{(αναπτύσσουμε κατά τα στοιχεία της 1^{ης} γραμμής)}$$

$$= \begin{vmatrix} \beta-\alpha & \gamma-\alpha \\ \gamma(\alpha-\beta) & \beta(\alpha-\gamma) \end{vmatrix} = \text{(βγάζουμε κοινό παράγοντα το } \beta-\alpha \text{ από την 1^η στήλη, και το } \gamma-\alpha \text{ από την 2^η στήλη)}$$

$$= (\beta - \alpha)(\gamma - \alpha) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\gamma & -\beta \end{vmatrix} = (\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta).$$

Υπολογισμός της Δ_2 : αφαιρούμε την 1^η στήλη από τις δύο άλλες, οπότε παίρνουμε

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \beta + \gamma & \alpha - \beta & \alpha - \gamma \\ \beta \gamma & \gamma(\alpha - \beta) & \beta(\alpha - \gamma) \end{vmatrix} = (\text{αναπτύσσουμε κατά τα στοι-} \\ &\quad \text{χεία της } 1^\eta \text{ γραμμής}) \\ &= \begin{vmatrix} \alpha - \beta & \alpha - \gamma \\ \gamma(\alpha - \beta) & \beta(\alpha - \gamma) \end{vmatrix} = (\text{βγάζουμε το } \alpha - \beta \text{ από την } 1^\eta \text{ στήλη} \\ &\quad \text{και το } \alpha - \gamma \text{ από την } 2^\eta) \\ &= (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \gamma & \beta \end{vmatrix} = (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma) \end{aligned}$$

Ο αναγνώστης θα κατάλαβε κιόλας την διαδικασία που ακολουθούμε για να υπολογίσουμε μία ορίζουσα, όταν μία γραμμή (ή μία στήλη) της αποτελείται αποκλειστικά από μονάδες.

12

Να υπολογίσετε την ακόλουθη ορίζουσα

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha - \beta - \gamma & 2\alpha & 2\alpha \\ 2\beta & \beta - \gamma - \alpha & 2\beta \\ 2\gamma & 2\gamma & \gamma - \alpha - \beta \end{vmatrix}$$

Λύση

Προσθέτουμε στην 1^η γραμμή τις δύο άλλες οπότε παίρνουμε

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha + \beta + \gamma & \alpha + \beta + \gamma & \alpha + \beta + \gamma \\ 2\beta & \beta - \gamma - \alpha & 2\beta \\ 2\gamma & 2\gamma & \gamma - \alpha - \beta \end{vmatrix} = (\text{βγάζουμε το } \alpha + \beta + \gamma \text{ κοινό πα-} \\ \quad \text{ράγοντα από την } 1^\eta \text{ γραμμή})$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2\beta & \beta - \gamma - \alpha & 2\beta \\ 2\gamma & 2\gamma & \gamma - \alpha - \beta \end{vmatrix} = (\text{αφαιρούμε την 1}^\eta \text{ στή-} \\ \text{λη από τις δύο άλλες})$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\beta & -(\beta + \gamma + \alpha) & 0 \\ 2\gamma & 0 & -(\beta + \gamma + \alpha) \end{vmatrix} =$$

(η τελευταία ορίζουσα είναι "τριγωνική" οπότε είναι ίση με το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων της)

$$= (\alpha + \beta + \gamma)^3$$

13

Να δείξετε ότι η παρακάτω ορίζουσα είναι =0:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \sin \alpha & \sin 2\alpha \\ \sin \alpha & \sin 2\alpha & \sin 3\alpha \\ \sin 2\alpha & \sin 3\alpha & \sin 4\alpha \end{vmatrix}$$

Λύση

Ας προσθέσουμε την 1^η στήλη στη 3^η:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \sin \alpha & \sin 2\alpha + 1 \\ \sin \alpha & \sin 2\alpha & \sin 3\alpha + \sin \alpha \\ \sin 2\alpha & \sin 3\alpha & \sin 4\alpha + \sin 2\alpha \end{vmatrix}$$

Γνωρίζουμε όμως από την Τριγωνομετρία ότι

$$\sin 2\alpha + 1 = 2 \sin^2 \alpha, \quad \sin 3\alpha + \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cdot \sin 2\alpha$$

$$\sin 4\alpha + \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \sin 3\alpha$$

οπότε έχουμε συνεχίζοντας

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \sigma\alpha & 2\sigma\alpha^2 \\ \sigma\alpha & \sigma\alpha^2 & 2\sigma\alpha \cdot \sigma\alpha^2 \\ \sigma\alpha^2 & \sigma\alpha^3 & 2\sigma\alpha \cdot \sigma\alpha^3 \end{vmatrix} =$$

(βγάσουμε το $2\sigma\alpha$ κοινό παράγοντα από τη $3^{\text{η}}$ στήλη)

$$= 2\sigma\alpha \begin{vmatrix} 1 & \sigma\alpha & \sigma\alpha \\ \sigma\alpha & \sigma\alpha^2 & \sigma\alpha^2 \\ \sigma\alpha^2 & \sigma\alpha^3 & \sigma\alpha^3 \end{vmatrix} = 2\sigma\alpha \cdot 0 = 0$$

γιατί η τελευταία ορίζουσα έχοντας δύο ίσες στήλες είναι $=0$.

14

Να δείξετε ότι

$$\begin{vmatrix} 1+\beta_1 & 1+\alpha_1 & \alpha_1+\beta_1 \\ 1+\beta_2 & 1+\alpha_2 & \alpha_2+\beta_2 \\ 1+\beta_3 & 1+\alpha_3 & \alpha_3+\beta_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Λύση

Κάνοντας χρήση της ιδιότητας 4 παίρνουμε

$$\begin{vmatrix} 1+\beta_1 & 1+\alpha_1 & \alpha_1+\beta_1 \\ 1+\beta_2 & 1+\alpha_2 & \alpha_2+\beta_2 \\ 1+\beta_3 & 1+\alpha_3 & \alpha_3+\beta_3 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1+\beta_1 & 1+\alpha_1 & \alpha_1 \\ 1+\beta_2 & 1+\alpha_2 & \alpha_2 \\ 1+\beta_3 & 1+\alpha_3 & \alpha_3 \end{vmatrix}}_{\Delta_1} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1+\beta_1 & 1+\alpha_1 & \beta_1 \\ 1+\beta_2 & 1+\alpha_2 & \beta_2 \\ 1+\beta_3 & 1+\alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}}_{\Delta_2}$$

Στη Δ_1 αφαιρούμε την $3^{\text{η}}$ στήλη από την $2^{\text{η}}$ και στη Δ_2 αφαιρούμε την $3^{\text{η}}$ στήλη από την $1^{\text{η}}$, οπότε βρίσκουμε

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1+\beta_1 & 1 & \alpha_1 \\ 1+\beta_2 & 1 & \alpha_2 \\ 1+\beta_3 & 1 & \alpha_3 \end{vmatrix} \quad \& \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1+\alpha_1 & \beta_1 \\ 1 & 1+\alpha_2 & \beta_2 \\ 1 & 1+\alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

Χρησιμοποιούμε και πάλι την ιδιότητα 4, οπότε

$$\Delta_1 = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha_1 \\ 1 & 1 & \alpha_2 \\ 1 & 1 & \alpha_3 \end{vmatrix}}_0 + \begin{vmatrix} \beta_1 & 1 & \alpha_1 \\ \beta_2 & 1 & \alpha_2 \\ \beta_3 & 1 & \alpha_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \beta_1 \\ 1 & 1 & \beta_2 \\ 1 & 1 & \beta_3 \end{vmatrix}}_0 + \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 1 & \alpha_2 & \beta_2 \\ 1 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

Όμως με τη βοήθεια της ιδιότητας 1, βρίσκουμε

$$\begin{vmatrix} \beta_1 & 1 & \alpha_1 \\ \beta_2 & 1 & \alpha_2 \\ \beta_3 & 1 & \alpha_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \& \quad \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 1 & \alpha_2 & \beta_2 \\ 1 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Τελικά λοιπόν η αρχική ορίζουσα είναι ίση με

$$\Delta_1 + \Delta_2 = 2 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 1 \end{vmatrix}$$

όπως το ζητούσαμε.

15

Να δείξετε ότι η ορίζουσα

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \alpha+2 & (\alpha+2)^2 \\ 1 & \alpha+3 & (\alpha+3)^2 \\ 1 & \alpha+4 & (\alpha+4)^2 \end{vmatrix}$$

είναι ανεξάρτητη του α .

Λύση

Η Δ είναι ορίζουσα Vandermonde* κατά συνέπεια

$$\Delta = [(\alpha+4) - (\alpha+3)] [(\alpha+3) - (\alpha+2)] [(\alpha+4) - (\alpha+2)] =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$$

δηλαδή η Δ είναι ανεξάρτητη του α .

16

Να υπολογίσετε την ορίζουσα

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma\upsilon\nu\alpha & \sigma\upsilon\nu\beta & \sigma\upsilon\nu\gamma \\ \sigma\upsilon\nu 2\alpha & \sigma\upsilon\nu 2\beta & \sigma\upsilon\nu 2\gamma \end{vmatrix}$$

Λύση

Με τη βοήθεια της σχέσης $\sigma\upsilon\nu 2x = 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 1$ βρίσκουμε

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma\upsilon\nu\alpha & \sigma\upsilon\nu\beta & \sigma\upsilon\nu\gamma \\ 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 & 2\sigma\upsilon\nu^2\beta - 1 & 2\sigma\upsilon\nu^2\gamma - 1 \end{vmatrix}$$

(σπάζουμε την ορίζουσα σε άθροισμα δύο οριζουσών)

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma\upsilon\nu\alpha & \sigma\upsilon\nu\beta & \sigma\upsilon\nu\gamma \\ 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha & 2\sigma\upsilon\nu^2\beta & 2\sigma\upsilon\nu^2\gamma \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma\upsilon\nu\alpha & \sigma\upsilon\nu\beta & \sigma\upsilon\nu\gamma \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma\upsilon\nu\alpha & \sigma\upsilon\nu\beta & \sigma\upsilon\nu\gamma \\ \sigma\upsilon\nu^2\alpha & \sigma\upsilon\nu^2\beta & \sigma\upsilon\nu^2\gamma \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma\upsilon\nu\alpha & \sigma\upsilon\nu\beta & \sigma\upsilon\nu\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

η τελευταία ορίζουσα είναι $=0$ γιατί έχει δύο ίσες γραμμές, ενώ η πρώτη ορίζουσα είναι Vandermonde, έτσι

$$\Delta = 2(\sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha)(\sigma\upsilon\nu\gamma - \sigma\upsilon\nu\alpha)(\sigma\upsilon\nu\gamma - \sigma\upsilon\nu\beta).$$

ασκησεις αλυτες

Να υπολογίσετε με τον κανόνα του Sarrus τις ακόλουθες ορίζουσες

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 & -6 \\ 11 & 9 & 4 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 10 & 7 & 44 \\ 0 & 1 & -2 \\ 31 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

* * *

Να υπολογίσετε τις ακόλουθες ορίζουσες

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 70 & 41 & 32 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 7 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 9 & 8 & 7 \end{vmatrix}$$

αναπτύσσοντας τις

α) κατά τα στοιχεία της 3^{ης} στήλης τους

β) κατά τα στοιχεία της 3^{ης} γραμμής τους

* * *

Να υπολογίσετε την ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \gamma & 1 \\ \beta+\gamma & \alpha & 1 \\ \gamma+\alpha & \beta & 1 \end{vmatrix}$$

* * *

Αν

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = -7$$

τότε

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 - 3\alpha_1 & 2\beta_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 - 3\alpha_2 & 2\beta_2 \\ \alpha_3 & \gamma_3 - 3\alpha_3 & 2\beta_3 \end{vmatrix} = ;$$

* * *

Να λύσετε την εξίσωση

$$\begin{vmatrix} 3-x & 2 & 2 \\ 1 & 4-x & 1 \\ -2 & -4 & -1-x \end{vmatrix} = 0$$

* * *

Να υπολογίσετε την

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ 1 & \alpha\beta & 1 \\ 1 & \beta & \alpha \end{vmatrix}$$

* * *

Να υπολογίσετε την ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \alpha+\beta \\ \beta & \alpha+\beta & \alpha \\ \alpha+\beta & \alpha & \beta \end{vmatrix}$$

* * *

Να δείξετε ότι

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \beta\gamma & \gamma\alpha & \alpha\beta \end{vmatrix} = (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$

* * *

Να υπολογίσετε τις ακόλουθες ορίζουσες

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^3 \\ 1 & \beta & \beta^3 \\ 1 & \gamma & \gamma^3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & \alpha^2 & \alpha^3 \\ 1 & \beta^2 & \beta^3 \\ 1 & \gamma^2 & \gamma^3 \end{vmatrix}$$

* * *

Να δείξετε ότι

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - \beta_1 & \alpha_1 - \beta_1 & \alpha_1 - \beta_2 \\ \alpha_2 - \beta_1 & \alpha_2 - \beta_2 & \alpha_2 - \beta_3 \\ \alpha_3 - \beta_1 & \alpha_3 - \beta_2 & \alpha_3 - \beta_3 \end{vmatrix} = 0$$

* * *

Να δείξετε ότι

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & -\alpha_2 & \alpha_3 \\ -\beta_1 & \beta_2 & -\beta_3 \\ \gamma_1 & -\gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

* * *

Να υπολογίσετε την ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} \alpha^3 - \beta^3 & \alpha + \beta & \alpha \\ \alpha - \beta & 1 & 1 \\ \alpha - \beta & 1 & \beta \end{vmatrix}$$

* * *

Να δείξετε ότι η ορίζουσα

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \alpha+3 & (\alpha+2)(\alpha+3) \\ 1 & \alpha+4 & (\alpha+3)(\alpha+4) \\ 1 & \alpha+5 & (\alpha+4)(\alpha+5) \end{vmatrix}$$

Είναι ανεξάρτητα του α

* * *

Να δείξετε ότι η ακόλουθη ορίζουσα είναι $=0$

$$\begin{vmatrix} 1 + \alpha_1 \beta_1 & 1 + \alpha_1 \beta_2 & 1 + \alpha_1 \beta_3 \\ 1 + \alpha_2 \beta_1 & 1 + \alpha_2 \beta_2 & 1 + \alpha_2 \beta_3 \\ 1 + \alpha_3 \beta_1 & 1 + \alpha_3 \beta_2 & 1 + \alpha_3 \beta_3 \end{vmatrix}$$

* * *