

MAΘHMA 1A

2x2 πίνακες

Ονομάζουμε **2x2 πίνακα** κάθε σχήμα της μορφής

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

όπου οι $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι πραγματικοί αριθμοί.

Έτσι οι

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{2} \\ 7 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.3 & 16 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}, \text{ κ.λ.π.}$$

είναι 2x2 πίνακες.

Συνήθως χρησιμοποιούμε κεφαλαία γράμματα για να σημειώσουμε ένα 2x2 πίνακα· έτσι π.χ. γράφουμε

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{2} \\ 7 & -4 \end{pmatrix}, \text{ κ.λ.π.}$$

Λέμε ότι οι πίνακες

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \text{ και } \begin{pmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix}$$

είναι **ίσοι** και γράφουμε

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix},$$

αν τα ομοθέσια στοιχεία τους συμπίπτουν, αν δηλαδή

$$\alpha = \kappa \quad \beta = \lambda$$

$$\gamma = \mu \quad \delta = \nu$$

Παράδειγμα. Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8/2 \end{pmatrix}$$

Οι A και B δεν είναι ίσοι γιατί τα στοιχεία τους που βρίσκονται στην δεξιά κάτω γωνία είναι διαφορετικά μεταξύ τους: $4 \neq 0$

Οι πίνακες A και Γ όμως είναι ίσοι μεταξύ τους γιατί τα ομοθέσια στοιχεία τους είναι όλα ίσα μεταξύ τους. ■

Το **άθροισμα** 2×2 πινάκων ορίζεται ως εξής:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \chi & \psi \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \chi & \beta + \psi \\ \gamma + z & \delta + t \end{pmatrix}$$

δηλαδή για να προσθέσουμε 2×2 πίνακες δεν έχουμε παρά να προσθέσουμε τα ομοθέσια στοιχεία τους.

Παράδειγμα. Ας πάρουμε τους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Τότε σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό, θα έχουμε

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + (-2) & 2 + 0 \\ 3 + 1 & 4 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

και

$$A + \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + (-1) & 2 + (-2) \\ 3 + (-3) & 4 + (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Η πρόθεση πινάκων έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

■ Είναι **αντιμεταθετική**, δηλαδή για οποιουδήποτε 2×2 πίνα-

κες A & B ισχύει

$$A+B = B+A$$

Πραγματικά ας είναι

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

τότε

$$\begin{aligned} A+B &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+x & \beta+y \\ \gamma+z & \delta+t \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x+\alpha & y+\beta \\ x+\gamma & t+\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = B+A \end{aligned}$$

είναι προσεταιριστική, δηλαδή αν A, B & Γ είναι οποιοιδήποτε 2×2 πίνακες, τότε ισχύει

$$A+(B+\Gamma) = (A+B)+\Gamma$$

Πραγματικά ας είναι

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \quad \& \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix}$$

τότε

$$\begin{aligned} A+(B+\Gamma) &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x+\kappa & y+\lambda \\ z+\mu & t+\nu \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \alpha+(x+\kappa) & \beta+(y+\lambda) \\ \gamma+(z+\mu) & \delta+(t+\nu) \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} (\alpha+x)+\kappa & (\beta+y)+\lambda \\ (\gamma+z)+\mu & (\delta+t)+\nu \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \alpha+x & \beta+y \\ \gamma+z & \delta+t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix} = \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \right\} + \begin{pmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix} = (A+B)+\Gamma
\end{aligned}$$

— Ο 2×2 πίνακας που όλα τα στοιχεία του είναι μηδενικά, ονομάζεται **μηδενικός** πίνακας και συμβολίζεται απλά O , δηλαδή

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Αν τώρα A είναι ένας οποιοσδήποτε 2×2 πίνακας, τότε είναι φανερό ότι

$$A+O = A$$

Πραγματικά, ως είναι

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

Τότε

$$\begin{aligned}
A+O &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \alpha+0 & \beta+0 \\ \gamma+0 & \delta+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = A
\end{aligned}$$

δηλαδή ο μηδενικός πίνακας αν προστεθεί σε οποιοσδήποτε πίνακα, τον αφήνει αναλλοίωτο.

■ Τέλος αν

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

είναι ένας 2×2 πίνακας, τότε τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ -\gamma & -\delta \end{pmatrix}$$

τον ονομάζουμε **αντίθετο** τον A και τον συμβολίζουμε $-A$, δηλαδή

$$-A = \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ -\gamma & -\delta \end{pmatrix}$$

Είναι φανερό ότι

$$A + (-A) = 0$$

Πραγματικά, έχουμε

$$\begin{aligned} A + (-A) &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ -\gamma & -\delta \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \alpha - \alpha & \beta - \beta \\ \gamma - \gamma & \delta - \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 . \end{aligned}$$

Παράδειγμα. Ας βρούμε τους αντίθετους των ακόλουθων πινάκων

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Έχουμε

$$-A = \begin{pmatrix} -1 & -(-1) \\ -1 & -(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-B = \begin{pmatrix} -(-1) & -0 \\ -0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$-\mathbf{0} = \begin{pmatrix} -0 & -0 \\ -0 & -0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \blacksquare$$

Θα ορίσουμε στη συνέχεια μία νέα πράξη.

Αν λ είναι ένας πραγματικός αριθμός και A είναι ένας 2×2 πίνακας, τότε το γινόμενο

$$\lambda A$$

ορίζεται να είναι ο 2×2 πίνακας που προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε καθένα από τα στοιχεία του A με το λ με άλλα λόγια, αν

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

τότε

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda\alpha & \lambda\beta \\ \lambda\gamma & \lambda\delta \end{pmatrix}$$

Έχουμε τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\begin{aligned} \lambda(A+B) &= \lambda A + \lambda B \\ (\lambda+\mu)A &= \lambda A + \mu A \\ (\lambda\mu)A &= \lambda(\mu A) \end{aligned}$$

Ας τις αποδείξουμε μία-μία: ας είναι

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

Τότε

$$\begin{aligned} \lambda(A+B) &= \lambda \left[\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \right] = \\ &= \lambda \begin{pmatrix} \alpha+x & \beta+y \\ \gamma+z & \delta+t \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \lambda(\alpha+x) & \lambda(\beta+y) \\ \lambda(\gamma+z) & \lambda(\delta+t) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \lambda\alpha+\lambda x & \lambda\beta+\lambda y \\ \lambda\gamma+\lambda z & \lambda\delta+\lambda t \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \lambda\alpha & \lambda\beta \\ \lambda\gamma & \lambda\delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda x & \lambda y \\ \lambda z & \lambda t \end{pmatrix} = \\
&= \lambda \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \lambda A + \lambda B
\end{aligned}$$

Ας πάρουμε τώρα την δεύτερη:

$$\begin{aligned}
(\lambda+\mu)A &= (\lambda+\mu) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda+\mu)\alpha & (\lambda+\mu)\beta \\ (\lambda+\mu)\gamma & (\lambda+\mu)\delta \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \lambda\alpha+\mu\alpha & \lambda\beta+\mu\beta \\ \lambda\gamma+\mu\gamma & \lambda\delta+\mu\delta \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \lambda\alpha & \lambda\beta \\ \lambda\gamma & \lambda\delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu\alpha & \mu\beta \\ \mu\gamma & \mu\delta \end{pmatrix} = \\
&= \lambda \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \lambda A + \mu A
\end{aligned}$$

Τέλος έχουμε

$$\begin{aligned}
(\lambda\mu) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (\lambda\mu)\alpha & (\lambda\mu)\beta \\ (\lambda\mu)\gamma & (\lambda\mu)\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(\mu\alpha) & \lambda(\mu\beta) \\ \lambda(\mu\gamma) & \lambda(\mu\delta) \end{pmatrix} = \\
&= \lambda \begin{pmatrix} \mu\alpha & \mu\beta \\ \mu\gamma & \mu\delta \end{pmatrix} = \lambda \left[\mu \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \right] = \lambda(\mu A)
\end{aligned}$$

ασκήσεις λυμένες

1

Αν

$$\begin{pmatrix} \alpha+2\beta & \beta-\gamma \\ \gamma & 2\alpha-\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

να βρήτε τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Λύση

Σύμφωνα με τον ορισμό, αν δύο πίνακες είναι ίσοι τα ομοθέσια στοιχεία τους συμπίπτουν, Έτσι από την προηγούμενη ισότητα παίρνουμε

$$\alpha+2\beta=2 \quad \beta-\gamma=-1$$

$$\gamma=3 \quad 2\alpha-\delta=0$$

απ'όπου βρίσκουμε

$$\alpha=-2, \quad \beta=2, \quad \gamma=3, \quad \delta=-4.$$

2

Ας είναι

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Να υπολογίσετε τους πίνακες

$$3A, \quad -2B \quad \text{και} \quad -A+3B$$

Λύση

Έχουμε

$$3A = 3 \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 7 & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 6 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}$$

$$-2B = -2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2) \cdot 1 & (-2) \cdot (-1) \\ (-2) \cdot 0 & (-2) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

και

$$\begin{aligned} -A + 3B &= - \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -7+3 & -2-3 \\ 1+0 & -4+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3

Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad \Gamma = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Να δείξετε ότι

$$A + 2B - \Gamma = 0$$

όπου 0 είναι ο μηδενικός 2x2 πίνακας

Λύση

Ας εκτελέσουμε τις πράξεις:

$$\begin{aligned} A + 2B - \Gamma &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1+0+1 & -2+1+0 \\ 3+(-2)+(-1) & 4+0+(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

4

Να βρεθούν τα x και y έτσι ώστε να έχουμε

$$2 \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ y & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y+1 & 0 \\ x & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Λύση

Εκτελούμε τις πράξεις στο αριστερό μέλος της παραπάνω σχέσης:

$$2 \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ y & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y+1 & 0 \\ x & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 2y & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y+1 & 0 \\ x & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-1 & 8 \\ 2y+x & -2 \end{pmatrix}$$

Η (1) λοιπόν γράφεται

$$\begin{pmatrix} y-1 & 8 \\ 2y+x & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

απ'όπου παίρνουμε

$$y-1=1 \text{ \& } 2y+x=-1$$

και άρα $y=2$ και $x=-5$.

5

Να βρήτε τον άγνωστο 2×2 πίνακα X στις ακόλουθες σχέσεις

$$\text{i)} \quad 2X = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ii)} \quad (-7)X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Λύση

i) Αν πολλαπλασιάσουμε τη σχέση

$$2X = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

με τον αριθμό $\frac{1}{2}$ βρίσκουμε

$$\frac{1}{2} (2X) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ή

$$\left(\frac{1}{2} \cdot 2\right) X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

δηλαδή

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

ii) Πολλαπλασιάζουμε τη σχέση

$$(-7)X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

με το $-\frac{1}{7}$, οπότε παίρνουμε

$$\left(-\frac{1}{7}\right)(-7X) = -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ή

$$\left(-\frac{1}{7} \cdot (-7)\right) X = \begin{pmatrix} 1/7 & 0 \\ 0 & -1/7 \end{pmatrix}$$

και άρα

$$X = \begin{pmatrix} 1/7 & 0 \\ 0 & -1/7 \end{pmatrix}$$

6

Να βρείτε 2×2 πίνακες X και Y που να ικανοποιούν το σύστημα

$$\begin{cases} X - 5Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ -X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε

$$-2Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

ή

$$-2Y = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

και άρα

$$Y = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 & 1/2 \\ -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Αντικαθιστώντας τώρα τον πίνακα που μόλις βρήκαμε στην πρώτη των αρχικών σχέσεων παίρνουμε

$$\begin{aligned} X &= 5Y + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} -3/2 & 1/2 \\ -3/2 & -1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -15/2 & 5/2 \\ -15/2 & -5/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13/2 & 1/2 \\ -15/2 & -3/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Οι ζητούμενοι πίνακες είναι λοιπόν

$$X = \begin{pmatrix} -13/2 & 1/2 \\ -15/2 & -3/2 \end{pmatrix} \quad \& \quad Y = \begin{pmatrix} -3/2 & 1/2 \\ -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

7

Να βρείτε τα x και y που ικανοποιούν τη σχέση

$$x \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -22 & 0 \end{pmatrix}$$

η υ σ η

Ας εκτελέσουμε τις πράξεις στο αριστερό μέλος:

$$\begin{aligned}
 x \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x & -x \\ 2x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y & -y \\ y & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} x+2y & -x-y \\ 2x+y & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Έτσι η προτεινόμενη ισότητα γράφεται

$$\begin{pmatrix} x+2y & -x-y \\ 2x+y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -22 & 0 \end{pmatrix}$$

απ'όπου παίρνουμε

$$\begin{cases} x+2y=1 & , & -x-y=7 \\ 2x+y=-22 \end{cases}$$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις δύο πρώτες εξισώσεις βρίσκουμε $y=8$, οπότε $x=-15$ και οι τιμές αυτές ικανοποιούν και την τρίτη εξίσωση. Έτσι οι ζητούμενες τιμές είναι

$$x=-15, y=8$$

8

Να δείξετε ότι:

$$\lambda A = 0 \implies \lambda = 0 \text{ ή } A = 0$$

ή ν ο η

Ας είναι

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

Τότε

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda\alpha & \lambda\beta \\ \lambda\gamma & \lambda\delta \end{pmatrix}$$

Έτσι αν

$$\lambda A = 0$$

δηλαδή

$$\begin{pmatrix} \lambda\alpha & \lambda\beta \\ \lambda\gamma & \lambda\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

τότε

$$\begin{aligned} \lambda\alpha &= 0 & \lambda\beta &= 0 \\ \lambda\gamma &= 0 & \lambda\delta &= 0. \end{aligned}$$

Αν λοιπόν $\lambda \neq 0$, από τις παραπάνω σχέσεις βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 & \beta &= 0 \\ \gamma &= 0 & \delta &= 0, \end{aligned}$$

δηλαδή $A=0$.

9

Για κάθε 2×2 πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}.$$

θέτουμε

$$\|A\| = \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, |\alpha_3|, |\alpha_4|\}$$

Να δείξετε ότι

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

Δύση

Αν

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix}$$

τότε

$$A+B = \begin{pmatrix} \alpha_1+\beta_1 & \alpha_2+\beta_2 \\ \alpha_3+\beta_3 & \alpha_4+\beta_4 \end{pmatrix}$$

οπότε

$$\|A+B\| = \max \{ |\alpha_1 + \beta_1|, |\alpha_2 + \beta_2|, |\alpha_3 + \beta_3|, |\alpha_4 + \beta_4| \}$$

Γενικά όμως ισχύει

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

Άρα

$$\begin{aligned} \max \{ |\alpha_1 + \beta_1|, \dots, |\alpha_4 + \beta_4| \} &\leq \max \{ |\alpha_1| + |\beta_1|, \dots, |\alpha_4| + |\beta_4| \} \\ &\leq \max \{ |\alpha_1|, \dots, |\alpha_4| \} + \max \{ |\beta_1|, \dots, |\beta_4| \} = \|A\| + \|B\| \end{aligned}$$

ασκησεις αλυτες

Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Να βρήτε τους πίνακες

$$-4A, \quad \frac{1}{2}B \quad \& \quad 2A-9B$$

* * *

Να βρήτε τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ από τη σχέση

$$\begin{pmatrix} \alpha+2\beta & \beta-\gamma \\ \delta & \alpha+\gamma \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

* * *

Να βρήτε τον άγνωστο 2×2 πίνακα X στην επόμενη εξίσωση

$$3X + \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 7 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

* * *

Δίνονται οι 2×2 πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} -8 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Να βρήτε τον 2×2 πίνακα X που ικανοποιεί τη σχέση

$$2A + X = B$$

* * *

Αν A, B & Γ είναι 2×2 πίνακες, να δείξετε ότι

$$A + \Gamma = B + \Gamma \implies A = B$$

* * *

Να βρήτε 2×2 πίνακες X & Y που να ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\begin{cases} 2X - Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ X + 4Y = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

* * *

Να βρήτε τα x, y & z από τις ακόλουθες σχέσεις

$$i) \quad x \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$ii) \quad x \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

* * *

Να δείξετε ότι

$$\lambda A = \lambda B \quad \& \quad \lambda \neq 0 \implies A = B$$

* * *

Για κάθε 2×2 πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

θέτουμε

$$||A|| = |\alpha| + |\beta| + |\gamma| + |\delta|$$

Να δείξετε ότι

$$||A+B|| \leq ||A|| + ||B||$$

* * *

Να βρείτε 2×2 πίνακες X & Y που να ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\begin{cases} 2X - Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ X + 4Y = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

* * *

Να βρείτε τα x, y & z από τις ακόλουθες σχέσεις

$$i) \quad x \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$ii) \quad x \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

* * *

Να δείξετε ότι

$$\lambda A = \lambda B \quad \& \quad \lambda \neq 0 \implies A = B$$

* * *

Για κάθε 2×2 πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

θέτουμε

$$||A|| = |\alpha| + |\beta| + |\gamma| + |\delta|$$

Να δείξετε ότι

$$||A+B|| \leq ||A|| + ||B||$$

* * *

το γινόμενο 2x2 πινάκων και οι ... ιδιοτροπιες του

Σαν γινόμενο των πινάκων

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \& \quad \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

ορίζεται να είναι ο 2x2 πίνακας που προκύπτει με την ακόλουθη διαδικασία

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta z & \alpha y + \beta t \\ \gamma x + \delta z & \gamma y + \delta t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta z & \alpha y + \beta t \\ \gamma x + \delta z & \gamma y + \delta t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta z & \alpha y + \beta t \\ \gamma x + \delta z & \gamma y + \delta t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta z & \alpha y + \beta t \\ \gamma x + \delta z & \gamma y + \delta t \end{pmatrix}$$

δηλαδή

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta z & \alpha y + \beta t \\ \gamma x + \delta z & \gamma y + \delta t \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 1^ο. Να εκτελεστούν οι παρακάτω πολλαπλασιαμοί:

$$i) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad ii) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

Ακολουθούμε τη διαδικασία που περιγράψαμε

$$\begin{pmatrix} \textcircled{2} & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \textcircled{-3} & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-3) + 1 \cdot (-1) & \quad \quad \quad \\ \quad \quad \quad & \quad \quad \quad \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \textcircled{2} & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & \textcircled{-2} \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 2 \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) \\ \quad \quad \quad & \quad \quad \quad \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \textcircled{4} & \textcircled{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \textcircled{-3} & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 4 \cdot (-3) + 2 \cdot (-1) & \quad \quad \quad \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \textcircled{4} & \textcircled{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & \textcircled{-2} \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ -14 & 4 \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

δηλαδή

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ -14 & -10 \end{pmatrix}$$

ii) Έχουμε

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 7 + 2 \cdot 2 & (-1) \cdot 3 + 2 \cdot (-6) \\ 0 \cdot 7 + 4 \cdot 2 & 0 \cdot 3 + 4 \cdot (-6) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} -3 & -15 \\ 8 & -24 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 2^ο. Σε κάθε πραγματικό αριθμό α αντιστοιχούμε τον 2×2 πίνακα

$$M(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Να δείξετε ότι

$$M(\alpha)M(\beta) = M(\alpha + \beta)$$

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned} M(\alpha)M(\beta) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot \beta & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ \alpha \cdot 1 + 1 \cdot \beta & \alpha \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha + \beta & 1 \end{pmatrix} = M(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3^ο. Σε κάθε πραγματικό αριθμό α αντιστοιχούμε τον 2×2 πίνακα

$$N(\alpha) = \begin{pmatrix} \sigma\upsilon\nu\alpha & -\eta\mu\alpha \\ \eta\mu\alpha & \sigma\upsilon\nu\alpha \end{pmatrix}$$

Να δείξετε ότι

$$N(\alpha)N(\beta) = N(\alpha + \beta)$$

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned} N(\alpha)N(\beta) &= \begin{pmatrix} \sigma\upsilon\nu\alpha & -\eta\mu\alpha \\ \eta\mu\alpha & \sigma\upsilon\nu\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma\upsilon\nu\beta & -\eta\mu\beta \\ \eta\mu\beta & \sigma\upsilon\nu\beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma\upsilon\nu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha \eta\mu\beta & -\sigma\upsilon\nu\alpha \eta\mu\beta - \eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta \\ \eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha \eta\mu\beta & \eta\mu\alpha \eta\mu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

Είναι όμως

$$\sigma\upsilon\nu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha \eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) \quad \text{και}$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha \eta\mu\beta + \eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu(\alpha + \beta)$$

Άρα

$$N(\alpha)N(\beta) = \begin{pmatrix} \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) & -\eta\mu(\alpha + \beta) \\ \eta\mu(\alpha + \beta) & \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) \end{pmatrix} = N(\alpha + \beta)$$

Παράδειγμα 4^ο. Ο μηδενικός 2×2 πίνακας

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

αν πολλαπλασιαστεί με οποιονδήποτε 2×2 πίνακα A , δίνει σαν αποτέλεσμα πάλι τον μηδενικό πίνακα:

$$O \cdot A = O = A \cdot O$$

Πραγματικά, αν είναι

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

τότε

$$O \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot \alpha + 0 \cdot \gamma & 0 \cdot \beta + 0 \cdot \delta \\ 0 \cdot \alpha + 0 \cdot \gamma & 0 \cdot \beta + 0 \cdot \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

και όμοια

$$A \cdot O = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 & \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 \\ \gamma \cdot 0 + \delta \cdot 0 & \gamma \cdot 0 + \delta \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O. \blacksquare$$

Ο πολλαπλασιασμός 2×2 πινάκων έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

■ Είναι **προσεταιριστικός**, δηλαδή για οποιουδήποτε 2×2 πίνακες A, B & Γ ισχύει

$$A(B\Gamma) = (AB)\Gamma$$

Πραγματικά, ας είναι

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix}$$

τότε

$$A(B\Gamma) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x\kappa+y\mu & x\lambda+y\nu \\ z\kappa+t\mu & z\lambda+t\nu \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \alpha x\kappa+\alpha y\mu+\beta z\kappa+\beta t\mu & \alpha x\lambda+\alpha y\nu+\beta z\lambda+\beta t\nu \\ \gamma x\kappa+\gamma y\mu+\delta z\kappa+\delta t\mu & \gamma x\lambda+\gamma y\nu+\delta z\lambda+\delta t\nu \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} (\alpha x+\beta z)\kappa+(\alpha y+\beta t)\mu & (\alpha x+\beta z)\lambda+(\alpha y+\beta t)\nu \\ (\gamma x+\delta z)\kappa+(\gamma y+\delta t)\mu & (\gamma x+\delta z)\lambda+(\gamma y+\delta t)\nu \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \alpha x+\beta z & \alpha y+\beta t \\ \gamma x+\delta z & \gamma y+\delta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix} = \\
&= \left[\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix} = (AB)\Gamma. \blacksquare
\end{aligned}$$

■ Είναι επιμεριστικός ως προς την πρόσθεση, δηλαδή για οποιοσδήποτε 2×2 πίνακες A, B & Γ ισχύει

$$A(B+\Gamma) = AB + A\Gamma \quad \& \quad (A+B)\Gamma = A\Gamma + B\Gamma$$

πραγματικά, ας είναι και πάλι

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix}$$

τότε

$$\begin{aligned}
A(B+\Gamma) &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix} \right] = \\
&= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+\kappa & y+\lambda \\ z+\mu & t+\nu \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \alpha(x+\kappa)\beta(z+\mu) & \alpha(y+\lambda)+\beta(t+\nu) \\ \gamma(x+\kappa)\delta(z+\mu) & \gamma(y+\lambda)+\delta(t+\nu) \end{pmatrix} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} (\alpha x + \beta z) + (\alpha \kappa + \beta \mu) & (\alpha \nu + \beta t) + (\alpha \lambda + \beta \nu) \\ (\gamma x + \delta z) + (\gamma \kappa + \delta \mu) & (\gamma \nu + \delta t) + (\gamma \lambda + \delta \nu) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \alpha x + \beta z & \alpha \nu + \beta t \\ \gamma x + \delta z & \gamma \nu + \delta t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \kappa + \beta \mu & \alpha \lambda + \beta \nu \\ \gamma \kappa + \delta \mu & \gamma \lambda + \delta \nu \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix} = AB + A\Gamma.
\end{aligned}$$

Όμοια αποδεικνύεται και η άλλη σχέση. ■

■ Αν λ είναι ένας πραγματικός αριθμός και A, B είναι 2×2 πίνακες, τότε ισχύει

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$

Πραγματικά, ας είναι

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
\lambda(AB) &= \lambda \left[\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \right] = \\
&= \lambda \begin{pmatrix} \alpha x + \beta z & \alpha y + \beta t \\ \gamma x + \delta z & \gamma y + \delta t \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \lambda(\alpha x + \beta z) & \lambda(\alpha y + \beta t) \\ \lambda(\gamma x + \delta z) & \lambda(\gamma y + \delta t) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} (\lambda \alpha)x + (\lambda \beta)z & (\lambda \alpha)y + (\lambda \beta)t \\ (\lambda \gamma)x + (\lambda \delta)z & (\lambda \gamma)y + (\lambda \delta)t \end{pmatrix} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} \lambda\alpha & \lambda\beta \\ \lambda\gamma & \lambda\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \\
 &= \left[\lambda \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = (\lambda A) B
 \end{aligned}$$

όμοια αποδεικνύεται και η άλλη ισότητα. ■

■ Τέλος ο 2×2 πίνακας

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

έχει την εξής ιδιότητα: αν πολλαπλασιαστεί με οποιονδήποτε 2×2 πίνακα A , του αφήνει αναλλοίωτο, δηλαδή

$$A \cdot I = A = I \cdot A$$

Πραγματικά, αν

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
 A \cdot I &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 & \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 \\ \gamma \cdot 1 + \delta \cdot 0 & \gamma \cdot 0 + \delta \cdot 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = A
 \end{aligned}$$

και όμοια

$$\begin{aligned}
 I \cdot A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot \alpha + 0 \cdot \gamma & 1 \cdot \beta + 0 \cdot \delta \\ 0 \cdot \alpha + 1 \cdot \gamma & 0 \cdot \beta + 1 \cdot \delta \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = A
 \end{aligned}$$

Δηλαδή ο πίνακας I παίζει τον ίδιο ρόλο που παίζει η μονάδα 1 στους πραγματικούς αριθμούς· γιαυτό τον πίνακα I τον ονομάζουμε **μοναδιαίο**. ■

Η **δύναμη** ενός μη-μηδενικού πίνακα A ορίζεται ως εξής:

$$A^0 = I, \quad A^1 = A, \quad A^2 = AA, \dots, A^{v+1} = A^v A$$

Έχουμε τους επόμενους κανόνες

$$A^\mu A^v = A^{\mu+v} \quad \& \quad (A^\mu)^v = A^{\mu v}$$

Θα αποδείξουμε την πρώτη από τις παραπάνω σχέσεις με επαγωγή πάνω στο v . Για $v=0$ το πράγμα είναι φανερό γιατί

$$A^\mu \cdot A^0 = A^\mu \cdot I = A^\mu = A^{\mu+0}$$

Ας υποθέσουμε ότι η σχέση μας ισχύει για τον φυσικό αριθμό κ , δηλαδή ότι

$$A^\mu A^\kappa = A^{\mu+\kappa}, \quad (1)$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει και για τον $\kappa+1$: Έχουμε

$$\begin{aligned} A^\mu A^{\kappa+1} &= A^\mu (A^\kappa A) = (A^\mu A^\kappa) A \stackrel{(1)}{=} A^{\mu+\kappa} A = \\ &= A^{(\mu+\kappa)+1} = A^{\mu+(\kappa+1)} \end{aligned}$$

Η σχέση μας λοιπόν ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό v .

Ας έλθουμε τώρα στην άλλη σχέση

$$(A^\mu)^v = A^{\mu v}$$

Για την απόδειξη μας θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι επαγωγή πάνω στο v .

Για $v=0$ το πράγμα είναι φανερό.

Ας υποθέσουμε ότι η σχέση μας ισχύει για τον φυσικό αριθμό κ , δηλαδή ότι

$$(A^\mu)^\kappa = A^{\mu\kappa},$$

θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για τον $\kappa+1$:

Έχουμε

$$\begin{aligned}(A^\mu)^{\kappa+1} &= (A^\mu)^\kappa \cdot (A^\mu) = A^{\mu\kappa} \cdot A^\mu = \\ &= A^{\mu\kappa+\mu} = A^{\mu(\kappa+1)} \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Παράδειγμα 1^ο. Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Να δείξετε ότι

$$A^2 = I \quad \& \quad B^4 = I$$

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned}A^2 = AA &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.\end{aligned}$$

Απ' την άλλη μεριά

$$\begin{aligned}B^2 = BB &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 & 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

και

$$B^4 = B^2 \cdot B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Παράδειγμα 2^ο. Να βρεθούν οι n -στές δυνάμεις των ακόλουθων πινάκων:

$$i) \quad M(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$ii) \quad N(\alpha) = \begin{pmatrix} \sigma\upsilon\nu\alpha & -\eta\mu\alpha \\ \eta\mu\alpha & \sigma\upsilon\nu\alpha \end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R} .$$

Λύση. i) Όπως έχουμε δεί

$$M(\alpha)M(\beta) = M(\alpha + \beta) \quad \text{για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Έτσι βάζοντας $\beta = \alpha$ στην παραπάνω ισότητα παίρνουμε

$$M(\alpha)M(\alpha) = M(\alpha + \alpha)$$

ή

$$[M(\alpha)]^2 = M(2\alpha) .$$

Θα δείξουμε επαγωγικά ότι

$$[M(\alpha)]^v = M(v\alpha) .$$

Για $v=2$ μόλις το αποδείξαμε.

Υποθέτοντας λοιπόν ότι η πρόταση ισχύει για τον φυσικό αριθμό κ , δηλαδή ότι

$$[M(\alpha)]^\kappa = M(\kappa\alpha) \quad (2)$$

θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για τον $\kappa+1$:

Πραγματικά

$$\begin{aligned} [M(\alpha)]^{\kappa+1} &= [M(\alpha)]^\kappa M(\alpha) \stackrel{(2)}{=} M(\kappa\alpha) M(\alpha) \stackrel{(1)}{=} \\ &= M(\kappa\alpha + \alpha) = M((\kappa+1)\alpha) \end{aligned}$$

Έτσι η πρόταση μας ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό, δηλαδή

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}^v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

ii) Όπως έχουμε δεί

$$N(\alpha)N(\beta) = N(\alpha + \beta)$$

Δουλεύοντας λοιπόν με τον ίδιο ακριβώς τρόπο δείχνουμε ότι

$$[N(\alpha)]^V = N(\nu\alpha)$$

δηλαδή

$$\begin{pmatrix} \sigma\nu\alpha & -\eta\mu\alpha \\ \eta\mu\alpha & \sigma\nu\alpha \end{pmatrix}^V = \begin{pmatrix} \sigma\nu\nu(\nu\alpha) & -\eta\mu(\nu\alpha) \\ \eta\mu(\nu\alpha) & \sigma\nu\nu(\nu\alpha) \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

Το γινόμενο πινάκων έχει όμως και πολλές "ασυνήθιστες", ιδιότητες· έτσι

υπάρχουν μη-μηδενικοί πίνακες που το τετράγωνό τους είναι ο μηδενικός πίνακας.

Ας πάρουμε για παράδειγμα τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1/3 & -1 \end{pmatrix}$$

τότε

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1/3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1/3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0. \quad \blacksquare$$

υπάρχουν μη-μηδενικοί πίνακες που το γινόμενο τους είναι ο μηδενικός πίνακας.

Πάρτε για παράδειγμα τους μη-μηδενικούς πίνακες

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \& \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

το γινόμενο τους είναι

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0. \quad \blacksquare$$

Επίσης υπάρχουν πίνακες που το τετράγωνο τους συμπίπτει με τον εαυτό τους, δηλαδή

$$A^2 = A$$

π.χ. ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

έχει την ιδιότητα αυτή αφού

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = A \quad \blacksquare$$

Εκείνο όμως που ιδιαίτερα πρέπει να τονίσουμε είναι ότι στον πολλαπλασιασμό πινάκων γενικά **δεν ισχύει η αντιμετάθεση.**

Με άλλα λόγια υπάρχουν πίνακες A & B για τους οποίους ισχύει

$$AB \neq BA$$

και άλλοι για τους οποίους ισχύει

$$AB = BA \quad (1)$$

Πάρτε για παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

τότε

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

και

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Δηλαδή στη προκειμένη περίπτωση $AB \neq BA$.

Ας πάρουμε τώρα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

θα έχουμε

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

και

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

δηλαδή στη περίπτωση αυτή $AB=BA$.

Είναι σημαντικό όμως να σημειωθεί ότι αν δύο πίνακες A & B **αντιμετατίθενται**, δηλαδή

$$AB=BA$$

τότε ισχύουν οι γνωστές μας ταυτότητες

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B), \text{ κ.λ.π.}$$

Πραγματικά

$$\begin{aligned} (A+B)^2 &= (A+B)(A+B) = \\ &= (A+B)A + (A+B)B = \\ &= AA + BA + AB + BB = \end{aligned}$$

(θυμηθείτε ότι $AB=BA$)

$$= A^2 + 2AB + B^2$$

Για την απόδειξη της δεύτερης ταυτότητας έχουμε

$$\begin{aligned}
 (A+B)(A-B) &= (A+B)A - (A+B)B = \\
 &= AA + BA - AB - BB = \\
 &= A^2 - B^2. \blacksquare
 \end{aligned}$$

Θα κλείσουμε την παράγραφο αυτή με το ακόλουθο πολύ σημαντικό αποτέλεσμα.

Κάθε 2×2 πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

ϊκανοποιεί τη σχέση

$$A^2 - (\alpha + \delta)A + (\alpha\delta - \beta\gamma)I = O$$

Ας το αποδείξουμε: είναι

$$A^2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & \alpha\beta + \beta\gamma \\ \alpha\gamma + \delta\gamma & \gamma\beta + \delta^2 \end{pmatrix}$$

και

$$(\alpha + \delta)A = (\alpha + \delta) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \alpha\delta & \alpha\beta + \delta\beta \\ \alpha\gamma + \delta\gamma & \alpha\delta + \delta^2 \end{pmatrix}$$

και

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)I = (\alpha\delta - \beta\gamma) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\delta - \beta\gamma & 0 \\ 0 & \alpha\delta - \beta\gamma \end{pmatrix}$$

Κατά συνέπεια

$$\begin{aligned}
 &A^2 - (\alpha + \delta)A + (\alpha\delta - \beta\gamma)I = \\
 &= \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & \alpha\beta + \beta\gamma \\ \alpha\gamma + \delta\gamma & \gamma\beta + \delta^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha^2 + \alpha\delta & \alpha\beta + \delta\beta \\ \alpha\gamma + \delta\gamma & \alpha\delta + \delta^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha\delta - \beta\gamma & 0 \\ 0 & \alpha\delta - \beta\gamma \end{pmatrix} =
 \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

όπως το είπαμε.

Παράδειγμα. Να δείξετε ότι ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

ικανοποιεί τη σχέση

$$A^2 - 5A + 10I = 0$$

Λύση. Δεν έχουμε παρά να εφαρμόσουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα: εδώ είναι

$$\alpha=1, \beta=-2, \gamma=3 \quad \& \quad \delta=4$$

οπότε

$$\begin{aligned} A^2 - (\alpha+\delta)A + (\alpha\delta - \beta\gamma)I &= A^2 - (1+4)A + (1 \cdot 4 - 3 \cdot (-2))I = \\ &= A^2 - 5A + 10I \end{aligned}$$

Έτσι λοιπόν $A^2 - 5A + 10I = 0$ όπως το ζητούσαμε. ■

Τον πραγματικό αριθμό

$$\alpha\delta - \beta\gamma$$

τον ονομάζουμε **ορίζουσα** του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

και τον συμβολίζουμε

$$\det A \quad \text{ή} \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

δηλαδή

$$\det A = \alpha\delta - \beta\gamma \quad \text{ή} \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$$

Όπως θα δούμε αργότερα η έννοια της ορίζουσας παίζει σοβαρό ρόλο στην όλη θεωρία μας. Προς το παρόν θα αποδείξουμε ότι:

Αν A & B είναι 2×2 πίνακες, τότε

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B \quad (*)$$

Πραγματικά, ας είναι

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

τότε

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det \begin{pmatrix} \alpha x + \beta z & \alpha y + \beta t \\ \gamma x + \delta z & \gamma y + \delta t \end{pmatrix} = \\ &= (\alpha x + \beta z)(\gamma y + \delta t) - (\alpha y + \beta t)(\gamma x + \delta z) = \\ &= (\alpha \delta - \beta \gamma)(xt - yz) = \det A \cdot \det B \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Κοιτάξτε τώρα, πως από τη σχέση(*) θα βρούμε τη γνωστή ταυτότητα του Cauchy.

$$(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) = (\alpha\gamma + \beta\delta)^2 + (\alpha\delta - \beta\gamma)^2$$

με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Ας πάρουμε

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

δηλαδή ο B προκύπτει από τον A ανταλλάσσοντας τα στοιχεία β και γ . Τότε, αφού

$$AB = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta^2 & \alpha\gamma + \beta\delta \\ \alpha\gamma + \beta\delta & \gamma^2 + \delta^2 \end{pmatrix},$$

η σχέση $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ γράφεται

$$\det \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta^2 & \alpha\gamma + \beta\delta \\ \alpha\gamma + \beta\delta & \gamma^2 + \delta^2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

ή

$$(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) - (\alpha\gamma + \beta\delta)^2 = (\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha\delta - \beta\gamma)$$

δηλαδή

$$(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) = (\alpha\gamma + \beta\delta)^2 + (\alpha\delta - \beta\gamma)^2. \blacksquare$$

Θα πρέπει τέλος να σημειώσουμε ότι συνήθως η ορίζουσα του πίνακα $A+B$ δεν είναι ίση με το άθροισμα των οριζουσών των A & B .
Δηλαδή

$\det(A+B) \neq \det A + \det B$

Πάρτε για παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

τότε

$$A+B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

και είναι

$$\det A = 1, \det B = 8 \quad \& \quad \det(A+B) = 23.$$

Έτσι βλέπουμε ότι

$$\det(A+B) = 23 \neq 1 + 8 = \det A + \det B. \blacksquare$$

η σχέση $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ γράφεται

$$\det \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta^2 & \alpha\gamma + \beta\delta \\ \alpha\gamma + \beta\delta & \gamma^2 + \delta^2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

ή

$$(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) - (\alpha\gamma + \beta\delta)^2 = (\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha\delta - \beta\gamma)$$

δηλαδή

$$(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) = (\alpha\gamma + \beta\delta)^2 + (\alpha\delta - \beta\gamma)^2. \blacksquare$$

Θα πρέπει τέλος να σημειώσουμε ότι συνήθως η ορίζουσα του πίνακα $A+B$ δεν είναι ίση με το άθροισμα των ορίζουσών των A & B .
Δηλαδή

$\det(A+B) \neq \det A + \det B$

Πάρτε για παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

τότε

$$A+B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

και είναι

$$\det A = 1, \det B = 8 \quad \& \quad \det(A+B) = 23.$$

Έτσι βλέπουμε ότι

$$\det(A+B) = 23 \neq 1 + 8 = \det A + \det B. \blacksquare$$

ασκησεις λυμενες

1

Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Να εκτελέσετε τις παρακάτω σημειούμενες πράξεις

$$AB, AB-BA, (AB)\Gamma, \Gamma\Gamma$$

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-3) & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \\ 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-3) & 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Για να υπολογίσουμε τον πίνακα $AB-BA$, πέρα από τον AB που μόλις βρήκαμε, πρέπει να βρούμε και τον BA . Έχουμε

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 & 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \\ (-3) \cdot 2 + 1 \cdot 3 & (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Έτσι λοιπόν

$$AB-BA = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Επίσης

$$(AB)\Gamma = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 & 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 & 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Τέλος

$$\Gamma\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \Gamma$$

2

Να αποδείξετε ότι οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

επαληθεύουν τη σχέση $AB = -BA$.

Λύση

Έχουμε

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \\ 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

και όμοια

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) \\ 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 & 4 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι

$$AB = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = -BA$$

όπως το θέλαμε.

3

Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Να βρήτε τους πίνακες

$$\text{i) } A^3 \quad \text{ii) } A^7 \quad \text{iii) } A^{101}$$

Λύση

i) έχουμε

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

ii) Επειδή $7 = 3 \cdot 2 + 1$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} A^7 &= A^{3 \cdot 2 + 1} = A^{3 \cdot 2} \cdot A = (A^3)^2 \cdot A = \\ &= I^2 \cdot A = I \cdot A = A \end{aligned}$$

iii) διαιρώντας το 101 με το 3 βρίσκουμε

$$101 = 3 \cdot 33 + 2$$

οπότε

$$\begin{aligned} A^{101} &= A^{3 \cdot 33 + 2} = A^{3 \cdot 33} A^2 = (A^3)^{33} \cdot A^2 = \\ &= I^{33} \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2 \end{aligned}$$

4

Ας είναι X ένας 2×2 πίνακας, τέτοιος ώστε

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X = 0$$

Να δείξετε ότι $X=0$.

Λύση

Ας είναι

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

τότε η σχέση

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X = 0$$

γράφεται

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ή, εκτελώντας τις πράξεις

$$\begin{pmatrix} 4x+2z & 4y+2t \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

απ'όπου παίρνουμε

$$\begin{cases} 4x+2z=0 & 4y+2t=0 \\ x=0 & y=0 \end{cases}$$

Βάζοντας $x=0$ στην πρώτη των παραπάνω σχέσεων βρίσκουμε $2z=0$,
οπότε $z=0$. Όμοια βάζοντας $y=0$ στη δεύτερη των σχέσεων βρί-
σκουμε $2t=0$, οπότε $t=0$. Έτσι βρήκαμε ότι

$$\begin{cases} x=0 & , & y=0 \\ z=0 & , & t=0 \end{cases}$$

δηλαδή $X=0$, όπως το ζητούσαμε.

5

Να βρήτε για ποιές τιμές των α & β οι ακόλουθοι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

αντιμετατίθενται.

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι οι A και B αντιμετατίθενται, δηλαδή ότι

$$AB = BA$$

ή

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$$

Η παραπάνω σχέση, αν εκτελέσουμε τις πράξεις γράφεται

$$\begin{pmatrix} 1+\alpha & 1+\alpha \\ 1+\beta & 1+\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\beta & 1+\alpha \\ 1+\beta & 1+\alpha \end{pmatrix}$$

απ'όπου παίρνουμε

$$1+\alpha = 1+\beta$$

και άρα $\alpha = \beta$.

Όταν λοιπόν $\alpha = \beta$ οι πίνακες A & B αντιμετατίθενται.

6

Να βρήτε όλους τους 2×2 πίνακες A που αντιμετατίθενται με τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Λύση

Ας είναι

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

ένας τέτοιος πίνακας, δηλαδή

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

Τότε, κάνοντας τις πράξεις, παίρνουμε

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

απ' όπου βρίσκουμε

$$x=z \quad \& \quad z=0$$

Έτσι οι πίνακες που αντιμετωπίζονται με τον $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ έχουν τη μορφή

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \text{ με } x, y \in \mathbb{R}.$$

7

Να προσδιορίσετε τα λ, μ σε τρόπο ώστε ο πίνακας

$$P = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$$

να ικανοποιεί τη σχέση $P^2 = I$.

Λύση

Έχουμε

$$P^2 = PP = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 + \mu^2 & 2\lambda\mu \\ 2\lambda\mu & \lambda^2 + \mu^2 \end{pmatrix}$$

Αν λοιπόν $P^2 = I$, δηλαδή

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 + \mu^2 & 2\lambda\mu \\ 2\lambda\mu & \lambda^2 + \mu^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

τότε

$$\lambda^2 + \mu^2 = 1 \quad \& \quad 2\lambda\mu = 0$$

Αν $\lambda=0$, τότε $\mu^2=1$, δηλαδή $\mu=\pm 1$, ενώ αν $\mu=0$, τότε $\lambda^2=1$, δηλαδή $\lambda=\pm 1$.

(Ας σημειώσουμε ότι δεν μπορεί να έχουμε ταυτόχρονα $\lambda=\mu=0$, γιατί τότε από την $\lambda^2+\mu^2=1$ θα βρίσκαμε $0=1$ άτοπο).

Οι ζητούμενες λοιπόν τιμές είναι

$$\lambda=0, \mu=1 \quad \lambda=1, \mu=0$$

$$\lambda=0, \mu=-1 \quad \lambda=-1, \mu=0$$

8

Να βρήτε τη ν-στή δύναμη του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Λύση

Έχουμε

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Ζητάμε να βρούμε τον πίνακα A^v , για κάθε φυσικό αριθμό ν.

Δύο περιπτώσεις είναι δυνατές:

i) **ο ν είναι άρτιος**, δηλαδή $v=2k$ τότε

$$A^{2k} = (A^2)^k = I^k = I$$

ii) **ο ν είναι περιττός**, δηλαδή $v=2k+1$ τότε

$$\begin{aligned} A^{2k+1} &= A^{2k} \cdot A = (A^2)^k \cdot A = I^k \cdot A = \\ &= I \cdot A = A. \end{aligned}$$

Συνοψίζοντας λοιπόν έχουμε

$$A^v = \begin{cases} I, & \text{αν ο ν είναι άρτιος} \\ A, & \text{αν ο ν είναι περιττός} \end{cases}$$

9

Να δείξετε ότι

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}^v = \begin{pmatrix} \alpha^v & \beta(\alpha^{v-1} + \alpha^{v-2}\gamma + \dots + \alpha\gamma^{v-2} + \gamma^{v-1}) \\ 0 & \gamma^v \end{pmatrix}$$

όπου v φυσικός αριθμός

Πύση

Με επαγωγή πάνω στο v . Για $v=1$ το πράγμα είναι φανερό.

Ας υποθέσουμε ότι η πρόταση μας αληθεύει για τον φυσικό αριθμό k , δηλαδή ότι

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \alpha^k & \beta(\alpha^{k-1} + \alpha^{k-2}\gamma + \dots + \alpha\gamma^{k-2} + \gamma^{k-1}) \\ 0 & \gamma^{k-1} \end{pmatrix}$$

θα δείξουμε ότι αληθεύει και για τον $k+1$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}^{k+1} &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \alpha^k & \beta(\alpha^{k-1} + \alpha^{k-2}\gamma + \dots + \alpha\gamma^{k-2} + \gamma^{k-1}) \\ 0 & \gamma^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \alpha^{k+1} & \alpha^k\beta + \gamma\beta(\alpha^{k-1} + \alpha^{k-2}\gamma + \dots + \alpha\gamma^{k-2} + \gamma^{k-1}) \\ 0 & \gamma^{k+1} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \alpha^{k+1} & \beta(\alpha^k + \alpha^{k-1}\gamma + \dots + \alpha\gamma^{k-1} + \gamma^k) \\ 0 & \gamma^{k+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Η προτεινόμενη σχέση ισχύει λοιπόν για κάθε φυσικό αριθμό v .

10

Να βρεθούν οι ακόλουθες v -στές δυνάμεις

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^v, \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^v, \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^v$$

θα χρησιμοποιήσουμε την προηγούμενη άσκηση.

Η ν-στή δύναμη του πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ θα προκύψει από τη ν-στή

δύναμη του $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$ αν βάλουμε

$$\alpha=1, \beta=1 \text{ και } \gamma=1.$$

Έτσι

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^v = \begin{pmatrix} 1^v & \overbrace{1 \cdot (1 + \dots + 1)}^{v-\text{όροι}} \\ 1^v & 1^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Η ν-στή δύναμη του πίνακα $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ θα προκύψει από εκείνη του

$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$ αν βάλουμε $\beta=1$ & $\gamma=\alpha$

Έτσι

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^v = \begin{pmatrix} \alpha^v & \alpha^v + \dots + \alpha^v \\ 0 & \alpha^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^v & v\alpha^v \\ 0 & \alpha^v \end{pmatrix}$$

Για τον τρίτο πίνακα έχουμε

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^v = \begin{pmatrix} \alpha^v & \beta(\alpha^v + \dots + \alpha^v) \\ 0 & \alpha^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^v & v\beta\alpha^v \\ 0 & \alpha^v \end{pmatrix}$$

11

Αν A είναι ένας 2×2 πίνακας τέτοιος ώστε

$$A^2 = 0, \quad (*)$$

τότε να δείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει

$$A(I+A)^n = A$$

όπου I είναι ο μονοδιαίος 2×2 πίνακας

πλ 6 η

Θα κάνουμε την απόδειξη μ'επαγωγή. Για $n=1$ έχουμε

$$A(I+A) = A \cdot I + A \cdot A = A + A^2 \stackrel{(*)}{=} A + O = A \quad (1)$$

Ας υποθέσουμε ότι η πρόταση μας αληθεύει για τον φυσικό αριθμό k , δηλαδή ότι

$$A(I+A)^k = A \quad (2)$$

Θα δείξουμε ότι αληθεύει και για τον $k+1$: έχουμε

$$\begin{aligned} A(I+A)^{k+1} &= A(I+A)^k (I+A) \stackrel{(2)}{=} \\ &= A(I+A) \stackrel{(1)}{=} A \end{aligned}$$

Η πρόταση μας λοιπόν αληθεύει για κάθε φυσικό αριθμό.

12

Αν A & B είναι 2×2 πίνακες τέτοιοι ώστε

$$AB=A \quad \& \quad BA=B,$$

τότε να δείξετε ότι

$$A^2=A \quad \& \quad B^2=B$$

πλ 6 η

Είναι

$$ABA = (AB)A = AA = A^2$$

και

$$ABA = A(BA) = AB = A$$

κατά συνέπεια $A^2=A$. Επίσης

$$BAB = (BA)B = BB = B^2$$

και

$$BAB = B(AB) = BA = B$$

οπότε $B^2=B$.

13

Αν οι 2×2 πίνακες A & B ικανοποιούν τη σχέση

$$A+B=I,$$

τότε να δείξετε ότι

$$A=A^2 \text{ \& } B=B^2 \text{ αν και μόνον αν } AB=O$$

διύση

Ας υποθέσουμε ότι $AB=O$. Τότε

$$A=A \cdot I=A(A+B)=A^2+AB=A^2+O=A^2 \quad \text{και}$$

$$B=I \cdot B=(A+B)B=AB+B^2=O+B^2=B^2$$

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι

$$A=A^2 \text{ \& } B=B^2$$

τότε

$$\begin{aligned} AB &= A \cdot I \cdot B = A(A+B)B = A^2B + AB^2 = \\ &= AB + AB = 2AB \end{aligned}$$

δηλαδή

$$AB=2AB$$

και άρα $AB=O$.

14

Να δείξετε ότι ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ικανοποιεί τη σχέση

$$A^{10} + A^9 + A^8 = O$$

διύση

Όπως ξέρουμε κάθε 2×2 πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

ικανοποιεί τη σχέση $A^2 - (\alpha + \delta)A + (\alpha\delta - \beta\gamma)I = 0$

Εφαρμόζοντας αυτό στον πίνακα μας

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

βρίσκουμε ότι αυτός ικανοποιεί τη σχέση

$$A^2 + A + I = 0$$

Πολλαπλασιάζοντας τη σχέση αυτή με A^8 παίρνουμε

$$A^8(A^2 + A + I) = A^8 \cdot 0$$

ή

$$A^8 \cdot A^2 + A^8 \cdot A + A^8 \cdot I = 0$$

ή, τέλος

$$A^{10} + A^9 + A^8 = 0$$

όπως το θέλαμε.