

MAΘHMA 1B

ασκήσεις αλυτές

Να βρήτε τα α, β, γ και δ , αν

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha+\beta \\ \beta-\gamma & \gamma+\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

* * *

Να βρήτε όλους τους 2×2 πίνακες A που έχουν την ιδιότητα

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} A = O$$

$$\left[\text{Απ. είναι } A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right]$$

* * *

Να δείξετε ότι δύο πίνακες της μορφής

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

αντιμετατίθενται.

* * *

Να βρήτε για ποιές τιμές των $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ οι ακόλουθοι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} \gamma & 1 \\ 1 & \delta \end{pmatrix}$$

αντιμετατίθενται.

* * *

Να βρήτε όλους τους 2×2 πίνακες που αντιμετατίθενται με τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left[\text{Απ. είναι της μορφής } \begin{pmatrix} \alpha+\beta & 2\beta \\ 3\beta & \alpha+4\beta \end{pmatrix} \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right]$$

* * *

Του πίνακα

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Να βρεθούν οι δυνάμεις A^2 & A^3 .

* * *

Να δείξετε ότι

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^{2\kappa} = \begin{pmatrix} 3^{2\kappa} & 0 \\ 0 & 3^{2\kappa} \end{pmatrix}$$

όπου κ φυσικός αριθμός.

* * *

Να βρήτε τη v -στή δύναμη των ακόλουθων πινάκων

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \& \quad \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{pmatrix}$$

* * *

Να βρεθεί η v -στή δύναμη

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^v$$

* * *

Να δείξετε ότι

$$\begin{pmatrix} 1/\lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^v = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda^v} & \frac{\mu}{\lambda^{v-1}}(1+\lambda^2+\dots+\lambda^{2(v-1)}) \\ 0 & \lambda^v \end{pmatrix}$$

* * *

αντιστρεψιμότητα

Λέμε ότι ο 2×2 πίνακας A είναι **αντιστρέψιμος** αν υπάρχει 2×2 πίνακας X τέτοιος ώστε

$$AX=I=XA \quad (1)$$

όπου I είναι ο μοναδιαίος 2×2 πίνακας.

Αν Y είναι ένας άλλος 2×2 πίνακας τέτοιος ώστε

$$AY=I=YA \quad (2)$$

τότε $Y=X$. Πραγματικά έχουμε

$$Y = Y \cdot I \stackrel{(1)}{=} Y(AX) = (YA)X \stackrel{(2)}{=} I \cdot X = X$$

Με άλλα λόγια, αν υπάρχει πίνακας X που να ικανοποιεί την (1) τότε αυτός είναι μοναδικός· ονομάζεται **αντίστροφος** του A και συμβολίζεται A^{-1} .

Με τον συμβολισμό αυτόν η (1) γράφεται

$$A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A$$

Παράδειγμα 1^ο . Ας πάρουμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Έχουμε

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Για τον πίνακα λοιπόν $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ βρήκαμε ένα πίνακα, τον

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, έτσι ώστε η (3) να ισχύει· τούτο μας λέει ότι ο

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος και ότι ο αντίστροφος του είναι

ο $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Αντίθετα ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

δεν είναι αντιστρέψιμος, γιατί αν υπήρχε πίνακας

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

τέτοιος ώστε

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

τότε θα παίρναμε

$$\begin{pmatrix} x+z & y+t \\ x+z & y+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

απ' όπου θα καταλήγαμε στο άτοπο

$$x+z=0 \quad \& \quad x+z=1$$

δηλαδή $0=1$. ■

Παράδειγμα 2^ο . Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Να δείξετε ότι $A^3 = I$. Είναι ο A αντιστρέψιμος; αν ναι, να βρείτε τον αντίστροφο του.

Λύση. Έχουμε

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ και}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Η σχέση $A^3 = I$ που μόλις αποδείξαμε γράφεται

$$A \cdot A^2 = I = A^2 \cdot A$$

Αν λοιπόν τον πίνακα A τον πολλαπλασιάσουμε από δεξιά και αριστερά με τον πίνακα A^2 βρίσκουμε τον μοναδιαίο πίνακα· τούτο μας λέει ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και ότι ο αντίστροφος του είναι ο A^2 , δηλαδή

$$A^{-1} = A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 3^ο . Να δείξετε ότι οι πίνακες

$$M(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad N(\alpha) = \begin{pmatrix} \text{συνα} & -\eta\mu\alpha \\ \eta\mu\alpha & \text{συνα} \end{pmatrix}$$

Είναι αντιστρέψιμοι και να βρείτε τους αντίστροφους τους.

Λύση. Όπως έχουμε δεί, για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει

$$M(\alpha)M(\beta) = M(\alpha + \beta)$$

Βάζοντας ιδιαίτερα $\beta = -\alpha$ παίρνουμε

$$M(\alpha)M(-\alpha) = M(\alpha - \alpha) = M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

και ανάλογα

$$M(-\alpha)M(\alpha) = M(-\alpha + \alpha) = M(0) = I$$

Αν λοιπόν τον πίνακα $M(\alpha)$ τον πολλαπλασιάσουμε από δεξιά και αριστερά με τον πίνακα $M(-\alpha)$, βρίσκουμε τον μοναδιαίο πίνακα· αυτό μας λέει ότι ο $M(\alpha)$ είναι αντιστρέψιμος και ότι ο αντίστροφος του είναι ο $M(-\alpha)$, δηλαδή

$$[M(\alpha)]^{-1} = M(-\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

Εντελώς όμοια βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} [N(\alpha)]^{-1} &= N(-\alpha) = \begin{pmatrix} \csc(-\alpha) & -\eta\mu(-\alpha) \\ \eta\mu(-\alpha) & \csc(-\alpha) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \csc\alpha & \eta\mu\alpha \\ -\eta\mu\alpha & \csc\alpha \end{pmatrix} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ιδιότητες αντιστρέψιμων πινάκων:

Αν οι πίνακες A & B είναι αντιστρέψιμοι, τότε και ο AB είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε και ο A^{-1} είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

Τέλος, αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και $\lambda \neq 0$, τότε και ο πίνακας λA είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$$

Αν δείξουμε ότι

$$(AB)(B^{-1}A^{-1})=I=(B^{-1}A^{-1})(AB),$$

τότε ασαφώς ο AB θα είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφος του θα είναι ο $B^{-1}A^{-1}$ όπως το ζητάμε.

Έχουμε

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= [(AB)B^{-1}]A^{-1} = \\ &= [A(BB^{-1})]A^{-1} = (A \cdot I)A^{-1} = AA^{-1} = I\end{aligned}$$

και ανάλογα

$$\begin{aligned}(B^{-1}A^{-1})(AB) &= [(B^{-1}A^{-1})A]B = \\ &= [B^{-1}(A^{-1}A)]B = (B^{-1} \cdot I)B = B^{-1}B = I\end{aligned}$$

Ας έλθουμε τώρα να αποδείξουμε την δεύτερη σχέση. Αφού ο A είναι αντιστρέψιμος θα έχουμε

$$A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A$$

δηλαδή ο πίνακας A^{-1} αν πολλαπλασιαστεί από δεξιά και αριστερά με τον πίνακα A μας δίνει τον μοναδιαίο πίνακα· άρα ο A^{-1} είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφος του είναι ο A , δηλαδή $(A^{-1})^{-1} = A$ όπως το θέλαμε. Η τελευταία σχέση αποδεικνύεται ανάλογα: έχουμε

$$(\lambda A) \left(\frac{1}{\lambda} A^{-1} \right) = \lambda \cdot \frac{1}{\lambda} (AA^{-1}) = I$$

και

$$\left(\frac{1}{\lambda} A^{-1} \right) (\lambda A) = \frac{1}{\lambda} \cdot \lambda (A^{-1}A) = I$$

δηλαδή, αν ο πίνακας λA πολλαπλασιαστεί από δεξιά και αριστερά με τον $\frac{1}{\lambda} A^{-1}$ δίνει τον μοναδιαίο πίνακα· άρα ο λA είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφος του είναι ο $\frac{1}{\lambda} A^{-1}$, δηλαδή $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$. ■

Το ερώτημα που τώρα μπαίνει είναι το εξής: υπάρχει κανένας απλός τρόπος για να ελέγχουμε αν ένας 2×2 πίνακας είναι αντιστρέψιμος; κι ακόμη, στην περίπτωση που είναι, μπορούμε να υπολογίζουμε εύκολα τον αντίστροφο του;
Στα ερωτήματα αυτά θα απαντήσουμε αμέσως:

Για να είναι ο 2×2 πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

αντιστρέψιμος πρέπει και αρκεί η ορίζουσα του να είναι $\neq 0$, δηλαδή

$$\det A \neq 0$$

Στη περίπτωση αυτή ο αντίστροφος του είναι ο πίνακας

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

Ας κάνουμε την απόδειξη. Όπως έχουμε δει ο A ικανοποιεί την εξίσωση

$$A^2 - (\alpha + \delta)A + (\det A)I = 0$$

όπου I και 0 είναι αντίστοιχα ο μοναδιαίος και ο μηδενικός 2×2 πίνακας.

Η παραπάνω σχέση γράφεται

$$(\alpha + \delta)A - A^2 = (\det A)I$$

ή, ακόμη

$$[(\alpha + \delta)I - A]A = (\det A)I \quad (4)$$

Καθώς όμως

$$(\alpha + \delta)I - A = (\alpha + \delta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

η (4) γράφεται

$$\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = (\det A) I$$

Αν λοιπόν $\det A \neq 0$, τότε θα έχουμε

$$\left[\frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \delta \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = I$$

και ανάλογα

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \left[\frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \right] = I$$

δηλαδή ο A είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφος του είναι ο 2×2 πίνακας

$$\frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

Θα αποδείξουμε τώρα το αντίστροφο: ας υποθέσουμε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε

$$A \cdot A^{-1} = I$$

οπότε παίρνοντας τις ορίζουσες των παραπάνω πινάκων βρίσκουμε

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det I$$

ή

$$\det A \cdot \det A^{-1} = 1 \quad (5)$$

απ'όπου $\det A \neq 0$ όπως το θέλαμε. ■

Έτσι αμέσως βλέπουμε ότι οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ και } B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμοι αφού

$$\det A = 1 \cdot 2 - (-1) \cdot 0 = 2 \neq 0$$

$$\det B = 4 \cdot 8 - (-3) \cdot 7 = 53 \neq 0$$

και οι αντίστροφοι τους είναι οι πίνακες

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad B^{-1} = \frac{1}{53} \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Αντίθετα οι πίνακες

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \& \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

δεν είναι αντιστρέψιμοι αφού

$$\det \Gamma = 0 \cdot (-4) - 2 \cdot 0 = 0 \quad \& \quad \det \Delta = 1 \cdot 8 - 4 \cdot 2 = 0 \quad . \blacksquare$$

Μία ακόμη παραξενιά που έχει το γινόμενο πινάκων είναι η εξής:
η σχέση

$$AB_1 = AB_2 \quad \& \quad A \neq 0$$

δεν συνεπάγεται αναγκαστικά $B_1 = B_2$.

Πάρτε για παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

τότε βλέπει κανείς ότι

$$AB_1 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = AB_2$$

και ενώ ο $A \neq 0$, εν τούτοις

$$B_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = B_2$$

Στο γινόμενο πινάκων λοιπόν δεν ισχύει γενικά ο νόμος της απλοποίησης.

Αν όμως συμβεί ο πίνακας A να είναι αντιστρέψιμος, τότε μπορούμε να απλοποιήσουμε. Πιο συγκεκριμένα έχουμε το εξής:

$$\begin{aligned} &\text{Αν } AB_1 = AB_2 \text{ και ο } A \text{ είναι αντιστρέψιμος,} \\ &\text{τότε } B_1 = B_2 \text{ και} \\ &\text{Αν } B_1A = B_2A \text{ και ο } A \text{ είναι αντιστρέψιμος,} \\ &\text{τότε } B_1 = B_2 \end{aligned}$$

Πραγματικά, πολλαπλασιάζοντας τη σχέση

$$AB_1 = AB_2$$

από αριστερά με τον πίνακα A^{-1} , παίρνουμε

$$A^{-1}(AB_1) = A^{-1}(AB_2)$$

ή

$$(A^{-1}A)B_1 = (A^{-1}A)B_2$$

ή, ακόμη

$$I \cdot B_1 = I \cdot B_2$$

ή, τέλος

$$B_1 = B_2 \quad \blacksquare$$

ασκήσεις λυμένες

1

Να βρείτε τον άγνωστο 2×2 πίνακα X στην ακόλουθη εξίσωση

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Λύση

Ο πίνακας $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος γιατί η ορίζουσα του είναι $\neq 0$:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 1 \neq 0$$

Πολλαπλασιάζοντας λοιπόν την (*) από αριστερά με τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \text{ παίρνουμε}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ή

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Όμως

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

οπότε

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}$$

2

Να βρείτε τον άγνωστο 2×2 πίνακα X στην ακόλουθη εξίσωση

$$X \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (*)$$

διότι

Ο πίνακας $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ είναι αντίστρέψιμος γιατί η ορίζουσα του είναι $\neq 0$:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 - 0 \cdot 4 = 2 \neq 0$$

Πολλαπλασιάζοντας λοιπόν τις σχέσεις (*) από δεξιά με

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \text{ παίρνουμε}$$

$$X \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

ή

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Όμως

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Έτσι

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

3

Να βρήτε τον άγνωστο 2×2 πίνακα X από την ακόλουθη εξίσωση

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Λύση

Οι πίνακες $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμοι γιατί οι ορίζουσες τους είναι $\neq 0$:

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = -2 \quad \& \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

Πολλαπλασιάζοντας λοιπόν την (*) από δεξιά με τον

$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$ και από αριστερά με τον $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$ παίρνουμε τε-
λικά

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Είναι όμως

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \quad \& \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Έτσι λοιπόν

$$X = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 5 & 24 \end{pmatrix}$$

4

Ας είναι A ένας αντιστρέψιμος πίνακας και ας υποθέσουμε ότι ο αντίστροφος του είναι ο

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Να βρήτε τον πίνακα A

Λύση

Όπως έχουμε δει, αν A είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας, τότε

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

Εδώ μας δίνεται ότι

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Έτσι

$$A = (A^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

5

Ας είναι A & B αντιστρέψιμοι 2x2 πίνακες τέτοιοι ώστε

$$A^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Αν ο B είναι ο πίνακας $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, τότε να βρήτε τον πίνακα A.

Λύση

Από την υπόθεση έχουμε ότι

$$A^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις αυτές κατά μέλη παίρνουμε

$$(A^{-1}B^{-1})B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

ή

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

οπότε

$$A = (A^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

6

Για ποιές τιμές του μ ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} \mu+1 & 2 \\ 2 & \mu-1 \end{pmatrix}$$

Είναι αντιστρέψιμος;

Λύση

Βρίσκουμε αρχικά την ορίζουσα του:

$$\det \begin{pmatrix} \mu+1 & 2 \\ 2 & \mu-1 \end{pmatrix} = \mu^2 - 2\mu - 3$$

Βρίσκουμε στη συνέχεια για ποιές τιμές του μ μηδενίζεται η ορίζουσα $\det A$, μ'άλλα λόγια βρίσκουμε τις λύσεις της εξίσωσης

$$\mu^2 - 2\mu - 3 = 0$$

Είναι $\mu_1 = -1$ & $\mu_2 = 3$. Έτσι όταν το μ είναι $\neq -1, 3$ έχουμε $\det A \neq 0$ και συνεπώς ο A είναι αντιστρέψιμος.

7

Να βρήτε τους 2×2 πίνακες X & Y που ικανοποιούν το σύστημα

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Λύση

Ο $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ που είναι ο συντελεστής του X στην πρώτη εξίσωση,

είναι αντιστρέψιμος αφού

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

Πολλαπλασιάζοντας λοιπόν από αριστερά την 1^η εξίσωση με τον

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \text{ παίρνουμε}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y = \\ = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{ή, καθώς } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

απ' όπου

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Y \quad (*)$$

Βάζοντας τον X αυτόν που μόλις βρήκαμε στη 2^η εξίσωση, παίρνουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} Y \right] + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ή, κάνοντας τις πράξεις

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ή, ακόμη

$$\left[- \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right] Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

δηλαδή

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Από την προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι ο Y είναι ο αντίστροφος του πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, δηλαδή

$$Y = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Βάζοντας λοιπόν στην (*) του πίνακα Y που μόλις βρήκαμε, παίρνουμε

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 17 & 11 \\ -10 & -8 \end{pmatrix}$$

Οι ζητούμενοι λοιπόν πίνακες είναι

$$X = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 17 & 11 \\ -10 & -8 \end{pmatrix} \quad \& \quad Y = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

ασκησεις αλυτες

Ποιοί από τους παρακάτω πίνακες είναι αντιστρέψιμοι; για όσους συμβαίνει αυτό να βρήτε τους αντίστροφους τους.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 24 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 14 \end{pmatrix}$$

* * *

Να βρήτε τον 2×2 πίνακα X που ικανοποιεί τη σχέση

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

* * *

Ας είναι A ένας αντιστρέψιμος 2×2 πίνακας και ας είναι

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix},$$

ο αντίστροφος του πίνακα $7A$. Να βρήτε τον A .

* * *

Είναι ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ -\alpha & 1+\alpha \end{pmatrix}$$

αντιστρέψιμος; αν ναι, να βρήτε τον αντίστροφο του.

* * *

Να βρήτε τους

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}^{-1}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

* * *

Για ποιές τιμές του λ οι πίνακες

$$\begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ 3 & \lambda-2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1+\lambda \end{pmatrix}$$

αντιστρέφονται;

* * *

Αν οι πίνακες A & B είναι αντιστρέψιμοι και είναι

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

τότε να βρήτε τον πίνακα A .

* * *

Για ποιές τιμές του λ οι παρακάτω πίνακες δεν είναι αντιστρέψιμοι;

$$A = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8-\lambda & 3+7\lambda \\ -1 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

* * *

Είναι το άθροισμα δύο αντιστρέψιμων πινάκων, πίνακας αντιστρέψιμος;

* * *

Είναι ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 1/\lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \lambda \neq 0$$

αντιστρέψιμος; αν ναι, ποίός είναι ο αντίστροφος του;

* * *

Να βρήτε τους άγνωστους 2×2 πίνακες X & Y που ικανοποιούν το σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{l} X + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

* * *

Να βρήτε τους 2×2 πίνακες X & Y που ικανοποιούν το σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{l} 2X - Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

* * *

Να βρήτε τους 2×2 πίνακες X & Y που ικανοποιούν το σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{l} X + Y \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 2X + 3Y = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

* * *

Αν ένας 2×2 πίνακας A ικανοποιεί τη σχέση

$$A^3 + A + I = 0$$

τότε να δείξετε ότι είναι αντιστρέψιμος.

* * *